Author:

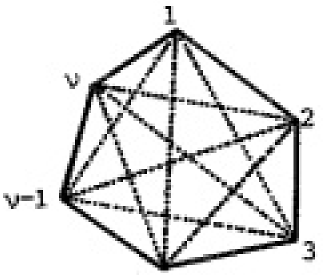
Title: ασκήσεις δια την γ΄ τάξιν

Creator: HDML

ασκησεις δια την γ΄ ταξιν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Γ.1 α) Δείξατε ὅτι τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου μὲ ν τὸ πλῆθος πλευρὰς δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$. β) Ποῖον κυρτὸν πολύγωνον ἔχει ἐννέα διαγωνίους.

Λύσις. α) Ἔστω τὸ κυρτὸν πολύγωνον $123\ldots\nu$ μὲ ν πλευράς.



Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς ἀνὰ δύο εἶναι αἱ

$$
\begin{array}{l}
12,\ 13,\ 14,\ 15,\ldots,1\nu,\\
23,\ 24,\ 25,\ldots,2\nu,\\
34,\ 35,\ldots,3\nu\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(\nu-1)\nu
\end{array}
$$

Ἡ πρώτη σειρὰ ἔχει $\nu-1$ τὸ πλῆθος, ἡ δευτέρα $\nu-2$, ἡ τρίτη $\nu-3$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἡ τελευταία ἔχει 1. Ἐὰν συνεπῶς Σ καλέσωμεν τὸ πλῆθος ὅλων αὐτῶν τῶν εὐθειῶν, θὰ ἔχωμεν:

$$\Sigma = (\nu-1)+(\nu-2)+(\nu-3)+\cdots+3+2+1 \quad (1).$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τῆς ἀντιμεταθέσεως ἔχομεν:

$$\Sigma = 1+2+3+\cdots+(\nu-3)+(\nu-2)+(\nu-1) \quad (2).$$

Προσθέτοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$2\Sigma = \nu+\nu+\nu+\cdots+\nu+\nu+\nu.$$

Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ν εἶναι $\nu-1$, λαμβάνομεν:

$$2\Sigma = \nu(\nu-1) \quad \text{καὶ συνεπῶς} \quad \Sigma = \frac{\nu(\nu-1)}{2}.$$

Ἐὰν ἀπὸ τὸ πλῆθος αὐτὸ Σ ἀφαιρέσωμεν τὸ πλῆθος ν τῶν πλευρῶν $12,\ 23,\ 34,\ldots,(\nu-1)\nu$ θὰ ἔχωμεν τὸ πλῆθος Δ τῶν διαγωνίων. Θὰ εἶναι συνεπῶς:

$$\Delta = \frac{\nu(\nu-1)}{2}-\nu, \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta = \frac{\nu(\nu-3)}{2} \quad (3).$$

Ὁ τύπος αὐτὸς δίδει τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων.

β) Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον πολύγωνον ἔχει ν τὸ πλῆθος πλευράς. Ἐπειδὴ τὸ πλῆθος Δ τῶν διαγωνίων εἶναι:

$$\Delta = \frac{\nu(\nu-3)}{2},$$

θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\nu(\nu-3)}{2} = 9 \quad \text{ἤτοι} \quad \nu(\nu-3) = 18 = 6\cdot 3.$$

Ἐκ ταύτης προκύπτει $\nu = 6$.

Ἄρα τὸ ζητούμενον πολύγωνον εἶναι τὸ ἑξάγωνον.

Γ.2 Ἐπ' εὐθείας δίδονται τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι:

$$\nu\cdot AM = \mu\cdot MB \quad (1) \quad \mu,\ \nu\in N.$$

Ἐὰν Γ εἶναι σημεῖον τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ δείξατε τὴν ἰσότητα:

$$\Gamma M = \frac{\nu\cdot\Gamma A+\mu\cdot\Gamma B}{\mu+\nu} \quad (2).$$

Ἐὰν τὸ Γ εἶναι σημεῖον τῆς ΑΒ κείμενον μεταξὺ τῶν σημείων Μ καὶ Β δείξατε τὴν ἰσότητα:

$$\Gamma M = \frac{\nu\cdot\Gamma A-\mu\cdot B\Gamma}{\mu+\nu} \quad (3).$$

Ἐξετάσατε τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ Μ εἶναι μέσον τοῦ ΑΒ.

Σχ. α

Σχ. β

Λύσις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (Σχ. α) ἔχομεν:

$$\Gamma M = \Gamma A - MA \quad \text{καὶ} \quad \Gamma M = \Gamma B + BM, \quad \text{ἄρα}$$

$$\nu\cdot\Gamma M = \nu\cdot\Gamma A - \nu\cdot MA \quad \text{καὶ} \quad \mu\cdot\Gamma M = \mu\cdot\Gamma B + \mu\cdot BM.$$

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν, λόγῳ τῆς (1), ὅτι:

$$(\mu+\nu)\Gamma M = \nu\cdot\Gamma A + \mu\cdot\Gamma B$$

καὶ συνεπῶς:

$$\Gamma M = \frac{\nu\cdot\Gamma A+\mu\cdot\Gamma B}{\mu+\nu}.$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν (Σχ. β) ἔχομεν:

$$\Gamma M = \Gamma A - MA \quad \text{καὶ} \quad \Gamma M = BM - B\Gamma, \quad \text{ἄρα}$$

$$\nu\cdot\Gamma M = \nu\cdot\Gamma A - \nu\cdot MA \quad \text{καὶ} \quad \mu\cdot\Gamma M = \mu\cdot BM - \mu\cdot B\Gamma.$$

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη, λόγῳ τῆς (1), θὰ ἔχωμεν:

$$(\mu+\nu)\Gamma M = \nu\cdot\Gamma A - \mu\cdot B\Gamma$$

καὶ συνεπῶς:

$$\Gamma M = \frac{\nu\cdot\Gamma A-\mu\cdot B\Gamma}{\mu+\nu}.$$

Ἐὰν τὸ Μ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ θὰ εἶναι:

$$AM = MB, \quad \text{ὅτε ἡ (1) δίδει} \quad \nu = \mu.$$

Διὰ $\nu = \mu$ αἱ ἰσότητες (2) καὶ (3) δίδουν ἀντιστοίχως:

$$\Gamma M = \frac{\Gamma A+\Gamma B}{2}, \quad \Gamma M = \frac{\Gamma A-B\Gamma}{2}.$$

Γ.3 Εἰς πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἡ μεγαλυτέρα γωνία εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἄλλων.

Λύσις. Ἔστω $\widehat{A}$ ἡ γωνία ἡ μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Delta}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι:

$$\widehat{A} < \widehat{B}+\widehat{\Gamma}+\widehat{\Delta}.$$

Ἔστω ὅτι τοῦτο δὲν συμβαίνει, θὰ ἔχωμεν:

$$\widehat{A} \geqslant \widehat{B}+\widehat{\Gamma}+\widehat{\Delta}.$$

Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ λαμβάνομεν:

$$2\widehat{A} \geqslant \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}+\widehat{\Delta}.$$

Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}+\widehat{\Delta} = 360^{\circ}$, προκύπτει $2\widehat{A} \geqslant 360^{\circ}$ καὶ συνεπῶς $\widehat{A} \geqslant 180^{\circ}$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον. Ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{A} < \widehat{B}+\widehat{\Gamma}+\widehat{\Delta}$.

Γ.4 α) Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἔχομεν ν τὸ πλῆθος εὐθείας τὰς 1, 2, 3,..., ν τεμνομένας ἀνὰ δύο κατὰ τρόπον ὥστε τρεῖς οἱαιδήποτε ἐξ αὐτῶν δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πλῆθος Σ τῶν σημείων τομῆς των δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\Sigma = \frac{\nu(\nu-1)}{2}.$$

β) Δύο ἐκ τῶν σημείων αὐτῶν καλοῦνται ἀ π έ ν α ν τ ι ὅταν τοῦ ἑνὸς ὁριζομένου ὡς σημείου τομῆς δύο ἐκ τῶν ν εὐθειῶν, τὸ ἕτερον ὁρίζεται ἀπὸ δύο εὐθείας ἐκ τῶν ν εὐθειῶν διαφορετικῶν τῶν δύο προηγουμένων, π.χ. τὸ σημεῖον (12) ἔχει ὡς ἀπέναντι τὰ σημεῖα:

(34), (35), (36),..., (3ν)

(45), (45),..., (4ν)

(56),..., (5ν)

. . . .

. . . .

(ν—1)ν

Δύο τοιαῦτα σημεῖα ὁρίζουν ἓν ζεῦγος ἀπέναντι σημείων. Π.χ. ἓν ζεῦγος ἀπέναντι σημείων εἶναι τὸ (12), (34). Κάθε τέτοιο ζεῦγος ὁρίζει μίαν εὐθεῖαν. Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰς ν δοθείσας εὐθείας καλεῖται π λ ῆ ρ ε ς ν ό π λ ε υ ρ ο ν. Τὰ σημεῖα τομῆς τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ἀνὰ δύο, καλοῦνται τὸ καθένα κ ο ρ υ φ ὴ τοῦ νοπλεύρου, αἱ δὲ εὐθεῖαι αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ τὰ ζεύγη τῶν ἀπέναντι σημείων καλοῦνται δ ι α γ ώ ν ι ο ι τοῦ νοπλεύρου.

Δείξατε ὅτι τὸ πλῆθος Π τῶν ζευγῶν τῶν ἀπέναντι σημείων καὶ συνεπῶς τὸ πλῆθος Π τῶν διαγωνίων τοῦ νοπλεύρου δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\Pi = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{8}.$$

γ) Ἐφαρμόσατε τ' ἀνωτέρω εἰς τὸ πλῆρες τετράπλευρον καὶ εἰς τὸ πλῆρες πεντάπλευρον.

Λύσις. α) **Πρῶτος τρόπος.** Ἑκάστη ἐκ τῶν εὐθειῶν 1, 2, 3,..., ν τέμνεται ὑπὸ τῶν ἄλλων ν—1 εὐθειῶν εἰς ν—1 σημεῖα. Ἄρα ἐπὶ ἑκάστης ἐκ τῶν ν εὐθειῶν εὑρίσκονται ν—1 σημεῖα καὶ συνεπῶς ἐπὶ τῶν ν εὐθειῶν εὑρίσκονται ν(ν—1). Ἀλλὰ κάθε σημεῖον ἔχει ληφθῇ δύο φορὰς π.χ. τὸ σημεῖον τομῆς τῆς 1 ὑπὸ τῆς 2, ἤτοι τὸ (1, 2) εἶναι καὶ σημεῖον τομῆς τῆς 2 ὑπὸ τῆς 1, ἤτοι εἶναι τὸ σημεῖον (2, 1) ταυτιζόμενον μὲ τὸ (1, 2). Κατὰ συνέπειαν τὸ πλῆθος τῶν σημείων εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ν(ν—1). Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς $\Sigma = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$.

Δεύτερος τρόπος. Τὰ σημεῖα τομῆς εἶναι τὰ κάτωθι:

(12), (13), (14), (15),..., (1ν) τὸ πλῆθος ν—1

(23), (24), (25),..., (2ν) » » ν—2

(34), (36),..., (3ν) » » ν—3

(45),..., (4ν) » » ν—4

. . . .

. . . .

(ν—1, ν) » » 1

Ἄρα εἶναι:

$$\Sigma = (\nu-1)+(\nu-2)+(\nu-3)+(\nu-4)+\cdots+4+3+2+1 \quad (1).$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τῆς ἀντιμεταθέσεως ἔχομεν:

$$\Sigma = 1+2+3+4+\cdots+(\nu-4)+(\nu-3)+(\nu-2)+(\nu-1) \quad (2).$$

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$2\Sigma = \nu+\nu+\nu+\nu+\cdots+\nu+\nu+\nu+\nu \quad (3).$$

Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ τὰ ν εἶναι ν—1 τὸ πλῆθος, προκύπτει: $2\Sigma = \nu(\nu-1)$ καὶ $\Sigma = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$ (4).

β) Τὸ σημεῖον (12) ἔχει ὡς ἀπέναντι τὰ σημεῖα:

(34), (35), (36),..., (3ν) τὸ πλῆθος ν—3

(45), (46),..., (4ν) » » ν—4

(56),..., (5ν) » » ν—5

. . . .

. . . .

(ν—1, ν) » » 1

τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ πλῆθος:

$$K = (\nu-3)+(\nu-4)+(\nu-5)+\cdots+3+2+1 \quad (\alpha).$$

Ἐπειδὴ εἶναι καὶ

$$K = 1+2+3+\cdots+(\nu-5)+(\nu-4)+(\nu-3) \quad (\beta),$$

προσθέτοντες τὰς (α) καὶ (β) λαμβάνομεν:

$$2K = (\nu-2)+(\nu-2)+(\nu-2)+\cdots(\nu-2)+(\nu-2)+(\nu-2).$$

Ἐκ ταύτης ἐπειδὴ τὸ ν—2 εἶναι ν—3 φοράς, θὰ ἔχωμεν $2K = (\nu-2)(\nu-3)$ καὶ συνεπῶς $K = \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2}$.

Ἄρα κάθε σημεῖον (κορυφὴ) σχηματίζει μὲ τὰ ἀπέναντι αὐτοῦ σημεῖα ζεύγη τὸ πλῆθος $K = \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2}$ καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεῖα (αἱ κορυφαὶ) εἶναι, ὡς ἐδείχθη, $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ τὸ πλῆθος, θὰ ἔχωμεν ὅτι ὅλα τὰ σχηματιζόμενα ζεύγη εἶναι τὸ πλῆθος $\frac{\nu(\nu-1)}{2} \cdot \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{4}$.

Ἀλλὰ τὰ οὕτω σχηματισθέντα ζεύγη ἐμφανίζονται δύο φορὰς ἕκαστον, π.χ. τὸ ζεῦγος [(12), (34)] εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ζεῦγος [(3, 4), (12)]. Ἄρα ὁ ἄνω τύπος διαιρούμενος διὰ 2 θὰ δώσῃ τὸ πλῆθος Π τῶν ἀπέναντι ζευγῶν, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, θὰ δώσῃ τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς

$$\Pi = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{8} \quad (5)$$

γ) Τὸ πλῆρες τετράπλευρον ὁρίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας 1, 2, 3, 4. Αἱ κορυφαί του εἶναι ἓξ καὶ δίδονται ἀπὸ τὸν τύπον (4) διὰ ν=4, ἤτοι:

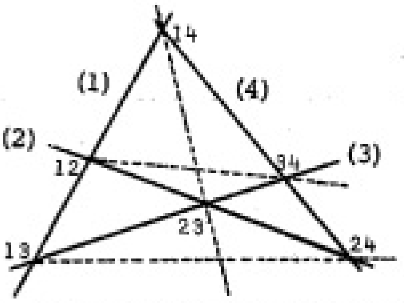
$$\Sigma = \frac{\nu(\nu-1)}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Αἱ κορυφαὶ εἶναι αἱ (12), (13), (14), (23), (24), (34). Τὰ ζεύγη τῶν ἀπέναντι κορυφῶν εἶναι τρία. Τὸ πλῆθος των δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον (5) διὰ $\nu=4$, ἤτοι:

$$\Pi = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{8} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8} = 3.$$

Τὰ ἐν λόγῳ ζεύγη εἶναι τά:

[(12), (34)], [(23), (14)], [(13), (24)].

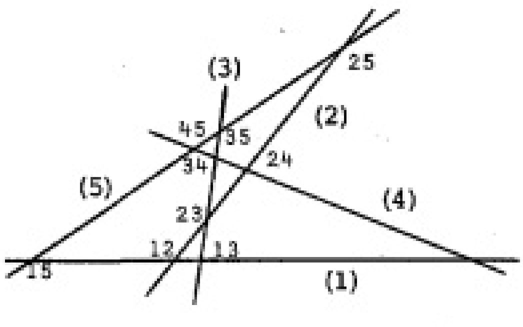


Αἱ διαγώνιοι εἶναι αἱ εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), (ε_3) ὁριζόμεναι ἀπὸ ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ζευγῶν. Τὸ πλῆρες πεντάπλευρον ὁρίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας 1, 2, 3, 4, 5.

Αἱ κορυφαί του εἶναι δέκα τὸ πλῆθος καὶ δίδονται ἀπὸ τὸν τύπον (4), διὰ $\nu=5$, ἤτοι:

$$\Sigma = \frac{\nu(\nu-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Αἱ κορυφαὶ εἶναι αἱ (12), (13), (14), (15), (23), (24), (25), (34), (35), (45).



Τὰ ζεύγη τῶν ἀπέναντι κορυφῶν εἶναι δεκαπέντε. Τὸ πλῆθος των δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον (5) διὰ $\nu=5$, ἤτοι:

$$\Pi = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{8} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8} = 15.$$

Τὰ ἐν λόγῳ ζεύγη εἶναι τά:

[(12), (34)], [(12), (35)], [(12), (45)], [(13), (24)], [(13), (25)], [(13), (45)], [(14), (23)], [(14), (25)], [(14), (35)], [(15), (23)], [(15), (24)], [(15), (34)], [(23), (45)], [(24), (35)], [(25), (34)].

Αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ ἕκαστον τῶν ζευγῶν αὐτῶν καὶ συνεπῶς εἶναι δεκαπέντε τὸ πλῆθος.

ΑΛΓΕΒΡΑ. Γ.5 Δίδεται τὸ σύνολον:

$$\Sigma = \{ x \mid x = 2^\nu,\ \nu = 1, 2, 3, 4, 5 \}.$$

α) Εὕρατε τὸ συμπλήρωμα τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸ σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

β) Σχηματίσατε τὸ δυναμοσύνολον τοῦ Σ.

γ) Εὕρατε τὴν τομὴν τοῦ Σ καὶ τοῦ συνόλου:

$$K = \{ x \mid x = 2^\nu,\ \nu = 2, 3 \}$$

ὡς καὶ τὴν ἕνωσιν αὐτῶν.

Λύσις. α) Τὸ σύνολον Σ εἶναι τό:

$$\Sigma = \{ 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32 \}.$$

Τὸ σύνολον N εἶναι τό:

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}.$$

Ἄρα τὸ συμπλήρωμα $\overline{\Sigma}$ τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸ N εἶναι τό:

$$\overline{\Sigma} = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, \ldots, 31, 32, 33, 34, \ldots \}.$$

β) Τὰ ὑποσύνολα τοῦ Σ εἶναι τά:

{2}, {4}, {8}, {16}, {32}, {2, 4}, {2, 8}, {2, 16}, {2, 32}, {4, 8}, {4, 16}, {4, 32}, {8, 16}, {8, 32}, {16, 32} {2, 4, 8}, {2, 4, 16}, {2, 4, 32}, {2, 8, 16}, {2, 8, 32}, {2, 16, 32}, {4, 8, 16}, {4, 8, 32}, {4, 16, 32}, {8, 16, 32}, {2, 4, 8, 16}, {2, 4, 8, 32}, {2, 4, 16, 32}, {2, 8, 16, 32}, {4, 8, 16, 32}, {2, 4, 8, 16, 32}, ἤτοι $2^5 = 32$ τὸ πλῆθος.

Τὸ σύνολον τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς στοιχεῖα τὰ ὑποσύνολα αὐτὰ τοῦ Σ εἶναι τὸ δυναμοσύνολον τοῦ Σ.

γ) Τὸ σύνολον K εἶναι $K = \{ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8 \}$ καὶ συνεπῶς ἡ τομή των $\Sigma \cap K$ εἶναι τὸ σύνολον $K = \{4, 8\}$, ἡ δὲ ἕνωσίς των $\Sigma \cup K$ εἶναι τὸ σύνολον Σ.

Γ.6 Δίδονται τὰ σύνολα:

$$\Sigma = \{ 1, 3, 5, 7, \ldots \} \quad \text{καὶ} \quad K = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$$

καὶ σύνολον ἀναφορᾶς τό:

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \}.$$

α) Ἐξετάσατε τί σχέσιν ἔχουν μεταξύ των τὰ σύνολα Σ καὶ K.

β) Εὕρατε τὴν ἕνωσιν καὶ τὴν τομὴν αὐτῶν.

γ) Τὰ σύνολα Σ καὶ K εἶναι ἀριθμήσιμα ἢ ὄχι.

Λύσις. α) Τὰ σύνολα Σ καὶ K, ὡς μὴ ἔχοντα οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον εἶναι ξένα μεταξύ των. Τὸ σύνολον Σ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ K ὡς πρὸς σύνολον ἀναφορᾶς τὸ N καὶ ἀντιστρόφως, ἤτοι εἶναι:

$$\overline{\Sigma} = K \quad \text{καὶ} \quad \Sigma = \overline{K}.$$

β) Ἡ ἕνωσις τῶν συνόλων Σ καὶ K εἶναι τὸ σύνολον N, ἤτοι εἶναι: $\Sigma \cup K = N$. Ἐπειδὴ τὰ σύνολα Σ καὶ K εἶναι ξένα, ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι τὸ μηδενικὸν σύνολον, ἤτοι εἶναι $\Sigma \cap K = \varnothing$.

γ) Τὰ στοιχεῖα x τοῦ Σ δίδονται ἀπὸ τὸν τύπον: $x = 2\nu - 1$ διὰ $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Ἄρα τὸ Σ εἶναι ἀριθμήσιμον, διότι τὸ τυχὸν στοιχεῖον του ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα φυσικὸν ἀριθμόν. Π.χ. τὸ στοιχεῖον 7 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν 4, διότι ἡ ἰσότης $2\nu - 1 = 7$ δίδει $2\nu = 8$ καὶ συνεπῶς $\nu = 4$.

Τὰ στοιχεῖα x τοῦ K δίδονται ἀπὸ τὸν τύπον: $x=2\nu$ διὰ $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Ἄρα τὸ K εἶναι ἀριθμήσιμον, διότι τὸ τυχὸν στοιχεῖον του ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα φυσικὸν ἀριθμὸν π.χ. τὸ στοιχεῖον 6 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν 3, διότι ἡ ἰσότης $2\nu = 6$ δίδει $\nu = 3$.

Γ.7 Δίδεται τὸ σύνολον $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Σχηματίσατε τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ:

$$\Sigma_1 = \{x \mid x = 3\nu, \quad \text{διὰ } \nu = 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\Sigma_2 = \{x \mid x = 3\nu - 1, \text{ διὰ } \nu = 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\Sigma_3 = \{x \mid x = 3\nu - 2, \text{ διὰ } \nu = 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

καὶ α) δείξατε ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ N εἶναι στοιχεῖον ἑνὸς καὶ μόνον ἐκ τῶν συνόλων Σ_1, Σ_2, Σ_3 καὶ β) δείξατε ὅτι δὲν ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ N τὸ ὁποῖον νὰ μὴ ἀνήκῃ εἰς ἓν τῶν συνόλων Σ_1, Σ_2, Σ_3 γ) Ποία ἡ ἕνωσις τῶν τριῶν συνόλων Σ_1, Σ_2, Σ_3 καὶ ποία ἡ τομή των.

Λύσις. α) Ἔστω ω ἓν στοιχεῖον τοῦ N. Τοῦτο διαιρούμενον διὰ 3 θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 0, ἢ 1, ἢ 2 καὶ συνεπῶς, ἐὰν λ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ω : 3, θὰ ἔχωμεν: $\omega = 3\lambda$ (ὑπόλοιπον 0), $\omega = 3\lambda+1$ (ὑπόλοιπον 1), $\omega = 3\lambda+2$ (ὑπόλοιπον 2).

Ἡ $\omega = 3\lambda+1$ γράφεται $\omega = 3(\lambda+1)-2$ καὶ ἡ $\omega = 3\lambda+2$ γράφεται $\omega = 3(\lambda+1)-1$. Ἂν τεθῇ $\lambda+1 = \nu$ αὗται γίνονται $\omega = 3\nu-2$ καὶ $\omega = 3\nu-1$. Ἄρα τὸ τυχὸν στοιχεῖον ω τοῦ N θὰ δίδεται ἀπὸ ἕνα καὶ μόνον τῶν τύπων $\omega = 3\nu$, $\omega = 3\nu-1$, $\omega = 3\nu-2$ καὶ συνεπῶς θὰ ἀνήκῃ εἰς ἓν καὶ μόνον ἐκ τῶν στοιχείων Σ_1, Σ_2, Σ_3. Π.χ. τὸ στοιχεῖον 17 τοῦ N γράφεται:

$$17 = 3 \cdot 5 + 2 = 3(5+1) - 1 = 3 \cdot 6 - 1$$

καὶ συνεπῶς ἀνήκει μόνον εἰς σύνολον Σ_2.

β) Ἐπειδὴ τὸ τυχὸν στοιχεῖον ω τοῦ N δίδεται ἀπὸ ἕνα τῶν τύπων $\omega = 3\nu$, $\omega = 3\nu-1$, $\omega = 3\nu-2$, ἕπεται ὅτι τὸ στοιχεῖον αὐτὸ ἀνήκει ὁπωσδήποτε εἰς ἓν τῶν συνόλων Σ_1, Σ_2, Σ_3. Ἄρα ἐδείχθη ὅτι δὲν ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ N, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ ἀνήκῃ εἰς ἓν τῶν συνόλων Σ_1, Σ_2, Σ_3.

γ) Ἡ ἕνωσις $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ τῶν τριῶν συνόλων εἶναι τὸ σύνολον N, ἤτοι εἶναι $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 = N$. Ἐπειδὴ τὰ τρία σύνολα Σ_1, Σ_2, Σ_3 εἶναι ξένα, ἡ τομή των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, Εἶναι συνεπῶς $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \emptyset$.

Γ.7 α) Ἐξετάσατε ἐὰν τὰ σύνολα:

$\Sigma = \{x \mid x$ θετικὸς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 300 καὶ 420$\}$

$K = \{x \mid x$ θετικὸς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 120 καὶ 440$\}$

εἶναι ἰσοδύναμα.

β) Εὕρατε τὰ $\Sigma \cap K$ καὶ $\Sigma \cup K$.

γ) Πόσα εἶναι τὰ ὑποσύνολα τοῦ Σ καὶ πόσα τοῦ K;

Λύσις. Ὁ μ. κ. διαιρέτης τῶν 300 καὶ 420 εἶναι 60, οἱ δὲ διαιρέται τοῦ 60 εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, ὡς γνωστόν, εἶναι οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 300 καὶ 420 καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ εἶναι:

$$\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

Ὁ μ. κ. διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 120 καὶ 440 εἶναι ὁ 40, οἱ δὲ διαιρέται τοῦ 40 εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι, ὡς γνωστόν, οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 120 καὶ 440 καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ εἶναι:

$$K = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}.$$

Ὡς παρατηροῦμεν τὰ σύνολα Σ καὶ K δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν πληθικὸν ἀριθμὸν καὶ συνεπῶς δὲν εἶναι ἰσοδύναμα.

β) Ἡ τομὴ τῶν Σ καὶ K εἶναι:

$$\Sigma \cap K = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}.$$

Ἡ ἕνωσις αὐτῶν εἶναι

$$\Sigma \cup K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 60\}.$$

γ) Ἐπειδὴ τὸ Σ ἔχει δώδεκα στοιχεῖα τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ εἶναι $2^{12} = 4096$ καὶ ἐπειδὴ τὸ K ἔχει 8 στοιχεῖα τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ εἶναι $2^8 = 256$.

Γ.8 Διαμερίσατε τὸ σύνολον:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν τύπων:

$$x = 4\nu, \; x = 4\nu-1, \; x = 4\nu-2, \; x = 4\nu-3.$$

Λύσις. Οἱ τύποι δίδουν ἀντιστοίχως τὰ τέσσαρα σύνολα:

$$\Sigma_1 = \{x \mid x = 4\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots\} = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$$

$$\Sigma_2 = \{x \mid x = 4\nu-1, \; \nu = 1, 2, 3, \ldots\} = \{3, 7, 11, 15, \ldots\}$$

$$\Sigma_3 = \{x \mid x = 4\nu-2, \; \nu = 1, 2, 3, \ldots\} = \{2, 6, 10, 14, \ldots\}$$

$$\Sigma_4 = \{x \mid x = 4\nu-3, \; \nu = 1, 2, 3, \ldots\} = \{1, 5, 9, 13, \ldots\}$$

Ἐὰν δείξωμεν ὅτι τὰ σύνολα Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 εἶναι ἀνὰ δύο ξένα μεταξύ των καὶ ὅτι ἡ ἕνωσις αὐτῶν εἶναι τὸ σύνολον N, ἤτοι $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 = N$, τότε ἐδείχθη ὅτι τὸ σύνολον N διεμερίσθη εἰς τὰ τέσσαρα αὐτὰ σύνολα.

Τὰ σύνολα Σ_1 καὶ Σ_2 εἶναι ξένα, διότι ἐὰν δὲν εἶναι ξένα πρέπει κάποιο στοιχεῖον ἔστω τὸ 4ν τοῦ Σ_1 νὰ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ κάποιο στοιχεῖο $4\lambda-1$ τοῦ Σ_2. Θὰ πρέπῃ δηλαδὴ νὰ εἶναι $4\nu = 4\lambda-1$. Αὐτὴ γράφεται $4(\lambda-\nu) = 1$, Ἡ ἰσότης αὐτὴ εἶναι ἄτοπος διότι ὁ 4 δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 1, Ἄρα τὰ σύνολα Σ_1, Σ_2 εἶναι ξένα. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ σύνολα (Σ_1, Σ_3), (Σ_1, Σ_4), (Σ_2, Σ_3), (Σ_2, Σ_4), (Σ_3, Σ_4) εἶναι ξένα. Π.χ. διὰ τὰ (Σ_2, Σ_3) δὲν εὐσταθεῖ ἡ ἰσότης $4\nu-1 = 4\lambda-2$ διότι δίδει $4(\lambda-\nu) = 1$ ποὺ εἶναι ἀδύνατος.

Οὕτως ἐδείχθη ὅτι τὰ σύνολα Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 εἶναι ἀνὰ δύο ξένα μεταξύ των.

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ἡ ἕνωσις τῶν συνόλων Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 εἶναι τὸ σύνολον N. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τυχὸν στοιχεῖον x τοῦ συνόλου N ἀνήκει εἰς ἓν τῶν συνόλων Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4.

Πράγματι: Τὸ x διαιρούμενον διὰ 4 θὰ δώσῃ πηλίκον λ καὶ ὑπόλοιπον 0, ἢ 1, ἢ 2, ἢ 3. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς:

$$x = 4\lambda, \text{ ἢ } x = 4\lambda+1, \text{ ἢ } x = 4\lambda+2, \text{ ἢ } x = 4\lambda+3,$$

Ἔχομεν: $x = 4\lambda+1 = 4(\lambda+1)-3 = 4\nu-3$

$$x = 4\lambda+3 = 4(\lambda+1)-1 = 4\nu-1.$$

Ἄρα ὁ x δίδεται ἀπὸ ἕνα τῶν τύπων:

$$x = 4\nu, \; x = 4\nu-1, \; x = 4\nu-2, \; x = 4\nu-3$$

καὶ συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Σ_1, ἢ εἰς τὸ Σ_2, ἢ εἰς τὸ Σ_3, ἢ εἰς τὸ Σ_4.

Προτεινόμεναι ἀσκήσεις πρὸς λύσιν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Γ.9 Δίδεται τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ βάσεων $AB = \alpha$ καὶ $\Gamma\Delta = \beta$ καὶ ἔστωσαν Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ. Ἡ ΕΖ προεκτεινομένη ἑκατέρωθεν ὁρίζει ἐπὶ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Η καὶ Θ. Δείξατε τὰς ἰσότητας:

$$HE = Z\Theta = \frac{1}{2}\beta, \quad E\Theta = ZH = \frac{1}{2}\alpha, \quad EZ = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Γ.10 Δίδονται ἐπὶ τοῦ πίνακος 5 εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἀνὰ δύο καὶ μὴ διερχόμεναι ἀνὰ τρεῖς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Νὰ εὑρεθῇ πόσα εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ἀνὰ δύο.

Γ.11 Ἡ προηγουμένη ἄσκησις νὰ ἐξετασθῇ ὅταν αἱ εὐθεῖαι εἶναι ν τὸ πλῆθος, ἔνθα $\nu \in N$.

Γ.12 Ἐπὶ τοῦ πίνακος δίδονται εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἀνὰ δύο καὶ μὴ διερχόμεναι ἀνὰ τρεῖς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν σημείων τομῆς εἶναι 15, εὕρατε τὸ πλῆθος τῶν εὐθειῶν.

Γ.13 Δίδονται αἱ ἐφεξῆς γωνίαι $x\widehat{O}y$ καὶ $y\widehat{O}z$, τῶν ὁποίων αἱ διχοτόμοι ΟΚ καὶ ΟΛ σχηματίζουν γωνίαν 90°. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ xOz εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ.14 Σχηματίσατε τὰ διατεταγμένα ζεύγη (α, β), ἔνθα $\alpha \in A = x\{x \mid x$ θετικὸς διαιρέτης τοῦ $9\}$ καὶ $\beta \in B = \{x \mid x$ θετικὸς περιττὸς $< 14\}$.

Γ.15 Προσδιορίσατε τὰ λ καὶ μ, ὥστε ἡ ἐξίσωσις:

$$(3\lambda-1)(\mu-1)x = \mu^2-1 \quad (1)$$

νὰ εἶναι α) ἀόριστος καὶ β) ἀδύνατος. Ἐὰν οὐδὲν τούτων συμβαίνῃ εὕρατε τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως. Ἐφαρμογὴ διά:

$$\lambda = 2, \quad \mu = 3.$$

Γ.16 Σχηματίσατε τὸ σύνολον Σ τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν μικροτέρων τοῦ 50.

Σχηματίσατε τοῦ συνόλου αὐτοῦ τὰ ὑποσύνολα Α καὶ Β, ἐξ ὧν τὸ Α περιέχει τὰ στοιχεῖα τοῦ Σ τὰ προκύπτοντα ἀπὸ τὸν τύπον $4\nu-1$ καὶ τὸ Β τὰ στοιχεῖα τοῦ Σ τὰ προκύπτοντα ἐκ τοῦ τύπου $4\nu+1$, ἔνθα:

$$\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.$$

Ποία ἡ τομὴ τῶν συνόλων Α καὶ Β;

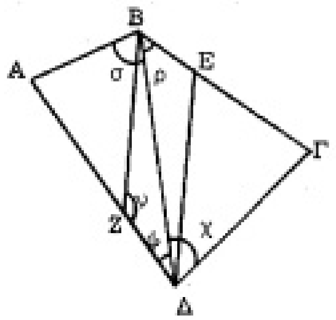
Ἐξετάσατε ἐὰν ὑπάρχῃ στοιχεῖον τοῦ Σ μὴ περιεχόμενον, οὔτε εἰς τὸ σύνολον Α, οὔτε εἰς τὸ σύνολον Β.

Γ.17 Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$(1+2+3+\cdots+\nu)(x = 1^3+2^3+3^3+\cdots+\nu^3.$$

ασκησεις δια την δ΄ ταξιν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Δ.1 Εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν διαγώνιον ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου.



Λύσις. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ. α) Ἐὰν ἡ διαγώνιος ΒΔ εἶναι διχοτόμος μιᾶς τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ ἢ $\widehat{\Delta}$, τότε εὐκόλως εὑρίσκεται ὅτι θὰ εἶναι διχοτόμος καὶ τῆς ἄλλης (δύο τρίγωνα ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ἔχουν καὶ τὴν τρίτην ἴσην).

Ἑπομένως, τότε αἱ διχοτόμοι τῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ σχηματίζουν μηδενικὰς γωνίας μὲ τὴν διαγώνιον ΒΔ.

β) Ἐάν, χωρὶς περιορισμὸν τῆς γενικότητος εἶναι $\widehat{x} > \widehat{y}$, τότε, ἐπειδή:

$$\widehat{x} + \widehat{\rho} + \widehat{\Gamma} = \widehat{\sigma} + \widehat{y} + \widehat{A} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{A} = \widehat{\Gamma}, \quad \text{ἕπεται:}$$

$$\widehat{x} + \widehat{\rho} = \widehat{y} + \widehat{\sigma}$$

ἀπὸ ὅπου, ἐπειδὴ εἶναι $x > y$, συνάγεται ὅτι εἶναι $\sigma > \rho$.

Ἐπειδὴ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Δ εἶναι ἐσωτερικὴ ἡμιευθεῖα τῆς γωνίας x καὶ συνεπῶς τέμνει τὴν ΒΓ εἰς ἐσωτερικὸν σημεῖον Ε. Ὁμοίως, ἐπειδὴ εἶναι $\sigma > \rho$, ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β τέμνει τὴν ΑΔ εἰς ἐσωτερικὸν σημεῖον Ζ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΑΖ ἔχομεν:

$$\widehat{\nu} = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{A}.$$

Καὶ ἐπειδή:

$$\widehat{B} = 4\,\text{ὀρθ.} - 2\widehat{A} - \widehat{\Delta}, \text{ ἕπεται } \frac{\widehat{B}}{2} = 2\,\text{ὀρθ} - \widehat{A} - \frac{\widehat{\Delta}}{2},$$

ὁπότε ἔχομεν:

$$\widehat{\nu} = 2\text{ὀρθ.} - \widehat{A} - \frac{\widehat{\Delta}}{2} + \widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{\nu} = 2\,\text{ὀρθ.} - \frac{\Delta}{2} \text{ δηλ.}$$

$$\nu = 2\,\text{ὀρθ.} - Z\widehat{\Delta}E, \quad \text{ὁπότε} \quad \nu + Z\widehat{\Delta}E = 2\,\text{ὀρθ.}$$