Author: Θεόδωρος Αρτίκης

Title: Ιδιότητες μιας Κλάσης Γενικευμένων Κατανομών

Creator: HDML

ΜΕΡΟΣ Α'

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΙΑΣ ΚΛΑΣΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

'Υπό Θεόδωρου 'Αρτίκη

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

'Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(u)$ εἶναι ἄπειρα διαιρετή ἄν καί μόνο ἄν ἡ $\varphi(u)$ μπορεῖ νά πάρει τήν μορφή

$$\varphi(u)=\exp\left\{i\mu u-\sigma^2u^2/2+\int_{-\infty}^{0^-}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)dM(x)+\int_{0^+}^{+\infty}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)dM(x)\right\} \quad (1)$$

ὅπου μ καί σ^2 εἶναι σταθερές καί ἡ $M(x)$ εἶναι συνάρτηση μή φθίνουσα στά διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$. 'Η $M(x)$ λέγεται Levy φασματική συνάρτηση τῆς $\varphi(u)$.

'Η κλάση τῶν ἄπειρα διαιρετῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων εἶναι πολύ σημαντική στήν θεωρία τῶν πιθανοτήτων καί ἰδιαίτερα στήν μελέτη τῶν ὁριακῶν θεωρημάτων. 'Η ἔρευνα τοῦ ὁρίου μίας αὐθαίρετης ἀκολουθίας χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ, κάτω ἀπό ὁρισμένες προϋποθέσεις, ἀπό τήν ἔρευνα τοῦ ὁρίου μιᾶς ἀκολουθίας ἄπειρα διαιρετῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων. "Αν ἡ συνάρτηση $M(x)$ εἶναι κυρτή στό διάστημα $(-\infty,0)$ καί κοίλη στό διάστημα $(0,\infty)$ τότε $M(x)$ λέγεται μονοκόρυφη. 'Η ἄπειρα διαιρετή χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(u)$ θά λέγεται ὅτι ἀνήκει στήν κλάση U ὅταν ἡ $M(x)$ εἶναι μονοκόρυφη. 'Ο ρόλος τῆς κλάσης U στήν θεωρία τῶν πιθανοτήτων ἐνισχύεται ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ κλάση αὐτή ὑπερκαλύπτει τίς κλάσεις S καί L. Ἡ πρώτη εἶναι ἡ κλάση τῶν εὐσταθῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων καί ἡ δεύτερη εἶναι ἡ κλάση τῶν αὐτο-ἀναλυομένων χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων.

Ἡ κλάση U ἀπό δεκαετίας περίπου ἔχει συγκεντρώσει τό ἐνδιαφέρον ἀρκετῶν ἐρευνητῶν. Ὁ P. Medgyessy (1967) ἀπέδειξε (i) (μ) συμμετρικές συναρτήσεις κατανομῆς τῆς κλάσης αὐτῆς εἶναι μονοκόρυφες (ii) χαρακτηριστικές συναρτήσεις τῆς μορφῆς $\int_0^\infty (\varphi(u))^x\, dG(x)$ ἀνήκουν σέ μονοκόρυφες συναρτήσεις κατανομῆς, ὅπου φ(u) πραγματική χαρακτηριστική συνάρτηση τῆς κλάσης U καί G(x) συνάρτηση κατανομῆς. Οἱ C.Alf καί T. O' Connor (1977) ἀπέδειξαν ὅτι $\varphi(u)\in U$ ἄν καί μόνο ἄν $\varphi(u) = \exp\left\{\frac{1}{u}\int_0^u \log f(y)\,dy\right\}$ ὅπου f(u) ἄπειρα διαιρετή χαρακτηριστική συνάρτηση. Ἀργότερα ὁ S. Wolfe (1978) ἀπέδειξε ὅτι γιά νά ἐνσωματωθεῖ μία συνάρτηση κατανομῆς σέ μία ἡμι-ομάδα μονοκορύφων συναρτήσεων κατανομῆς πρέπει ἡ ἀντίστοιχη χαρακτηριστική συνάρτηση νά ἀνήκει στήν κλάση U. Πρόσφατα ὁ T. O' Connor (1979) ἔδειξε ὅτι $\varphi(u)\in U$ ἄν καί μόνο ἄν ἡ παράγωγος $\varphi'(u)$ ὑπάρχει στό σύνολο $R-\{0\}$ καί $\lim u\varphi'(u)=0$ ὅταν $u \to 0$, καί γιά κάθε $r\in(0,1)$ ὑπάρχει μία χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_r(u)$ τέτοια ὥστε $\varphi(u)=\varphi(ru)\varphi_r(u)$.

Στήν ἐργασία αὐτή ἀποδεικνύουμε μερικές ἰδιότητες γιά γενικευμένες χαρακτηριστικές συναρτήσεις τῆς κλάσης U.

2. ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΤΥΧΑΙΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ἔστω $\{X_n : n=1,2\ldots\}$ μία ἀκολουθία τυχαίων μεταβλητῶν καί ἔστω N μία διακριτή τυχαία μεταβλητή μέ τιμές στό σύνολο $\{0,1,2,\ldots\}$ καί συνάρτηση πιθανότητας $P[N=n]=P_n$. Τότε ἡ τυχαία μεταβλητή

$$Z_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \tag{2}$$

λέγεται ἄθροισμα τυχαίου ἀριθμοῦ τυχαίων μεταβλητῶν. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι οἱ μεταβλητές X_n, n=1,2,... εἶναι ἀνεξάρτητες μεταξύ τους καί ἀνεξάρτητες ἀπό τήν N, τότε ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση τῆς Z_N δίδεται ἀπό τήν σχέση

$$\varphi_{Z_N}(u)=P(\varphi_X(u)) \tag{3}$$

ὅπου $\varphi_X(u)$ ἡ κοινή χαρακτηριστική συνάρτηση τῶν X_n, $n=1,2...$; καί $P(s)$ εἶναι ἡ πιθανογεννήτρια συνάρτηση τῆς μεταβλητῆς N. Ἡ $\varphi_{Z_N}(u)$, ἡ ὁποία λέγεται γενικευμένη χαρακτηριστική συνάρτηση, θά λέγεται ὅτι ἀνήκει στήν κλάση U ὅταν

$$\varphi_{Z_N}(u)=\exp\{\lambda(\varphi_Y(u)-1)\} \tag{4}$$

ὅπου $\varphi_Y(u)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση μίας (0) μονοκόρυφης συνάρτησης κατανομῆς $F_Y(y)$ καί $\lambda > 0$. Στό ἑπόμενο ἐδάφιο γίνεται θεμελίωση μερικῶν ἰδιοτήτων τῆς $\varphi_{Z_N}(u)$.

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $\varphi_{Z_N}(u)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Ἔστω $\varphi_X(u)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση μίας (0) μονοκόρυφης καί (0) συμμετρικῆς συνάρτησης κατανομῆς. Ἄν ἡ $P(s)$ εἶναι ἄπειρα διαιρετή τότε ἡ (3) εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση μίας (0) μονοκόρυφης (0) συμμετρικῆς συνάρτησης κατανομῆς ἀπό τήν κλάση U.

Ἀπόδειξη. Ἡ πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(s)$ εἶναι τῆς μορφῆς

$$P(s)=\exp\{\lambda(\Phi(s)-1)\}$$

ὅπου $\Phi(s)$ εἶναι πιθανογεννήτρια συνάρτηση, FELLER (1966). Ἡ $\varphi_{Z_N}(u)$ εἶναι τῆς μορφῆς (4) μέ $\varphi_Y(u)=\Phi(\varphi_X(u))$ ἡ ὁποία ἀνήκει σέ (0) μονοκόρυφη καί (0) συμμετρική κατανομή. Ἑπομένως ἡ $\varphi_{Z_N}(u)$ εἶναι πραγματική χαρακτηριστική συνάρτηση τῆς κλάσης U.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$\text{Ἔστω } P(s)=\frac{1-P_1}{1-P_1 s}=\exp\left\{\log\frac{1}{1-P_1}\left(\frac{\log(1-P_1 s)}{\log(1-P_1)}\right)-1\right\},$$

ὅπου $0 < P_1 < 1$, εἶναι ἡ πιθανογεννήτρια συνάρτηση τῆς γεωμετρικῆς κατανομῆς καί ἔστω $\varphi_X(u)=\frac{1}{1+u^2}$ ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση τῆς κατανομῆς Laplace. Τότε ἡ $P(\varphi_X(u))$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση μίας (0) μονοκόρυφης καί (0) συμμετρικής κατανομής ἀπό τήν κλάση U.

Ἔστω τώρα F(x) μία μονοκόρυφη συνάρτηση κατανομής. Ἡ F(x) λέγεται ἰσχυρά μονοκόρυφη ὅταν ἡ συνέλιξη τῆς F(x) μέ κάθε μονοκόρυφη συνάρτηση κατανομῆς H(x) εἶναι ἐπίσης μονοκόρυφη συνάρτηση κατανομῆς. Τό ἑπόμενο θεώρημα ἀναφέρεται σέ χαρακτηριστικές συναρτήσεις τῆς μορφῆς (4) μέ τήν $\varphi_x(u)$ νά ἀνήκει σέ ἰσχυρά μονοκόρυφη κατανομή. Θά κάνουμε χρήση τῶν ἑξῆς προτάσεων.

ΛΗΜΜΑ 1. Ἄν ἡ $\alpha(u)$ εἶναι χαρακτηριστική συνάρτηση μίας (0) μονοκόρυφης κατανομῆς, τότε ἡ $\exp\{-\int_0^u \alpha(y)y\,dy\}$ εἶναι ἄπειρα διαιρετή χαρακτηριστική συνάρτηση.

Ἀπόδειξη. Ἡ $\alpha(u)$ ἔχει τήν μορφή

$$\alpha(u)=\frac{1}{u}\int_0^u \beta(y)\,dy \tag{5}$$

ὅπου $\beta(u)$ εἶναι χαρακτηριστική συνάρτηση. Ἐπειδή

$$\exp(-\int_0^u \alpha(y)y\,dy)=\exp(-\int_0^u\int_0^y \beta(x)\,dx\,dy) \tag{6}$$

ἀπό τό θεώρημα 12.2.8, Lukacs (1970) συνεπάγεται ὅτι ἡ $\exp\{-\int_0^u \alpha(y)y\,dy\}$ εἶναι ἄπειρα διαιρετή χαρακτηριστική συνάρτηση.

ΛΗΜΜΑ 2. Ἄν $\gamma(u)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση μίας κατανομῆς μέ πεπερασμένη δεύτερη ροπή, τότε

$$T_1\gamma(u)=2\left[\gamma(u)-\gamma'(0)u-1\right]/\gamma''(0)u^2 \tag{7}$$

εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση μίας (0) μονοκόρυφης κατανομῆς καί

$$T_2\gamma(u)=2\left[u\gamma'(u)-\gamma(u)+1\right]/\gamma''(0)u^2 \tag{8}$$

εἶναι χαρακτηριστική συνάρτηση.

Ἀπόδειξη, Βλέπε Ἀρτίκης (1979).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Ἔστω $\varphi_x(u)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση μίας ἰσχυράς (0) μονοκόρυφης καί (0) συμμετρικῆς κατανομῆς μέ πεπερασμένη δεύτερη ροπή. Τότε ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\varphi_{Z_N}(u)=\exp\{\lambda(\varphi_x(u)-1)\} \tag{9}$$

ἀναλύεται σέ γινόμενο δύο χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων τῆς μορφῆς (6).

Ἀπόδειξη. Ἀπό τό Λῆμμα 2 καί τίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος συμπεραίνουμε ὅτι ἡ $T_2\varphi_x(u)$ εἶναι χαρακτηριστική συνάρτηση μίας (0) μονοκόρυφης καί (0) συμμετρικῆς κατανομῆς. Ἐπειδή

$$\varphi_{Z_N}(u)=\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\varphi_x''(0)\int_0^u T_1\varphi_x(y)y\,dy\right\}\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\varphi_x''(0)\int_0^u T_2\varphi_x(y)y\,dy\right\}$$

ἀπό τό Λῆμμα 1 συμπεραίνουμε ὅτι ἡ $\varphi_{Z_N}(u)$ ἀναλύεται σέ γινόμενο δύο χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων τῆς μορφῆς (6).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_x(u)=\exp(-u^2)$ ἱκανοποιεῖ τίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος.

Στό ἑπόμενο θεώρημα κάνουμε χρήση τοῦ μετασχηματισμοῦ Girault γιά νά ἀναλύσουμε τήν $\varphi_{Z_N}(u)=\exp\{\lambda(\varphi_x(u)-1)\}$ σέ γινόμενο δύο γενικευμένων χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων τοῦ τύπου Poisson.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Ἔστω $\varphi_x(u)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση μίας (0) μονοκόρυφης συνάρτησης κατανομῆς καί $\varphi_x'(u)$ ἡ παράγωγος τῆς $\varphi_x(u)$. Τότε ἡ $\varphi_{Z_N}(u)=\exp\{\lambda(\varphi_x(u)-1)\}$ ἀναλύεται σέ γινόμενο δύο γενικευμένων χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων τοῦ τύπου Poisson.

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή ἡ $\varphi_x(u)$ εἶναι παραγωγίσιμη χαρακτηριστική συνάρτηση (0) μονοκόρυφης κατανομῆς ἕπεται ὅτι $T_3\varphi_x(u)=\varphi_x(u)+u\varphi_x'(u)$ εἶναι χαρακτηριστική συνάρτηση, Lukacs (1970) θεώρημα 4.5.1. Ἐπίσης

$$\frac{P}{u^p}\int_0^u \varphi_X(y)\,y^{p-1}dy \quad , \quad \frac{P}{u^p}\int_0^u T_3\varphi_X(y)\,y^{p-1}dy$$

ὅπου $P \geq 1$, εἶναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις, Ἀρτίκης (1979). Ἐπειδή

$$\varphi_{Z_N}(u)=\exp\left\{\frac{\lambda(P-1)}{P}\left(\frac{P}{u^p}\int_0^u \varphi_X(y)\,y^{p-1}dy-1\right)\right\}\exp\left\{\frac{\lambda}{P}\left(\frac{P}{u^p}\int_0^u T_3\varphi_X(y)\,y^{p-1}dy-1\right)\right\}$$

ἔπεται ὅτι ἡ $\varphi_{Z_N}(u)$ ἀναλύεται σέ γινόμενο δύο γενικευμένων χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων τοῦ τύπου Poisson.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστω $X_1(t)$, $X_2(t)$ εἶναι ὁμογενεῖς, μέ ἀνεξάρτητες αὐξήσεις καί συνεχεῖς κατά πιθανότητα στοχαστικές διαδικασίες. Ἔστω

$$\exp\left\{\frac{\lambda\tau}{P}\left(\frac{P}{u^p}\int_0^u T_3\varphi_X(y)\,y^{p-1}-1\right)\right\} ,$$

$$\exp\left\{\frac{\lambda\tau(P-1)}{P}\left(\frac{P}{u^p}\int_0^u \varphi_X(y)\,y^{p-1}dy-1\right)\right\}$$

εἶναι οἱ χαρακτηριστικές συναρτήσεις τῶν μεταβλητῶν

$X_1(t+\tau)-X_1(t)$, $X_2(t+\tau)-X_2(t)$. Ἄν $X_1(t)$, $X_2(t)$ εἶναι μεταξύ τους ἀνεξάρτητες τότε ἡ $\varphi_{Z_N}(u)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση τῆς τυχαίας μεταβλητῆς

$$\int_0^u t^{1/p}\,dX_1(t)+\int_0^u t^{1/p}\,dX_2(t)$$

Τό ἑπόμενο θεώρημα ἀναφέρεται στήν ὁριακή κατανομή τυχαίου ἀθροίσματος τυχαίων μεταβλητῶν καί εἶναι συνδυασμός τριῶν γνωστῶν θεωρημάτων.

Θεωροῦμε N_n μία ἀκολουθία τυχαίων διακριτῶν μεταβλητῶν μέ τιμές στό σύνολο $\{1,2,\ldots\}$, καί ἔστω $\{X_{nk}: n=1,2,\ldots;\ k=1,2\ldots n\}$ ἕνας διπλῆς εἰσόδου πίνακας τυχαίων μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων κατά σειρές, μέ $P[|X_{nk}|>\varepsilon]<\varepsilon$ γιά ἀρκετά μεγάλα n καί $\varepsilon>0$. Ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση τῆς X_{nk} δίδεται ἀπό τήν σχέση $\left(\prod_{i=k}^{n} \varphi_i(u/n)\right)^{1/n}$ γιά n=1,2,...; k=1,2...n ὅπου $\varphi_n(u)$ ἀκολουθία πραγματικῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων. Ἐπίσης ὑποθέτουμε ὅτι γιά κάθε n ἡ μεταβλητή N_n εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τίς μεταβλητές $\{X_{nk}\}$ οἱ ὁποῖες θεωροῦνται ἰσόνομες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Ἄν ὑπάρχει μία ἀκολουθία $\{k_n\}$ τέτοια ὥστε

α) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\sum\limits_{k=1}^{k_n} X_{nk} < x\right)=F_1(x)$

β) $\lim P\left(\frac{N_n - k_n}{c_n} < x\right)=F_2(x)$

ὅπου c_n κατάλληλες σταθερές καί $F_1(x)$, $F_2(x)$ συναρτήσεις κατανομῆς

γ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{k_n}=r \quad (0<r<\infty)$

Τότε οἱ κατανομές τῶν ἀθροισμάτων

$$Z_{N_n}=X_{n1}+X_{n2}+\cdots+X_{nN_n}$$

συγκλίνουν στήν κατανομή $F_3(x)$ ὅταν $n\to\infty$. Ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση $f_3(u)$ τῆς $F_3(x)$ δίδεται ἀπό τήν σχέση

$$f_3(u)=\int_0^\infty (f_1(u))^x\, dF_4(x)$$

ὅπου $f_1(u)\in U$ εἶναι χαρακτηριστική συνάρτηση τῆς $F_1(x)$ καί $F_4(x)=F_2(x-1/r)$. Ἡ $F_3(x)$ εἶναι (0) μονοκόρυφη καί (0) συμμετρική.

Ἀπόδειξη. Ἡ σύγκλιση τῆς $\{Z_{N_n}\}$ ἕπεται ἀπό τό θεώρημα 1, Gnedenko καί Fahim (1969), καί ὅτι $f_1(u)\in U$ ἕπεται ἀπό τό θεώρημα 3, O'Connor (1979). Τέλος ὅτι $F_3(x)$ εἶναι (0) μονοκόρυφη καί (0) συμμετρική ἕπεται ἀπό τό θεώρημα 3.1 Medgyessy (1967).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΑΡΤΙΚΗΣ, Θ. (1979) 'Ο Μετασχηματισμός Girault γιά χαρακτηριστικές συναρτήσεις, Μαθηματική 'Επιθεώρηση. Τεῦχος 14 σελ. 17-22.
2. ALF, C. and O' CONNOR, T.A. (1977). Unimodality* of the Levy spectral function. Pacific J. Math. 69, 285-290.
3. FELLER, W. (1966). An introduction to Probability Theory and its Applications 1. Wiley, New York.
4. GNEDENKO, B and FAHIM. G. (1969). On a Transfer Theorem Soviet Math. Dokl. Vol. 10, 769-772.
5. LUKACS, E (1970) Characteristic Functions, 2nd ed. Hafner, New York.
6. MEDGYESSY. P. (1967) On a new class of Unimodal infinitely divisible distribution functions and related topics. Studia Sci. Math. Hungar. 2, 441-446.
7. WOLFE, S (1978) On the Unimodality of infinitely Divisible Distribution functions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 45, 329-335.

SUMMARY

Let $\varphi(u)$ be a characteristic function of a random variable Y with distribution function $F_Y(y)$. The distribution function $F_Y(y)$ is said to be (0) unimodal if $F_Y(y)$ is convex on $(-\infty,0)$ and concave on $(0,\infty)$. For $\lambda > 0$, define $f_\lambda(u)$ by the rule $f_\lambda(u)=\exp\{\lambda(\varphi_Y(u)-1)$. Then $f_\lambda(u)$ is an infinitely divisible characteristic function and its Levy spectral is given by

$$M(y)=\lambda F_Y(y) \quad \text{if} \quad y<0$$
$$=\lambda(F_Y(y)-1) \quad \text{if} \quad y>0$$

The present paper establishes two factorizations for the characteristic function $f_\lambda(u)$.