Author:

Title: ασκήσεις δια την β΄τάξιν

Creator: HDML

ασκησεις δια την β΄ ταξιν

ΑΛΓΕΒΡΑ. Β.1 Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐντὸς τοῦ συνόλου R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἡ σχέσις U ἡ ὁριζομένη διὰ

$$xUy \Leftrightarrow x-y \in Z$$

εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας,

Z : Τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Λύσις.—Ἡ σχέσις U εἶναι ἀνακλαστική. Ἔστω $x \in R$. Ἔχομεν: $x-x=0 \in Z$, δηλαδὴ $\forall x \in R$, xUx. Ἡ σχέσις U λοιπὸν εἶναι ἀνακλαστική.

—Ἡ σχέσις U εἶναι συμμετρική. Ἔστω $(x, y) \in R^2$, τοιοῦτον ὥστε xUy. Τότε, $x-y \in Z$.

Ἀλλὰ διὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ Z ὑπάρχει καὶ τὸ ἀντίθετόν του. Ἄρα $-(x-y) \in Z$, δηλ. $y-x \in Z$, ἄρα yUx. Ὥστε: $\forall (x, y) \in R^2$, $xUy \Rightarrow yUx$.

Ἡ σχέσις U λοιπὸν εἶναι συμμετρική.

—Ἡ σχέσις U εἶναι μεταβατική. Ἔστω x, y καὶ φ ἐν R, τέτοιοι, ὥστε xUy καὶ $yU\varphi$.

Τότε: $x-y \in Z$ καὶ $y-\varphi \in Z$.

Ἀλλὰ τὸ σύνολον Z εἶναι κλειστὸν διὰ τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως καὶ διὰ τοῦτο:

$$[(x-y)+(y-\varphi)] \in Z, \text{ δηλ. } (x-y+y-\varphi) \in Z,$$

ἁπλούστερον $x-\varphi \in Z$, ποὺ σημαίνει $xU\varphi$. Ἄρα:

$$\left.\begin{array}{r} \forall (x, y, \varphi) \in R^3,\ xUy \\ \text{καὶ}\ \ yU\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow xU\varphi.$$

Ἡ σχέσις U λοιπὸν εἶναι μεταβατική.

Μὲ τὸ νὰ εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατικὴ αὐτὴ ἡ σχέσις, σημαίνει ὅτι εἶναι μία σχέσις ἰσοδυναμίας.

νὰ προσδιορίσετε, μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων του, τὰ σύνολα Α, Β, Γ. Νὰ γίνῃ σχετικὸν διάγραμμα τοῦ Venn.

Α.14 Νὰ παραστήσετε, μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων του, τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, καθεὶς τῶν ὁποίων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 6 καὶ μικρότερος τοῦ 37 καὶ ποὺ διαιρούμενος διὰ τοῦ 5 δίδει ὑπόλοιπον 2.

Α.15 Ἂν $A = \{1, 2, 3\}$ νὰ εὕρετε ὅλα τὰ γνήσια ὑποσύνολα τοῦ (Α).

Α.16 Ἂν τὸ βασικὸν σύνολον $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ:

$$A = \{\alpha\} \quad B = \{\gamma, \delta\}$$

καὶ Α΄, Β΄ τὰ συμπληρώματα ἀντιστοίχως τῶν Α καὶ Β ὡς πρὸς Ω, νὰ προσδιορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα:

i) $A' \cup B$, ii) $(A \cap B)'$, iii) $(A' \cap B') \cup (A \cap B)$.

Β.2 Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου De Morgan:

$$x-(\psi \cap \chi) = (x-y) \cup (x-\chi),$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$x-y = x-(x \cap \psi).$$

Λύσις.

$$x-\psi = (x-\psi) \cup \varnothing = (x-\psi) \cup (x-x) = x-(x \cap \psi).$$

Β.3 Ἐὰν $\left|x-\frac{3}{4}\right| = 8$ (1) καὶ $\left(x-\frac{3}{4}\right)$ ρητὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικός, νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1).

Λύσις. α) Διὰ $x-\frac{3}{4} > 0$, ἰσχύει:

$$\left|x-\frac{3}{4}\right| = x-\frac{3}{4}, \text{ ὅτε ἡ (1) γίνεται:}$$

$$x-\frac{3}{4} = 8 \Leftrightarrow 4x-3 = 32 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{35}{4}}.$$

β) Διὰ $x-\frac{3}{4} < 0$, ἰσχύει:

$$\left|x-\frac{3}{4}\right| = -\left(x-\frac{3}{4}\right) = -x+\frac{3}{4}, \text{ ὅτε ἡ (1) γίνεται:}$$

$$\left|x-\frac{3}{4}\right| = 8 \Leftrightarrow -x+\frac{3}{4} = 8 \Leftrightarrow$$

$$-4x+3 = 32 \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{29}{4}}.$$

Β.4 Διὰ ποίας τιμὰς τῶν α καὶ β ἡ ἐξίσωσις:

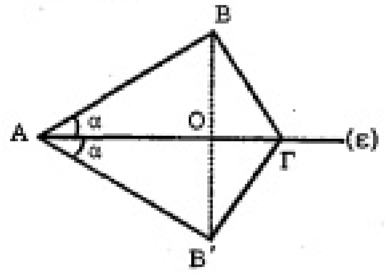
$$2\alpha x-5 = 3(x-2)+2\beta \text{ εἶναι ἀόριστος;}$$

Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις:

$$2\alpha x-3x = 5-6+2\beta \Leftrightarrow (2\alpha-3)x = 2\beta-1,$$

καὶ διὰ νὰ εἶναι ἀόριστος πρέπει καὶ ἀρκεῖ $2\alpha-3=0$ καὶ $2\beta-1=0$, ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται $\alpha = \frac{3}{2}$ καὶ $\beta = \frac{1}{2}$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Β.5 Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ΄Γ ἔχουν τὴν ΑΓ κοινήν, τὴν ΑΒ = ΑΒ΄ καὶ τὴν γωνίαν α = α΄. Νὰ ἀποδειχθῇ διὰ τῆς συμμετρίας ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ΄Γ εἶναι ἴσα.



Λύσις. Ἡ εὐθεῖα ΑΓ = (ε) εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τριγώνου ΒΑΒ΄, διότι τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ κορυφὴν Α (δεδομένον) καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς. Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$A \xrightarrow{\Sigma(\varepsilon)} A,\ B \xrightarrow{\Sigma(\varepsilon)} B',\ \Gamma \xrightarrow{\Sigma(\varepsilon)} \Gamma.$$

Ἄρα τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ΄Γ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν (ε) καὶ ἑπομένως ἴσα.

Β.6 Δίδονται αἱ ἐφεξῆς γωνίαι : $x\widehat{O}y$ καὶ $y\widehat{O}z$. Φέρομεν τὰς Οω καὶ Οφ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῶν $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}z$ ἀντιστοίχως τοιαύτας, ὥστε νὰ εἶναι :

$$x\widehat{O}\omega = \mu \cdot x\widehat{O}y, \quad z\widehat{O}\varphi = \nu \cdot y\widehat{O}z.$$

α) Ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν $\omega\widehat{O}\varphi$ συναρτήσει τῶν γωνιῶν $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}z$ καὶ τῶν μ καὶ ν.

β) Ἐξετάσατε τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $x\widehat{O}y + y\widehat{O}z = 180^\circ$.

Λύσις. α) Ἔχομεν :

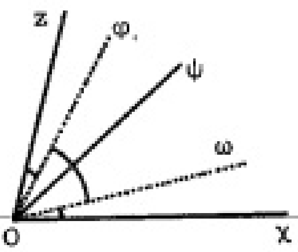
$$\omega\widehat{O}y = x\widehat{O}y - x\widehat{O}\omega = x\widehat{O}y - \mu \cdot x\widehat{O}y = (1-\mu)x\widehat{O}y$$

$$y\widehat{O}\varphi = y\widehat{O}z - z\widehat{O}\varphi = y\widehat{O}z - \nu \cdot y\widehat{O}z = (1-\nu)y\widehat{O}z.$$

Προσθέτοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\omega\widehat{O}y + y\widehat{O}\varphi = (1-\mu)x\widehat{O}y + (1-\nu)y\widehat{O}z, \quad \text{ἢ}$$

$$\omega\widehat{O}\varphi = (1-\mu)x\widehat{O}y + (1-\nu)y\widehat{O}z \quad (3).$$



β) Ἡ (3) γράφεται :

$$\omega\widehat{O}\varphi = x\widehat{O}y + y\widehat{O}z - \mu \cdot x\widehat{O}y - \nu\, y\widehat{O}z =$$

$$= 180^\circ - \mu \cdot x\widehat{O}y - \nu\, y\widehat{O}z \quad (4).$$

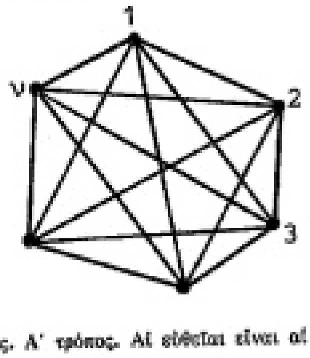
Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ $y\widehat{O}z = 180^\circ - x\widehat{O}y$, λαμβάνομεν :

$$\omega\widehat{O}\varphi = 180^\circ - \mu \cdot x\widehat{O}y - \nu(180^\circ - x\widehat{O}y) =$$

$$180^\circ - \mu \cdot x\widehat{O}y - \nu \cdot 180^\circ + \nu\, x\widehat{O}y, \quad \text{ἢ}$$

$$\omega\widehat{O}\varphi = (1-\nu)180^\circ + (\nu-\mu)x\widehat{O}y.$$

Β.7 Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ν σημεῖα 1, 2, 3,..., ν τὰ ὁποῖα συνδέομεν ἀνὰ δύο δι' εὐθειῶν. Εὕρατε πόσαι εὐθεῖαι προκύπτουν.



Λύσις. Α' τρόπος. Αἱ εὐθεῖαι εἶναι αἱ κάτωθι :

$$\begin{array}{r} 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ldots,\ 1\nu \\ 23,\ 24,\ 25,\ldots,\ 2\nu \\ 34,\ 35,\ldots,\ 3\nu \\ 45,\ldots,\ 4\nu \\ (\nu-1)\nu. \end{array}$$

Ἡ πρώτη σειρὰ ἔχει ν—1 εὐθείας, ἡ δευτέρα ν—2, ἡ τρίτη ν—3, ἡ τετάρτη ν—4 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἡ τελευταία ἔχει μίαν εὐθεῖαν. Ἐὰν συνεπῶς τὸ πλῆθος τῶν εὐθειῶν παραστήσωμεν διὰ Σ θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma = (\nu-1)+(\nu-2)+(\nu-3)+\cdots+3+2+1 \quad (1).$$

Ἡ (1), βάσει τοῦ νόμου τῆς ἀντιμεταθέσεως γράφεται :

$$\Sigma = 1+2+3+\cdots+(\nu-3)+(\nu-2)+(\nu-1) \quad (2).$$

Προσθέτοντες τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$2\Sigma = \nu+\nu+\nu+\cdots+\nu+\nu+\nu.$$

Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ τὸ ν ἐπαναλαμβάνεται ὡς ὅρος ν—1 φορές, προκύπτει :

$$2\Sigma = \nu(\nu-1) \quad \text{καὶ συνεπῶς} \quad \Sigma = \frac{\nu(\nu-1)}{2} \quad (3).$$

Β' τρόπος. Ἀπὸ κάθε σημεῖον ἀναχωροῦν ν—1 εὐθεῖαι ὡς π.χ. ἀπὸ τὸ 1 ἀναχωροῦν αἱ εὐθεῖαι 12, 13, 14,..., 1ν. Ἄρα θὰ μετρηθοῦν ν(ν—1) εὐθεῖαι. Αἱ εὐθεῖαι ὅμως αὗται ἔχουν ληφθῆ κάθε μία δύο φορές. Π.χ. ἡ 12 εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν 21. Ἄρα τὸ ν(ν—1) πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ 2.

Προτεινόμεναι ἀσκήσεις πρὸς λύσιν

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Β.8 Κρουνὸς Α πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 10 h. Κρουνὸς Β μὲ παροχὴν μικροτέραν τοῦ Α κατὰ 50 kg/h πληροῖ τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς δεξαμενῆς εἰς χρόνον μεγαλύτερον τοῦ Α κατὰ 1 h 15 min. Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης τῆς δεξαμενῆς εἰς kg.

Β.9 Ἔμπορος ἠγόρασεν δύο βαρέλια ἐλαίου πρὸς 18,3 δρχ./kg. Ἐπώλησεν ἀπὸ τὸ β' τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ περιεχομένου ἐλαίου καὶ τοῦ ἔμεινε ποσότης ἴση πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ α'. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ α' βαρελίου εἶναι μικροτέρα τῆς ἀξίας τοῦ β' κατὰ 1830 δρχ. νὰ εὑρεθῇ πόσα kg ἐλαίου εἶχεν ἕκαστον βαρέλιον.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Β.10 Δίδονται δύο παράλληλοι ἡμιευθεῖαι Οx καὶ O'x' πρὸς τὸ ἴδιον μέρος τῆς ΟΟ' κείμεναι, σχηματιζομένων κυρτῶν γωνιῶν, εἰς τρόπον ὥστε :

$$x\widehat{O}O' = 3\, O\widehat{O'}x'.$$

Ἂν Ε τυχὸν σημεῖον ἐντὸς τοῦ σχήματος xOO'x' καὶ αἱ $E\widehat{O}x = 10^\circ$ καὶ $E\widehat{O'}O = 20^\circ$, νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία $O\widehat{E}O'$.

Β.11 Αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἀντιστοίχως 100° καὶ 40°. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας, σχηματίζει ἡ διχοτόμος ΑΔ μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ.

Β.12 Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία Α τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 120°, αἱ δὲ ἄλλαι ἐσωτερικαὶ ἔχουν λόγον 113. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι εἰς μοίρας.

Β.13 Δίδονται τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ καὶ ΗΘ, ὅπου ΕΖ = ΗΘ. Μὲ πόσας συγκρίσεις δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τὰ τμήματα κατὰ σειρὰν μεγέθους ; Νὰ γίνῃ ἡ διάταξις.