Author:

Title: ασκήσεις δια την ε΄τάξιν

Creator: HDML

Δ.7 Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις :

$$\Pi(x,\ y,\ \omega) \equiv (-x+y+\omega)^5+(x-y+\omega)^5+$$
$$+(x+y-\omega)^5-(x+y+\omega)^5.$$

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι κυκλικῶς συμμετρική, ὡς πρὸς x, y, ω κατὰ τὴν τάξιν αὐτὴν καὶ ὁμογενὴς 5ου βαθμοῦ.

Θέτομεν $x=0$ καὶ ἔχομεν :

$$\Pi(0,\ y,\ \omega) = (y+\omega)^5+(-y+\omega)^5+(y-\omega)^5-(y+\omega)^5 = 0.$$

Ἐπειδὴ εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὴ ὡς πρὸς x, y, ω θὰ μηδενίζεται ὅταν θέσωμεν καὶ $y=0$ καὶ $\omega=0$. Ἑπομένως ἡ παράστασις διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου $xy\omega$. Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης εἶναι μονώνυμον 3ου βαθμοῦ συμμετρικόν, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι 2ου βαθμοῦ συμμετρικὸν καὶ ὁμογενὲς ἤτοι τῆς μορφῆς :

$$P(x,\ y,\ \omega) \equiv \lambda(x^2+y^2+\omega^2)+\mu(xy+y\omega+\omega x).$$

Ἑπομένως θὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης.

$$[-x+y+\omega)^5+(x-y+\omega)^5+(x+y-\omega)^5-(x+y+\omega)^5 =$$
$$= [\lambda(x^2+y^2+\omega^2)+\mu(xy+y\omega+\omega x)]xy\omega.$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ταυτότητα θέτοντες $x=y=\omega=1$ ἔχομεν :

$$1^5+1^5+1^5-3^5 = \lambda(1^2+1^2+1^2)+\mu(1^2+1^2+1^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -240 = 3(\lambda+\mu) \Leftrightarrow \lambda+\mu = -80 \quad (1).$$

Θέτοντες $x=1,\ y=-1,\ \omega=1$ ὁμοίως ἐργαζόμενοι ἔχομεν : $240 = 3\lambda-\mu$ (2). Λύοντες τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $\lambda=-80,\ \mu=0$.

Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα παράστασις ἀναλύεται εἰς γινόμενον :

$$\Pi(x,\ y,\ \omega) = -80\,xy\omega\,[x^2+y^2+\omega^2].$$

Προτεινόμεναι ἀσκήσεις πρὸς λύσιν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Δ.8 Ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ. Ἔστω Ε ἡ προβολὴ τοῦ Β ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ Ζ, Η αἱ προβολαὶ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΒΓ. Δείξατε ὅτι :

α) ΒΔ $\perp$ ΖΗ καὶ β) ΔΖΗΓ : ἐγγράψιμον.

Δ.9 Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΒΑ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ = ΑΓ. Δείξατε ὅτι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΔΓ εἶναι σημεῖον ὁμοκύκλιον τῶν Α, Β, Γ.

Δ.10 Εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς εὐθεῖαν xy κεῖνται σημεῖον Α καὶ κύκλος (Β, ρ). Νὰ προσδιορισθοῦν σημεῖον Γ τοῦ (Β, ρ) καὶ Δ τῆς xy τοιαῦτα ὥστε :

ΓΔ+ΔΑ : ἐλάχιστον.

Δ.11 Ὀρθογώνιον εἰς Α καὶ Δ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι τοιοῦτον ὥστε ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ νὰ ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

Ἐὰν ἡ ΒΓ παραμένῃ σταθερὰ θέσει μεγέθει, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς ΑΔ.

ασκησεις δια την ε΄ ταξιν

ΑΛΓΕΒΡΑ. Ε.1 Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$3x^4+10x^3+60x^2+40x+48=0.$$

Λύσις. α) Ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις ἐπιλύεται ὅπως αἱ ἀντίστροφοι ἐξισώσεις τετάρτου βαθμοῦ ὡς ἀκολούθως :

$$3x^4+10x^3+60x^2+40x+48=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^4+5\cdot 2x^3+15\cdot 2^2x^2+5\cdot 2^3x+3\cdot 2^4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+5\cdot 2x+15\cdot 2^2+5\cdot 2^3\frac{1}{x}+3\cdot 2^4\frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+\frac{2^4}{x^2}\right)+5\cdot 2\left(x+\frac{2^2}{x}\right)+15\cdot 2^2 = 0.$$

Ἐκτελοῦμεν τὸν μετασχηματισμόν :

$$x+\frac{2^2}{x} = y \ (1), \text{ ὅτε εἶναι : } x^2+\frac{2^4}{x^2} = y^2-2\cdot 2^2 \ (2).$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις, δυνάμει τῶν (1) καὶ (2), γίνεται :

$$3(y^2-8)+10y+60=0 \quad (3).$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἐπιλύουσα τῆς δοθείσης.

Ἐὰν y_1 καὶ y_2 εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐπιλυούσης, θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὰς κάτωθι ἁπλᾶς δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις :

$$x+\frac{4}{x} = y_1 \quad \text{καὶ} \quad x+\frac{4}{x} = y_2,$$

ἐκ τῶν ὁποίων προσδιορίζονται αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς δοθείσης.

Λύσις. β) Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις εἶναι ὁμογενὴς ὡς πρὸς 2 καὶ x τετάρτου βαθμοῦ ὁμογενείας καὶ συνεπῶς δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$x = 2\lambda \quad (1).$$

ΑΛΓΕΒΡΑ. Δ.12 Νὰ διερευνηθῇ διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ μ τὸ σύστημα :

$$(3\mu-1)x+(3\mu+1)y = 27\mu^3-1$$
$$(9\mu^2-1)x+(9\mu^2+1)y = 27\mu^3-1.$$

Δ.13 Δείξατε ὅτι ἡ παράστασις :

$$(4\alpha^2-7\alpha\beta-\beta\gamma+2\alpha\gamma)(\beta^2-\beta\gamma+2\alpha\gamma-2\alpha\beta)(\gamma^2+2\alpha\gamma-2\alpha\beta-\beta\gamma)$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον πολυωνύμου.

Δ.14 Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ πολυώνυμον :

$$f(x,\ y,\ \omega) = x^4+y^4+\omega^4$$

συναρτήσει τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων :

$$\Sigma_1 = x+y+\omega,\ \Sigma_2 = xy+y\omega+\omega x,\ \Sigma_3 = xy\omega,\ \Sigma_4 = x^2y^2\omega^2.$$

Ἡ ἐξίσωσις δυνάμει τῆς (1) γίνεται:

$$3\cdot 16\lambda^4+10\cdot 8\lambda^3+60\cdot 4\lambda^2+40\cdot 2\lambda+48=0 \iff$$

$$\iff 48\lambda^4+80\lambda^3+240\lambda^2+80\lambda+48=0.$$

Ἡ τελευταία εἶναι ἀντίστροφος τετάρτου βαθμοῦ.

Ἐὰν λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 εἶναι αἱ ρίζαι της, τότε αἱ ρίζαι τῆς ἀρχικῆς θὰ εἶναι

$$x_1=2\lambda_1,\ \ x_2=2\lambda_2,\ \ x_3=2\lambda_3,\ \ x_4=2\lambda_4.$$

Παρατήρησις. Οἱ ἀνωτέρω τρόποι λύσεως δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις παρουσιάζει τὴν γενικὴν μορφήν:

$$\alpha x^4+\beta k x^3+\gamma k_2 x^2+\beta k^3 x+\alpha k^4=0.$$

Ε.2 Ἐπὶ μιᾶς προσανατολισμένης εὐθείας x΄Οx, δίδονται τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ κατὰ τὴν σειρὰν Α, Γ, Β, Δ συνιστοῦν ἁρμονικὴν τετράδα, ὅταν ἰσχύῃ ἡ ἰσότης:

$$\frac{AB}{\Gamma B}\cdot\frac{\Gamma\Delta}{A\Delta}=-1 \quad (1).$$

Σημειοῦμεν:

$$(A\Gamma B\Delta)=\frac{AB}{\Gamma B}:\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta}=\frac{AB}{\Gamma B}\cdot\frac{\Gamma\Delta}{A\Delta}$$

καὶ καλοῦμεν τὸ $(A\Gamma B\Delta)=\dfrac{AB}{\Gamma B}:\dfrac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$ **διπλοῦν λόγον. Ἐὰν δὲ εἶναι** $\dfrac{AB}{\Gamma B}:\dfrac{A\Delta}{\Gamma\Delta}=-1$, **τότε ὁ λόγος αὐτὸς καλεῖται διπλοῦς ἁρμονικὸς λόγος, ἐὰν δὲ εἶναι:**

$$\frac{AB}{\Gamma B}:\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta}\neq -1,$$

τότε ὁ λόγος αὐτὸς καλεῖται διπλοῦς ἀναρμονικὸς λόγος. Ἐὰν α, β, γ δ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ τετμημέναι τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ τοῦ ἄξονος x΄Οx καὶ ὁ διπλοῦς λόγος εἶναι ἁρμονικός, δείξατε τὴν ἀλήθειαν τῆς ἰσότητος:

$$\alpha\gamma-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+\beta\delta=0 \quad (2),$$

Ἡ (2) καλεῖται ἁρμονικὴ ἐξίσωσις. Τὸ ζεῦγος (Β, Δ) λέγομεν ὅτι χωρίζει ἁρμονικῶς τὸ ζεῦγος (Α, Γ).

Λύσις. Ὡς γνωστόν, εἶναι:

x΄ Α(α) 0 Β(β) Γ(γ) Δ(δ) x

$$AB=\beta-\alpha,\ \Gamma B=\beta-\gamma,\ \Gamma\Delta=\delta-\gamma,\ A\Delta=\delta-\alpha$$

καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}\cdot\frac{\delta-\gamma}{\delta-\alpha}=-1, \quad \text{ἢ} \quad (\beta-\alpha)(\delta-\gamma)+(\beta-\gamma)(\delta-\alpha)=0, \quad \text{ἢ}$$

$$\beta\delta-\beta\gamma-\alpha\delta+\alpha\gamma+\beta\delta-\beta\alpha-\gamma\delta+\alpha\gamma=0, \quad \text{ἢ}$$

$$2\alpha\gamma-\beta(\alpha+\gamma)-\delta(\alpha+\gamma)+2\beta\delta=0, \quad \text{ἢ}$$

$$2\alpha\gamma-(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+2\beta\delta=0, \quad \text{ἢ τελικῶς:}$$

$$\alpha\gamma-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+\beta\delta=0$$

Ε.3 Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x΄Οx τὰ σημεῖα Α(α), Γ(γ), $A_1(\alpha_1)$, $\Gamma_1(\gamma_1)$. Ἐξετάσατε τί πρέπει νὰ συμβαίνῃ, ὥστε νὰ ὑπάρχουν δύο σημεῖα Β(β), Δ(δ) ἐπὶ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, τοιαῦτα ὥστε νὰ χωρίζουν τὰ ζεύγη (Α, Γ) καὶ (A_1, Γ_1) ἁρμονικῶς, δηλαδὴ τοιαῦτα, ὥστε αἱ τετράδες ΑΓΒΔ καὶ $A_1\Gamma_1B\Delta$ νὰ εἶναι ἁρμονικαί.

x΄ Α Γ A_1 Γ_1 x

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ τετράδες ΑΓΒΔ καὶ $A_1\Gamma_1B\Delta$ εἶναι ἁρμονικαί, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, τὰς ἁρμονικὰς ἐξισώσεις:

$$\alpha\gamma-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+\beta\delta=0 \quad (1),$$

$$\alpha_1\gamma_1-\frac{1}{2}(\alpha_1+\gamma_1)(\beta+\delta)+\beta\delta=0 \quad (2).$$

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ ὡς πρὸς β+δ καὶ βδ.

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$(\beta+\delta)(\alpha+\gamma-\alpha_1-\gamma_1)=2(\alpha\gamma-\alpha_1\gamma_1).$$

Ἐκ ταύτης, διὰ $\alpha+\gamma-\alpha_1-\gamma_1\neq 0$ (3), λαμβάνομεν:

$$\beta+\delta=\frac{2(\alpha\gamma-\alpha_1\gamma_1)}{\alpha+\gamma-\alpha_1-\gamma_1} \quad (4).$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ β+δ εἰς τὴν (1) καὶ λύοντες ὡς πρὸς βδ, εὑρίσκομεν:

$$\beta\delta=\frac{\alpha\gamma(\alpha_1+\gamma_1)-\alpha_1\gamma_1(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma-\alpha_1-\gamma_1} \quad (5).$$

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) συνάγομεν ὅτι τὰ β καὶ δ εἶναι ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως:

$$(\alpha+\gamma-\alpha_1-\gamma_1)x^2-2(\alpha\gamma-\alpha_1\gamma_1)x+\alpha\gamma(\alpha_1+\gamma_1)-\alpha_1\gamma_1(\alpha+\gamma)=0 \ (6).$$

Θὰ πρέπει ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ νὰ ἔχῃ δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους. Ἡ διακρίνουσα αὐτῆς Δ εἶναι:

$$\Delta\equiv(\alpha\gamma-\alpha_1\gamma_1)^2-(\alpha+\gamma-\alpha_1-\gamma_1)[\alpha\gamma(\alpha_1+\gamma_1)-\alpha_1\gamma_1(\alpha+\gamma)].$$

Ἡ Δ μηδενίζεται διὰ $\alpha=\alpha_1$, διὰ $\alpha=\gamma_1$, διὰ $\gamma=\alpha_1$ καὶ διὰ $\gamma=\gamma_1$ καὶ συνεπῶς εἶναι διαιρετὴ διά:

$$(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\gamma_1)(\gamma-\alpha_1)(\gamma-\gamma_1).$$

Τὸ πηλίκον θὰ εἶναι προφανῶς σταθερὰ ποσότης ἔστω k, ὅτε θὰ ἔχομεν.

$$(\alpha\gamma-\alpha_1\gamma_1)^2-(\alpha+\gamma-\alpha_1-\gamma_1)[\alpha\gamma(\alpha_1+\gamma_1)-\alpha_1\gamma_1(\alpha+\gamma)]\equiv$$

$$\equiv(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\gamma^1)(\gamma-\alpha_1)(\gamma-\gamma_1)k.$$

Εἰς τὸ πρῶτον μέλος ὁ ὅρος $\alpha^2\gamma^2$ ἔχει συντελεστὴν 1 εἰς δὲ τὸ δεύτερον μέλος ἔχει συντελεστὴν k. Ἄρα θὰ εἶναι k = 1. Ἔχομεν συνεπῶς:

$$\Delta\equiv(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\gamma_1)(\gamma-\alpha_1)(\gamma-\gamma_1) \quad (7)$$

καὶ διὰ νὰ ἔχῃ ἡ (6) ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους θὰ πρέπει νὰ εἶναι:

$$\Delta\equiv(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\gamma_1)(\gamma-\alpha_1)(\gamma-\gamma_1)>0.$$

Ἐκ ταύτης συνάγομεν ὅτι τὸ ζεῦγος (Α, Γ) δὲν πρέπει νὰ χωρίζῃ τὸ ζεῦγος (A_1, Γ_1) προκειμένου νὰ ὑπάρχῃ ζεῦγος (Β, Δ) τὸ ὁποῖον νὰ χωρίζῃ τὰ ζεύγη (Α, Γ) καὶ (A_1, Γ_1) ἁρμονικῶς διότι ἂν συνέβαινεν αὐτὸ θὰ ἴσχυε ἡ ἰσότης:

$$\frac{AA_1}{A\Gamma_1}\cdot\frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma A_1}=1,$$

δηλ. $\dfrac{(\alpha_1-\alpha)(\gamma_1-\gamma)}{(\gamma_1-\alpha)(\alpha_1-\gamma)}=-1\iff(\alpha_1-\alpha)(\gamma-\gamma_1)=(\gamma-\alpha_1)(\gamma_1-\alpha)$,

ὁπότε ἡ (7) θὰ ἐγένετο: $-[(\gamma-\alpha_1)(\alpha-\gamma_1)]^2>0$, ποὺ εἶναι ψευδὴς πρότασις.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Ε.4 Ἐὰν α, β εἶναι δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα, νὰ κατασκευασθῇ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα x, ὥστε :

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \quad (1).$$

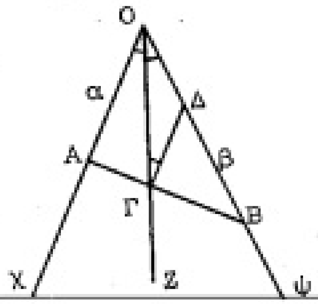
Βοηθητικὴ πρότασις Ι. Δίδεται γωνία xOy. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox καὶ Oy αὐτῆς, λαμβάνομεν τμήματα ΟΑ = α ΟΒ = β ἀντιστοίχως. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΟΖ αὐτῆς, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΟΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΒ εἰς τὸ Δ.

Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{O\Delta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΑ, θὰ ἔχομεν :

$$\frac{O\Delta}{OB}=\frac{A\Gamma}{AB} \quad (2).$$



Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΒΑ καὶ ΔΒΓ ἔχομεν :

$$\frac{\Delta\Gamma}{OA}=\frac{\Gamma B}{AB} \quad (3).$$

Τὸ τρίγωνον ΟΔΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι $\widehat{A O \Gamma}=\widehat{\Gamma O B}$ ἐξ ὑποθέσεως ∢ΑΟΓ = ∢ΟΓΔ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΟΑ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΟΓ. Ἄρα :

$$O\Delta=\Gamma\Delta \quad (4).$$

Ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἔχομεν :

$$\frac{O\Delta}{OA}=\frac{\Gamma B}{AB} \quad (5),$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (2) καὶ (5) κατὰ μέλη, ἔχομεν :

$$\frac{O\Delta}{OB}+\frac{O\Delta}{OA}=\frac{A\Gamma+\Gamma B}{AB}=\frac{AB}{AB}=1 \Rightarrow \frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{O\Delta}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ΟΑ = α καὶ ΟΒ = β, ἔχομεν :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{O\Delta}.$$

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης συνάγεται ὅτι διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου εὐθυγράμμου τμήματος x ἀρκεῖ ἐπὶ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας xOy νὰ λάβωμεν τμήματα ΟΑ = α καὶ ΟΒ = β ἀντιστοίχως, νὰ φέρωμεν τὴν διχοτόμον ΟΓ τῆς γωνίας ταύτης, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ καὶ ἐν συνεχείᾳ τὴν παράλληλον ΓΔ πρὸς τὴν ΟΑ. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι μεταβλητὴ καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, ὥστε :

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{\lambda},$$

ὅπου λ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα, τότε ἡ μεταβλητὴ εὐθεῖα διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.

Μὲ ἄλλα λόγια τὸ σταθερὸν τοῦτο σημεῖον εἶναι ἡ περιβάλλουσα τοῦ συνόλου τῶν μεταβλητῶν εὐθειῶν.

Πράγματι, ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης σχέσεως :

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{O\Delta}$$

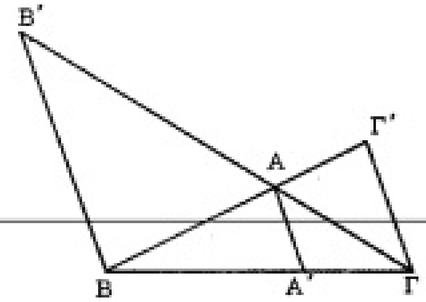
καὶ τῆς δοθείσης :

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{\lambda}$$

προκύπτει ὅτι λ = ΟΔ = ΔΓ. Ἐκ ταύτης συνάγεται ὅτι τὸ Γ εἶναι σταθερὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου ΟΓ τῆς γωνίας.

Βοηθητικὴ πρότασις ΙΙ. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἓν σημεῖον Α΄ τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ. Ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΑ΄ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ αὐτοῦ εἰς τὰ σημεῖα Β΄ καὶ Γ΄ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{AA'}=\frac{1}{BB'}+\frac{1}{\Gamma\Gamma'}$$



Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΑΑ΄ καὶ ΓΒ΄Β ἔχομεν :

$$\frac{AA'}{BB'}=\frac{\Gamma A'}{\Gamma B} \quad (1).$$

Ὁμοίως ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΑΑ΄ καὶ ΒΓ΄Γ, ἔχομεν:

$$\frac{AA'}{\Gamma\Gamma'}=\frac{BA'}{B\Gamma} \quad (2).$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, ἔχομεν :

$$\frac{AA'}{BB'}+\frac{AA'}{\Gamma\Gamma'}=\frac{\Gamma A'+BA'}{B\Gamma}=\frac{B\Gamma}{B\Gamma}=1 \Rightarrow$$

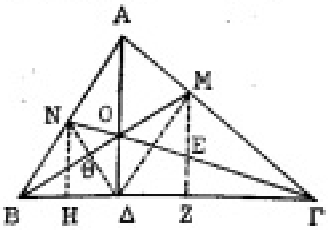
$$\Rightarrow \frac{1}{BB'}+\frac{1}{\Gamma\Gamma'}=\frac{1}{AA'}.$$

Ἐκ τῆς προτάσεως αὐτῆς συνάγεται ὅτι διὰ τὴν κατασκευὴν πάλιν τοῦ ζητουμένου εὐθυγράμμου τμήματος x, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν δύο τυχούσας παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους ἡμιευθείας ΒΒ΄ καὶ ΓΓ΄ καὶ ἐπ' αὐτῶν νὰ λάβωμεν τμήματα ΒΒ΄ = α καὶ ΓΓ΄ = β.

Ἡ τομὴ τῶν ΒΓ΄ καὶ ΓΒ΄ προσδιορίζει σημεῖον Α καὶ ἡ ἐξ αὐτοῦ παράλληλος ΑΑ΄ πρὸς τὴν ΒΒ΄ τέμνουσα τὴν ΒΓ εἰς Α΄ προσδιορίζει τὸ τμῆμα ΑΑ΄ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ x.

Ε.5 Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ καὶ τὰ σημεῖα Μ, Ν τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ αὐτοῦ ἀντιστοίχως. Ἐὰν αἱ ΒΜ καὶ ΓΝ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΔ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΜΔΝ.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν Μ καὶ Ν φέρομεν τὰς καθέτους ΜΖ καὶ ΝΗ ἐπὶ τὴν ΒΓ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ΓΝ καὶ ΒΜ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Θ ἀντιστοίχως. Τὰ τρίγωνα ΟΝΘ καὶ ΟΕΜ εἶναι ὅμοια, λόγῳ τῶν παραλλήλων ΝΘ, ΜΕ.



Ἐξ ἄλλου, τὰ ἐκ τοῦ Ο ὕψη τῶν ἐν λόγῳ τριγώνων εἶναι ἴσα μὲ τὰς ἀποστάσεις ΔΖ καὶ ΔΗ καὶ συνεπῶς :

$$\frac{ΜΕ}{ΝΘ} = \frac{ΔΖ}{ΔΗ} \quad (1).$$

Ἐκ τῶν παραλλήλων ΜΖ, ΑΔ καὶ ΝΗ, ἔχομεν :

$$\frac{ΜΕ}{ΜΖ} = \frac{ΑΟ}{ΑΔ} = \frac{ΝΘ}{ΝΗ} \quad (2).$$

Ἐκ τῆς (2) ἕπεται ὅτι :

$$\frac{ΜΕ}{ΝΘ} = \frac{ΜΖ}{ΝΗ} \quad (3).$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (3) ἔχομεν :

$$\frac{ΔΖ}{ΔΗ} = \frac{ΜΖ}{ΝΗ} \quad (4).$$

Εἶναι ἀκόμη καὶ $\sphericalangle ΔΖΜ = \sphericalangle ΔΗΝ = 1$ ὀρθ. (5).

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) συνάγεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΖΜ καὶ ΔΗΝ εἶναι ὅμοια καὶ συνεπῶς $\sphericalangle ΜΔΖ = ΝΔΗ$ ἀπὸ ὅπου $\sphericalangle ΜΔΑ = \sphericalangle ΝΔΑ$.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι οἱ πόδες τῶν δύο ὑψῶν, τότε αἱ ΒΜ, ΓΝ εἶναι τὰ δύο ὕψη καὶ τέμνονται ἐπίσης ἐπὶ τρίτου ὕψους ΑΔ, ὁπότε τὸ τρίγωνον ΔΜΝ εἶναι τὸ ὀρθικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἡ πρότασις «τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθικοῦ τοῦ τριγώνου τούτου», εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. Ε.6 Ἐὰν $0 < α, β, γ < \frac{\pi}{2}$ καὶ

$$συν\,α = εφ\,β, \quad συν\,β = εφ\,γ, \quad συν\,γ = εφ\,α,$$

νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$ημ\,α = ημ\,β = ημ\,γ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν δοθεισῶν λαμβάνομεν διαδοχικῶς :

$$συν^2α = εφ^2β = \frac{ημ^2β}{συν^2β} = \frac{1-συν^2β}{συν^2β} = \frac{1-εφ^2γ}{εφ^2γ} =$$

$$= \frac{1-\frac{ημ^2γ}{συν^2γ}}{\frac{ημ^2γ}{συν^2γ}} = \frac{συν^2γ-(1-συν^2γ)}{1-συν^2γ} = \frac{2συν^2γ-1}{1-συν^2γ} =$$

$$= \frac{2εφ^2α-1}{1-εφ^2α} = \frac{\frac{2ημ^2α}{1-ημ^2α}-1}{1-\frac{ημ^2α}{1-ημ^2α}} = \frac{2ημ^2α-1+ημ^2α}{1-ημ^2α-ημ^2α} =$$

$$= \frac{3ημ^2α-1}{1-2ημ^2α} \text{ ἄρα } συν^2α = \frac{3ημ^2α-1}{1-2ημ^2α} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-ημ^2α = \frac{3ημ^2α-1}{1-2ημ^2α} \Rightarrow (1-ημ^2α)(1-2ημ^2α) =$$

$$= 3ημ^2α-1 \Rightarrow 1-ημ^2α-2ημ^2α+2ημ^4α-3ημ^2α+1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ημ^4α-3ημ^2α+1 = 0.$$

Ἡ τελευταία λυομένη ὡς πρὸς $ημ^2α$ δίδει :

$$ημ^2α = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Ἡ μεγαλυτέρα ρίζα ἀπορρίπτεται, διότι εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 1, ἐνῷ πρέπει νὰ εἶναι $ημ^2α < 1$ ἐπειδὴ $0 < α < \frac{\pi}{2}$.

Ἄρα :

$$ημ^2α = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow ημ\,α = \sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ημα = \sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}+1}{2}} - \sqrt{\frac{\frac{3}{2}-1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow ημ\,α = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς ἔχομεν :

$$ημ\,α = ημ\,β = ημ\,γ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Προτεινόμεναι ἀσκήσεις πρὸς λύσιν

ΑΛΓΕΒΡΑ. Ε.7 Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως :

$$αx+βx+γ = 0$$

πληροῦν τὰς σχέσεις :

$$|αγ| > 0 \quad (1), \quad |α|-|β|+|γ| < 0 \quad (2),$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει τὸ πολὺ μίαν ἀκεραίαν λύσιν.

(Προτείνεται ὑπὸ Βασ. Πιπεργιᾶ)

Ε.8 Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$$f(x) \equiv x^{6μ+3}+x^{6μ}+x^{3μ+3}+x^{3μ} \quad \text{καὶ} \quad φ(x) \equiv x^2+x+1$$

ὅπου $μ \in N$. Δείξατε ὅτι :

α) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x) : φ(x)$ εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ. β) οἱ συντελεσταὶ τοῦ πηλίκου εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ γ) ὁ ἀριθμός :

$$2^{6μ+3}+2^{6μ}+2^{3μ+3}+2^{3μ}-18$$

διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 7.

(Προτείνεται ὑπὸ Νικ. Θεοδώρου—Ἰωάννινα)

Ε.9 Ἐὰν $α, β, γ \in R$ καὶ $|\sqrt{2β}|\left(\frac{α^2-|β|}{|α||β|}\right) < 1$,

νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως :

$$x^3+αx^2+βx+γ = 0$$

(Προτείνεται ὑπὸ Ἀθ. Κακκαφιᾶ—Λαμία)

Ε.10 Ἐὰν $\nu \geqslant 2$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$5^{2^{\nu-2}}-1 = \text{πολ. } 2^{\nu}$$

(Προτείνεται ἀπὸ τὸν κ. Παν. Μπουρβάρην—Ἀθῆναι)

Ε.11 Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in R$ καὶ $|\alpha| < |\beta| < |\gamma|$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2} < \frac{|\alpha|+|\gamma|}{|\alpha|}.$$

(Προτείνεται ἀπὸ τὸν κ. Παν. Μπουρβάρην Ἀθῆναι)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Ε.12 Διὰ τῆς κορυφῆς Δ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν τέμνουσαν τὰς πλευρὰς ΓΒ καὶ ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Λ ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν δευτέραν τέμνουσαν ἐκ τοῦ Δ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΓΒ καὶ ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ν, Κ ἀντιστοίχως (Κ μεταξὺ Β καὶ Λ).

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἰσχύει:

$$(\text{ΚΛ})(\text{ΓΝ}) = (\text{ΜΝ})(\text{ΑΛ}).$$

(Προτείνεται ἀπὸ τὸν Ἰωαν. Κοκαράκην—Χανιά)

Ε.13 Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ καὶ ΑΔ, ΒΓ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Ἐπὶ τῆς ΕΔ λαμβάνομεν τμῆμα ΕΗ = ΓΔ καὶ ἐπὶ τῆς ΒΖ τμῆμα ΖΘ = ΒΓ. Ἡ εὐθεῖα ΗΘ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τὴν ΑΔ εἰς τὸ Ν. Δείξατε ὅτι:

$$\text{ΜΗ} = \text{ΘΝ}.$$

(Προτείνεται ἀπὸ τὸν Δημ. Καρτσακλῆν—Δοκίμιον Ἀγρινίου)

Ε.14 Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ σταθερά. Σημεῖον Γ κινεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου Ο. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΓ θεωροῦμεν εὐθ. τμῆμα $\overline{\text{ΓΔ}} = \overline{\text{ΑΓ}}\cdot\nu$, ἔνθα $\nu \in R$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τομῆς τῶν ΒΓ, ΟΔ.

(Προτείνεται ἀπὸ τὸν Ἰωαν Κοκαράκην Χανιά)

Ε.15 Τριγώνου ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΒΓ = α εἶναι σταθερά, θέσει καὶ μεγέθει, ἐνῷ αἱ διάμεσοί του μ_β καὶ μ_γ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως:

$$\mu_\beta = 2\mu_\gamma.$$

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου.

(Προτείνεται ἀπὸ τὸν καθηγητὴν κ. Ἰωαν. Ἀναστασόπουλον—Χώρα—Τριφυλίας)

Ε.16 Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Ἐκ τοῦ Ρ ἄγομεν τὰς καθέτους $ΡΒ_1$, $ΡΓ_1$, $ΡΜ_1$ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ ΑΜ ἀντιστοίχως, ἔνθα Μ τὸ μέσον τοῦ ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ $ΡΒ_1$, $ΡΓ_1$, $ΡΜ_1$ ὁρίζουν ἴσα τμήματα ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τριγώνου.

(Προτείνεται ἀπὸ τὸν Ἰωαν. Ἡρακλείδην Ρόδος)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ Ε.17 Ἐὰν Ρ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τριγώνου ΑΒΓ τοιοῦτον, ὥστε:

$$\widehat{ΑΡΒ} = \widehat{ΒΡΓ} = \widehat{ΓΡΑ} \quad \text{καὶ} \quad ΡΑ = x, \quad ΡΒ = y, \quad ΡΓ = z$$

νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{\alpha x}{\eta\mu(120^\circ - A)} = \frac{\beta y}{\eta\mu(120^\circ - B)} = \frac{\gamma z}{\eta\mu(120^\circ - \Gamma)} = \frac{2\alpha\beta\gamma}{\sqrt{3}\,(x+y+z)}.$$

(Προτείνεται ἀπὸ τὸν μαθητὴν Δημ. Καρτσακλῆν—Δοκίμιον Ἀγρινίου)

Ε.18 Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$|\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)| < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Προτείνεται ἀπὸ τὸν κ. Ἰωαν. Ἀναστασόπουλον—Χώρα—Τριφυλίας)

ασκησεις δια την στ΄ ταξιν

ΑΛΓΕΒΡΑ. ΣΤ.1 Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $z^2+|z| = 0$, ἐντὸς τοῦ συνόλου τῶν μιγαδικῶν.

Ἐπίλυσις. Ἔστω ρ καὶ φ εἶναι τὸ μέτρον καὶ τὸ ὄρισμα τοῦ μιγαδικοῦ z, τότε:

$$z = \rho(\sigma\upsilon\nu\,\varphi + i\eta\mu\,\varphi)$$

καὶ ἡ πρὸς ἐπίλυσιν ἐξίσωσις γίνεται.

$$[\rho(\sigma\upsilon\nu\,\varphi + i\eta\mu\varphi)]^2 + \rho = 0 \Leftrightarrow \rho^2(\sigma\upsilon\nu 2\varphi + i\eta\mu 2\varphi) + \rho = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho[\rho(\sigma\upsilon\nu\,2\varphi + i\eta\mu 2\varphi) + 1] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\rho = 0 \Rightarrow z_1 = 0) \vee \rho\sigma\upsilon\nu 2\varphi + i\rho\eta\mu 2\varphi + 1 = 0.$$

Ἀλλὰ $\quad \rho\,\sigma\upsilon\nu\,2\varphi + i\rho\,\eta\mu 2\varphi + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \eta\mu 2\varphi = 0 \\ \rho\sigma\upsilon\nu 2\varphi + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad (1).$$

$$\text{μὲ } 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

$$\text{Ἀλλὰ } \eta\mu\,2\varphi = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ \varphi = \dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right. \quad (2).$$

$$\text{μὲ } 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Ἀπὸ τὴν $\rho\,\sigma\upsilon\nu 2\varphi + 1 = 0$ ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\,2\varphi < 0$ (3).

Εκ τῶν (2) καὶ (3) ἕπεται $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ καὶ διὰ τὰς δύο ἀνωτέρω τιμὰς ἡ δευτέρα τῶν (1) δίδει $\rho = 1$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν καὶ τὰς λύσεις:

$$z_2 = 1\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{2}\right) = i,$$

$$z_3 = 1\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} + i\,\eta\mu\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

Παρατήρησις. Ἡ ἐπίλυσις δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν θέσωμεν $z = x+iy$, ὁπότε ὁδηγούμεθα εἰς τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{r} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2} = 0 \\ xy = 0, \end{array}\right.$ λυόμενον εὐκόλως.