Author: Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

Title: Οι αριθμοί του STIRLING.

Abstract: Μελέτη συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα αριθμήσιμο σύνολο μέσω της θεωρίας των πεπερασμένων διαφορών.

Creator: HDML

## ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ STIRLING

**Χαρ. Α. Χαραλαμπίδη**
Έντ. Ύφηγητή τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

### 1. Εἰσαγωγικά

Εἶναι ὁπωσδήποτε περισσότερο ἀπό μιά ἁπλή σύμπτωση τό γεγονός τῆς ἁλματώδους ἀναπτύξεως τῆς θεωρίας καί τῶν ἐφαρμογῶν τῆς μαθηματικῆς στατιστικῆς στίς τελευταῖες δεκαετίες καί τῆς ταυτόχρονης ἀνανεώσεως τοῦ ἐνδιαφέροντος στό λογισμό τῶν πεπερασμένων διαφορῶν. Ἀρχίζει ἔτσι νά διαφαίνεται καθαρά ὅτι ὁ λογισμός τῶν πεπερασμένων διαφορῶν καθίσταται τόσο σημαντικό μέσο γιά τή μελέτη τῆς μαθηματικῆς στατιστικῆς ὅσο εἶναι καί ὁ ἀπειροστικός λογισμός.

Μιά ἀπό τίς πιό σημαντικές ἔννοιες τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως εἶναι ἀσφαλῶς ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως. Ἀναφορικά μέ τό πεδίο ὁρισμοῦ μποροῦμε νά διακρίνουμε δύο εἰδῶν συναρτήσεις. Πρῶτον, συναρτήσεις $f(x)$ τῶν ὁποίων ἡ μεταβλητή $x$ εἶναι συνεχής γιά παράδειγμα ἡ $x$ μπορεῖ νά πάρει κάθε δυνατή τιμή σέ ἕνα δεδομένο διάστημα. Τέτοιες συναρτήσεις ἀνήκουν στό πεδίο μελέτης τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ. Δεύτερον, συναρτήσεις $f(x)$ τῶν ὁποίων ἡ μεταβλητή $x$ εἶναι διακριτή γιά παράδειγμα τό πεδίο τιμῶν τῆς $x$ εἶναι τό ἀριθμήσιμο σύνολο $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu\}$. Γιά τή μελέτη τέτοιων συναρτήσεων δέν μποροῦν νά ἐφαρμοσθοῦν οἱ μέθοδοι τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ. Ὁ λογισμός τῶν πεπερασμένων διαφορῶν ἀσχολεῖται εἰδικά μέ τή μελέτη τέτοιων συναρτήσεων ἀλλά μπορεῖ νά ἐφαρμοσθεῖ καί στίς δύο κατηγορίες συναρτήσεων.

Ἕνας ἀπό τούς θεμελιωτές τῆς θεωρίας τῶν πεπερασμένων διαφορῶν εἶναι ὁ Jacob Stirling ὁ ὁποῖος στό βιβλίο του "Methodus Differentialis, Λονδίνο, 1730", εἰσήγαγε καί μελέτησε ἐκτός τῶν ἄλλων καί τούς γνωστούς ἀριθμούς Stirling. Οἱ ἀριθμοί αὐτοί συνδέουν τίς δυνάμεις μιᾶς μεταβλητῆς μέ τά παραγοντικά αὐτῆς καί ἀντίστροφα. Ἐπειδή στό λογισμό τῶν πεπερασμένων διαφορῶν τά παραγοντικά ἔχουν τήν ἴδια ἐξέχουσα θέση πού ἔχουν οἱ δυνάμεις στόν ἀπειροστικό λογισμό οἱ ἀριθμοί αὐτοί ἀποτελοῦν ἕνα μέρος τῆς γέφυρας πού συνδέει τούς δύο αὐτούς λογισμούς. Οἱ ἀριθμοί αὐτοί ἔχουν ἀκόμα πολλές ἐφαρμογές στή συνδυαστική, τή θεωρία πιθανοτήτων καί τή στατιστική.

Τό ἄρθρο αὐτό, εἰσαγωγικό κατά βάση, ἔχει σάν κύριο σκοπό νά δείξει τή χρησιμότητα τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν μέ τίς πολλές καί ποικίλες ἐφαρμογές. Τόν πυρήνα αὐτοῦ ἀποτέλεσαν δύο διαλέξεις τοῦ συγγραφέα στά πλαίσια σεμιναρίου τῆς ἕδρας Λογισμοῦ τῶν Πιθανοτήτων καί Στατιστικῆς. Ὅσα περιλαμβάνονται σ'αὐτό μποροῦν χωρίς ἰδιαίτερη δυσκολία νά διδαχθοῦν σέ προπτυχιακό ἐπίπεδο στά πλαίσια τῶν μαθημάτων συνδυαστικῆς, λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων καί στατιστικῆς.

Γιά τή διευκόλυνση τοῦ ἀναγνώστη ἔχουν προταχθεῖ καί δύο παράγραφοι πού ἀναφέρονται σέ συντομία στούς τελεστές μετατοπίσεως καί διαφορᾶς καί στά παραγοντικά καί γενικευμένα παραγοντικά. Ἔτσι γιά τήν κατανόηση τοῦ ἄρθρου αὐτοῦ ἀπαιτοῦνται στοιχειώδεις μόνο γνώσεις πιθανοτήτων. Ἐκτός ἀπό τίς βασικά πιθανοθεωρητικές ἐφαρμογές ἔχουν περιληφθεῖ καί μερικές ἀπό τό λογισμό τῶν τελεστῶν. Γιά ἄλλες ἰδιότητες καί ἐφαρμογές τῶν ἀριθμῶν Stirling ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νά ἀνατρέξει στή βασική βιβλιογραφία πού δίδεται στό τέλος τοῦ ἄρθρου.

Ἀπό ἐρευνητική ἄποψη σημειώνεται ὅτι ἔχουν μέχρι στιγμῆς δημοσιευθεῖ περισσότερα ἀπό 100 ἄρθρα πού ἀναφέρονται σέ ἰδιότητες, γενικεύσεις καί ἐφαρμογές τῶν ἀριθμῶν Stirling. Ὁ ἐνδιαφερόμενος ἀναγνώστης μπορεῖ νά ἀνατρέξει στά περιοδικά: Annals of Mathematical Statistics (1970 καί παλαιότερα), Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Journal of the Combinatorial Theory, Discrete Mathematics, SIAM Journal on Applied Mathematics, Duke Mathematical Journal, Fibonacci Quarterly, Canadian Mathematical Bulletin καί σέ ἄλλα πού μπορεῖ νά ἐπισημάνει μέ τή βοήθεια τοῦ Mathematical Reviews.

## 2. Οἱ τελεστές μετατοπίσεως καί διαφορᾶς.

Ἄς θεωρήσουμε μιά συνάρτηση $f(x)$ ὁρισμένη τουλάχιστον γιά $x=x_k$, $k=0,1,2,\ldots$, καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $x_{k+1}-x_k=h$, $k=0,1,2,\ldots$ . Στήν περίπτωση αὐτή ὁ τελεστής μετατοπίσεως μέ αὔξηση $h$, συμβολιζόμενος μέ $E_h$, ὁρίζεται ἀπό τή σχέση

$$E_h f(x)=f(x+h) \tag{2.1}$$

ἐνῶ ὁ τελεστής διαφορᾶς μέ αὔξηση $h$, συμβολιζόμενος μέ $\Delta_h$, ἀπό τή σχέση

$$\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x) \tag{2.2}$$

Οἱ δυνάμεις τῶν τελεστῶν αὐτῶν ὁρίζονται κατά τόν συνήθη τρόπο:

$$E_h^{\nu} f(x)=E_h\left[E_h^{\nu-1} f(x)\right]=f(x+\nu h),\ \nu=1,2,\ldots\ ,$$

$$E_h^{-1} f(x)=f(x-h),\ E_h^{-\nu}=f(x-\nu h),\ \nu=1,2,\ldots\ ,$$

$$\Delta_h^{\nu} f(x)=\Delta_h\Delta_h^{\nu-1} f(x)=\Delta_h^{\nu-1} f(x+h)-\Delta_h^{\nu-1} f(x),\ \nu=1,2,\ldots\ .$$

Δέν θά ἀσχοληθοῦμε στή συνέχεια μέ ἀρνητικές δυνάμεις τοῦ τελεστοῦ $\Delta_h$. Σημειώνουμε μόνο ὅτι ὅπως τό $D^{-1} f(x)$, ὅπου $D=\frac{d}{dx}$ εἶναι ὁ τελεστής τῆς παραγώγου, εἶναι τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς $f(x)$ ἔτσι καί τό $\Delta_h^{-1} f(x)$ εἶναι τό ἀόριστο ἄθροισμα αὐτῆς.

Ἄν ἡ αὔξηση $h$ τῆς μεταβλητῆς $x$ εἶναι ἡ μονάδα τότε γράφουμε $E_1\equiv E$ καί $\Delta_1\equiv\Delta$. Ἐπειδή εἶναι πάντοτε δυνατό μέ ἕνα γραμμικό μετασχηματισμό τῆς μεταβλητῆς $x$ γιά παράδειγμα τόν $x=x_0+hy$ νά μεταβάλουμε τόσο τήν ἀρχή (θέση) ὅσο καί τήν κλίμακα μετρήσεως, θά τό κάνουμε γενικά αὐτό ἔτσι ὥστε γιά τή νέα μεταβλητή y νά ἔχουμε αὔξηση h=1 καί μέ αὐτόν τόν τρόπο ἁπλούστερους τύπους. Ὅμως πρέπει νά ἔχουμε ὑπ'ὄψη ὅτι ἡ παράμετρος h πολλές φορές εἰσηγεῖται ἀναπτύγματα καί ἀποτελέσματα πού θά ἀγνοούσαμε μέ τήν ἀπουσία της. Βέβαια εἶναι δυνατό νά τήν ἐπαναφέρουμε μέ τόν ἀντίστροφο μετασχηματισμό $y=(x-x_0)/h$ καί αὐτό θά κάνουμε στίς περιπτώσεις πού ἡ παρουσία της εἶναι χρήσιμη. Μιά τέτοια περίπτωση εἶναι γιά παράδειγμα ἡ ἀκόλουθη: Ἄν συμβολίσουμε μέ D τόν τελεστή τῆς παραγώγου δηλαδή $Df(x)=f'(x)$ τότε ἀπό τόν ὁρισμό τῆς παραγώγου καί τῆς (2.2) ἔχουμε τή σχέση

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h f(x)}{h}=D\,f(x)$$

καί γενικώτερα

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^\nu f(x)}{h^\nu}=D^\nu f(x)\quad,\qquad \nu=1,2,\ldots \tag{2.3}$$

Εὔκολα μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι μέ $c_r$, $r=1,2,\ldots,k$ σταθερούς ἀριθμούς, ἰσχύει ἡ σχέση

$$\Delta^\nu\left(\sum_{r=1}^{k} c_r f_r(x)\right)=\sum_{r=1}^{k} c_r \Delta^\nu f_r(x) \tag{2.4}$$

Ἀπό τίς (2.1) καί (2.2) προκύπτουν οἱ σχέσεις

$$\Delta=E-I\ ,\ E=\Delta+1$$

ὅπου I εἶναι ὁ ταυτοτικός τελεστής δηλαδή $If(x)=f(x)$. Ἑπομένως

$$\Delta^k f(x)=(E-I)^k f(x)=\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}E^r f(x)\,, \tag{2.5}$$

$$E^k f(x)=(\Delta+1)^k f(x)=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\Delta^\nu f(x)\,. \tag{2.6}$$

Χωρίς ἰδιαίτερη δυσκολία μέ τή χρησιμοποίηση τῶν (2.5) καί (2.6) ἀποδεικνύεται ὁ τύπος

$$\Delta^{\nu} f(x)\, g(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \left[\Delta^k f(x)\right] \left[\Delta^{\nu-k} E^k g(x)\right] . \qquad (2.7)$$

πού εἶναι ἀνάλογος τοῦ τύπου τοῦ Leibnitz γιά τίς παραγώγους τοῦ γινομένου δύο συναρτήσεων.

Ὁ ὁρισμός τῶν δυνάμεων τοῦ τελεστοῦ μετατοπίσεως μπορεῖ εὔκολα νά ἐπεκταθεῖ γιά νά καλύψει καί τήν περίπτωση E ὅπου τό y εἶναι πραγματικός ἀριθμός. Πραγματικά ὁρίζουμε

$$E^y f(x) = f(x+y) .$$

Κάτω ἀπό ὁρισμένες συνθῆκες πού ἐξασφαλίζουν τή σύγκλιση τῆς σειρᾶς, ἡ (2.5) ἐπεκτείνεται ὡς ἑξῆς:

$$E^y f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{y}{\nu} \Delta^{\nu} f(x) \qquad (2.9)$$

γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό y.

Ἀπό τό ἀνάπτυγμα κατά Taylor τῆς συναρτήσεως f(x) καί τή (2.1) ἔχουμε

$$E_h f(x) = f(x+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h^{\nu}}{\nu!} D^{\nu} f(x) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h^{\nu}}{\nu!} D^{\nu}\right) f(x) = e^{hD} f(x)$$

καί ἑπομένως

$$E_h = e^{hD} , \quad hD = \log E_h \qquad (2.10)$$

καί

$$\Delta_h = e^{hD} - I \quad , \; hD = \log(\Delta_h + I) . \qquad (2.11)$$

### 3. Παραγοντικά καί γενικευμένα παραγοντικά

Στόν ἀπειροστικό λογισμό μιά ἀπό τίς πιό ἁπλές συναρτήσεις εἶναι ἡ δύναμη πού ἔχει πολύ ἁπλή παράγωγο:

$$Dx^{\nu} = \nu x^{\nu-1}$$

Ἡ διαφορά ὅμως τῆς δυνάμεως δέν εἶναι τό ἴδιο ἁπλή:

$$\Delta x^{\nu} = (x+1)^{\nu} - x^{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{k} x^{\nu} .$$

Ὑπάρχει ὅμως συνάρτηση τοῦ x τῆς ὁποίας ἡ διαφορά εἶναι τό ἴδιο ἁπλή μέ τήν παράγωγο τῆς δυνάμεως. Ἡ συνάρτηση αὐτή συμβολιζομένη μέ $(x)_\nu$ ἤ $x^{(\nu)}$ εἶναι γνωστή σάν π α ρ α γ ο ν τ ι κ ό ν τ ά ξ ε ω ς καί ὁρίζεται γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ἀπό τήν σχέση

$$(x)_\nu = x(x-1)(x-2)\cdots(x-\nu+1), \quad \nu=1,2,\ldots \tag{3.1}$$

Γιά x=r θετικό ἀκέραιο ἡ (3.1) δίδει τόν ἀριθμό τῶν διατάξεων r διακεκριμένων στοιχείων λαμβανομένων ἀνά ν. Ὁ Jacod Stirling πρῶτος ἀναγνώρισε τήν σημασία τῶν παραγοντικῶν ἀλλά ὁ Vandermonde στήν ἐργασία του "Mémoire sur des Irrationneles de différens ordres avec application au cercle"τό 1772 ἦταν ἐκεῖνος πού ἐπέκτεινε τόν ὁρισμό (3.1) γιά ὁποιοδήποτε ἀκέραιο ν. Γιά τό σκοπό αὐτό παρατήρησε ὅτι ἀπό τήν (3.1) μέ ν καί k θετικούς ἀκεραίους καί $\nu > k$ προκύπτει ὅτι

$$(x)_\nu = (x)_k\,(x-k)_{\nu-k} \tag{3.2}$$

Ἡ σχέση αὐτή ἀποτέλεσε τή βάση τῆς ἐπεκτάσεως. Ὑποθέτοντας ὅτι ἡ (3.2) ἰσχύει γιά ὁποιουσδήποτε ἀκεραίους ν καί k καί θέτοντας k=0,

$$(x)_\nu = (x)_0\,(x)_\nu$$

καί ἑπομένως

$$(x)_0 = 1 \tag{3.3}$$

θέτοντας ν=0 στήν (3.2) προκύπτει ἡ σχέση

$$(x)_k\,(x-k)_{-k} = (x)_0 = 1$$

καί ἑπομένως

$$(x)_{-\nu} = \frac{1}{(x+\nu)_\nu} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+\nu)}, \quad \nu=1,2,\ldots \tag{3.4}$$

Οἱ σχέσεις (3.1), (3.3) καί (3.4) ὁρίζουν ἔτσι τό παραγοντικό $(x)_\nu$ γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x καί κάθε ἀκέραιο ν.

Γιά ν θετικό ἀκέραιο ἔχουμε

$$\Delta(x)_\nu = (x+1)_\nu - (x)_\nu = (x+1-x+\nu-1)(x)_{\nu-1} = \nu(x)_{\nu-1}$$

καί έπαγωγικά

$$\Delta^k (x)_\nu = \Delta\Delta^{k-1}(x)_\nu = \Delta(\nu)_{k-1}(x)_{\nu-k+1} = (\nu)_{k-1}\Delta(x)_{\nu-k+1} = (\nu)_{k-1}(\nu-k+1)(x)_{\nu-k}$$
$$= (\nu)_k (x)_{\nu-k}$$

δηλαδή

$$\Delta^k (x)_\nu = (\nu)_k (x)_{\nu-k} \qquad (3.5)$$

πού εἶναι ἀνάλογη τῆς

$$D^k x^\nu = (\nu)_k x^{\nu-k} \qquad (3.6)$$

Γιά τίς διαφορές τῶν παραγοντικῶν ἀρνητικῆς τάξεως ἔχουμε

$$\Delta(x)_{-\nu} = \Delta\frac{1}{(x+\nu)_\nu} = \frac{1}{(x+\nu+1)_\nu} - \frac{1}{(x+\nu)_\nu} = \frac{x+1-x-\nu-1}{(x+\nu+1)_{\nu+1}} =$$
$$= \frac{-\nu}{(x+\nu+1)_{\nu+1}} = (-\nu)(x)_{-\nu-1}$$

καί έπαγωγικά

$$\Delta^k (x)_{-\nu} = (-\nu)_k (x)_{-\nu-k} \qquad (3.7)$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ (3.5) ἰσχύει καί γιά ἀρνητικό ἀκέραιο $\nu$ ὅπως ἀκριβῶς καί ἡ (3.6).

Ὁ ὁρισμός τοῦ παραγοντικοῦ μπορεῖ νά γενικευθεῖ γιά νά καλύψει καί τήν περίπτωση αὐξήσεως h πού δέν εἶναι κατ' ἀνάγκη μονάδα. Τ ό γ ε ν ι κ ε υ μ έ ν ο π α ρ α γ ο ν τ ι κ ό τ ά ξ ε ω ς ν κ α ί α ὐ ξ ή σ ε ω ς h συμβολιζόμενο μέ $(x)_{\nu,h}$ , ὁρίζεται γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ἀπό τίς σχέσεις

$$(x)_{\nu,h} = x(x-h)(x-2h)\cdots(x-\nu h+h),\ \nu=1,2,\ldots,\ (x)_{0,h}=1$$
$$(x)_{-\nu,h} = \frac{1}{(x+\nu h)_{\nu,h}} = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\cdots(x+\nu h)},\ \nu=1,2,\ldots \qquad (3.8)$$

Ἀνάλογα μέ τίς (3.5) καί (3.7) ἀποδεικνύεται ὅτι

$$\Delta_h^k (x)_{\nu,h} = h^k (\nu)_k (x)_{\nu-k,h} \qquad (3.9)$$

γιά κάθε ἀκέραιο ν.

**4. Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ Stirling καὶ ἄλλοι σχετικοὶ ἀριθμοί**

Οἱ ἀριθμοί τοῦ Stirling τοῦ πρώτου εἴδους $s(\nu,k)$, $k=0,1,2,\ldots,\nu$, $\nu=0,1,2,\ldots$, ὁρίζονται ἀπό τή σχέση

$$(x)_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} s(\nu,k)\,x^k \qquad (4.1)$$

Ὁ ὁρισμός αὐτός, ὅπως εὔκολα μπορεῖ νά διαπιστωθεῖ, εἶναι ἰσοδύναμος μέ

$$s(\nu,k)=\frac{1}{k!}\,D^k\,(x)_\nu\Big|_{x=0} \qquad (4.2)$$

Ἀναπτύσσοντας καί τά δύο μέλη τῆς ἀναγωγικῆς σχέσεως γιά τά παραγοντικά:

$$(x)_{\nu+1}=(x-\nu)\,(x)_\nu$$

σέ δυνάμεις τοῦ x σύμφωνα μέ τήν (4.1) ἔχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\nu+1} s(\nu+1,k)\,x^k &= (x-\nu)\sum_{k=0}^{\nu} s(\nu,k)\,x^k\\ &= \sum_{k=0}^{\nu} s(\nu,k)\,x^{k+1} - \sum_{k=0}^{\nu} \nu s(\nu,k)\,x^k\\ &= \sum_{k=1}^{\nu+1} s(\nu,k-1)\,x^k - \sum_{k=0}^{\nu} \nu s(\nu,k)\,x^k\end{aligned}$$

Ἐξισώνοντας τούς συντελεστές τοῦ $x^k$ καί τῶν δύο μελῶν παίρνουμε τήν ἀναγωγική σχέση

$$s(\nu+1,k)=s(\nu,k-1)-\nu s(\nu,k)\,. \qquad (4.3)$$

Οἱ ἀρχικές συνθῆκες εἶναι

$$s(0,0)=1,\ s(\nu,0)=s(0,\nu)=0,\ \nu\neq 0,\ s(\nu,k)=0,\ k>\nu.\ (4.4)$$

Ἀπό τήν (4.1) καί ἐπειδή

$$(-x)_\nu=(-1)^\nu\,x(x+1)(x+2)\cdots(x+\nu-1)$$

προκύπτει ἀμέσως ὅτι $(-1)^{\nu-k}s(\nu,k)$ εἶναι θετικός ἀριθμός. Ἐπιπλέον εἶναι καί ἀκέραιος ὅπως προκύπτει ἀπό τίς (4.3) καί (4.4). Πολλαπλασιάζοντας τήν (4.3) μέ $(-1)^{\nu-k+1}$ παίρνουμε γιά τούς ἀ π ρ ό σ η μ ο υ ς ἀ ρ ι θ μ ο ύ ς τ ο ῦ Stir - l i n g τ ο ῦ π ρ ώ τ ο υ ε ἴ δ ο υ ς $c(\nu,k)=$ $=(-1)^{\nu-k}s(\nu,k)$ τήν ἀναγωγική σχέση

$$c(\nu+1,k)=c(\nu,k-1)+\nu c(\nu,k) \tag{4.5}$$

μέ

$$c(0,0)=1,\ c(\nu,0)=c(0,\nu)=0,\ \nu\neq 0,\ c(\nu,k)=0,\ k>\nu.$$

Ἡ συνάρτηση $(x)_\nu$ ἔχει ρίζες $x_i=i$, $i=0,1,2,\dots,\nu-1$ καί ἑπομένως ὁ ἀριθμός $s(\nu,k)$ πού εἶναι ὁ συντελεστής τοῦ $x^k$ εἶναι ἴσος μέ

$$s(\nu,k)=(-1)^{\nu-k}\sum j_1 j_2 \dots j_{\nu-k} \tag{4.6}$$

ὅπου τό ἄθροισμα ἐκτείνεται σέ κάθε συνδυασμό $\nu-k$ ἀριθμῶν $\{j_1,j_2,\dots,j_{\nu-k}\}$ ἀπό τούς $\{1,2,\dots,\nu-1\}$.

Γιά τόν προσδιορισμό τῆς γεννήτριας

$$f_k(u)=\sum_{\nu=k}^{\infty} s(\nu,k)\frac{u^\nu}{\nu!} \tag{4.7}$$

πολλαπλασιάζουμε τήν (4.3) μέ $\frac{u^\nu}{\nu!}$ καί ἀθροίζουμε γιά ὅλα τά $\nu$. Παίρνουμε τότε τήν ἀναγωγική διαφορική ἐξίσωση:

$$(1+u)\frac{d}{du}f_k(u)=f_{k-1}(u). \tag{4.8}$$

Γιά τήν λύση αὐτῆς θεωροῦμε τήν γεννήτρια

$$F(u,w)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(u)w^k$$

τῆς ἀκολουθίας τῶν συναρτήσεων $f_k(u)$, $k=0,1,2,\dots$, Πολλαπλασιάζουμε μέ $w^k$ καί τά δύο μέλη τῆς (4.8) καί ἀθροίζουμε γιά ὅλα τά $k$. Τότε

$$(1+u)\frac{\partial}{\partial u}F(u,w)=wF(u,w)$$

Ὁλοκληρώνοντας ἔχουμε

$$\log F(u,w)=w\log(1+u)+C(w)$$

ὅπου C(w) προσδιοριστέα συνάρτηση. Ἀλλά

$$F(0,w)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(0)w^k=1$$

ἐπειδή

$$f_0(0)=1\ ,\quad f_k(0)=0\quad \text{γιά}\quad k=1,2,\ldots$$

Συνεπῶς C(w)=0 καί

$$F(u,w)=(1+u)^w=\exp[w\log(1+u)]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}[\log(1+u)]^k w^k.$$

Ἄρα

$$f_k(u)=\sum_{\nu=k}^{\infty} s(\nu,k)\frac{u^\nu}{\nu!}=\frac{1}{k!}[\log(1+u)]^k \qquad (4.9)$$

Οἱ ἀριθμοί τοῦ Stirling τοῦ δευτέρου εἴδους $S(\nu,k)$, $k=0,1,2,\ldots,\nu$, $\nu=0,1,2,\ldots$, ὁρίζονται ἀπό τή σχέση

$$x^\nu=\sum_{k=0}^{\nu} S(\nu,k)(x)_k\ . \qquad (4.10)$$

Ὁ ὁρισμός αὐτός εἶναι ἰσοδύναμος μέ

$$S(\nu,k)=\frac{1}{k!}\Delta^k x^\nu\Big|_{x=0} \qquad (4.11)$$

ὅπως προκύπτει ἀπό τήν (2.9) μέ $f(x)=x^\nu$.
Ἐφαρμόζοντας τήν (4.10) καί στά δύο μέλη τῆς $x^{\nu+1}=xx^\nu$ καί χρησιμοποιώντας τή $x(x)_k=(x)_{k+1}+k(x)_k$ , παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\nu+1} S(\nu+1,k)(x)_k=x\sum_{k=0}^{\nu} S(\nu,k)(x)_k$$
$$=\sum_{k=0}^{\nu} S(\nu,k)(x)_{k+1}+\sum_{k=0}^{\nu} kS(\nu,k)(x)_k$$

καί ἑπομένως

$$S(\nu+1,k)=S(\nu,k-1)+kS(\nu,k) \qquad (4.12)$$

οἱ ἀρχικές συνθῆκες εἶναι

$$S(0,0)=1,\ S(\nu,0)=S(0,\nu)=0,\quad \nu\neq 0,\ S(\nu,k)=0,\ \nu>k. \tag{4.13}$$

Ἡ (4.12) μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ καί μέ τή χρησιμοποίηση τῆς (4.11) καί τῆς (2.7).

Ἀπό τήν (4.12) καί τίς ἀρχικές συνθῆκες (4.13) προκύπτει ὅτι οἱ ἀριθμοί Stirling τοῦ δευτέρου εἴδους $S(\nu,k)$ εἶναι θετικοί ἀκέραιοι.

Θέτοντας στή (2.5) $f(x)=x^{\nu}$ καί χρησιμοποιώντας τήν (4.11) παίρνουμε γιά τούς $S(\nu,k)$ τήν ἔκφραση

$$S(\nu,k)=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}r^{\nu}. \tag{4.14}$$

Ἡ γεννήτρια

$$g_k(u)=\sum_{\nu=k}^{\infty}S(\nu,k)\frac{u^{\nu}}{\nu!} \tag{4.15}$$

μπορεῖ νά προσδιορισθεῖ ἀπό τή λύση τῆς ἀναγωγικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$\frac{d}{du}g_k(u)+kg_k(u)=g_{k-1}(u),\ g_0(0)=1$$

πού προκύπτει ἀπό τήν (4.12). Εὐκολότερα προσδιορίζεται μέ τή χρησιμοποίηση τῆς (4.14). Ἔχουμε

$$g_k(u)=\sum_{\nu=k}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}r^{\nu}\right\}\frac{u^{\nu}}{\nu!}=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(ru)^{\nu}}{\nu!}$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}e^{ru}=\frac{1}{k!}(e^{u}-1)$$

δηλαδή

$$g_k(u)=\sum_{\nu=k}^{\infty}S(\nu,k)\frac{u^{\nu}}{\nu!}=\frac{1}{k!}(e^{u}-1)^{k}. \tag{4.16}$$

Οἱ ἀριθμοί $C(\nu,k,s)$ πού ὁρίζονται ἀπό τήν σχέση

$$(\alpha x)_{\nu}=\sum_{k=0}^{\nu}C(\nu,k,s)(\beta x)_{k},\ s=\alpha/\beta \tag{4.17}$$

συνδέονται μέ τούς ἀριθμούς τοῦ Stirling καί ἔχουν ἐπίσης πολλές ἐφαρμογές στήν συνδυαστική, τή θεωρία πιθανοτήτων καί τή στατιστική (Βλ. [7]).
'Επειδή

$$(\alpha x)_\nu = \alpha^\nu x(x-1/\alpha)(x-2/\alpha)\cdots(x-(\nu-1)/\alpha) = g^{-\nu}\,(x)_{\nu,g}\ ,\quad g=1/\alpha.$$

ἡ (4.17) γράφεται καί στή μορφή

$$(x)_{\nu,g} = \sum_{k=0}^{\nu} g^\nu h^{-k}\, C(\nu,k,s)\,(x)_{\nu,h} \qquad s=h/g \tag{4.18}$$

πού σημαίνει ὅτι οἱ ἀριθμοί $C(\nu,k,s)$ συνδέουν γενικευμένα παραγοντικά μέ διαφορετικές αὐξήσεις.

'Η (4.17) μέ $\beta=1$, $\alpha=s$ γίνεται

$$(sx)_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} C(\nu,k,s)\,(x)_k\ . \tag{4.19}$$

θέτοντας στή (2.9) $f(x)=(sx)_\nu$ παίρνουμε

$$C(\nu,k,s) = \frac{1}{k!}\,\Delta^k\,(sx)_\nu\big|_{x=0} \tag{4.20}$$

'Ανάλογα ἀποδεικνύεται ὅτι

$$C(\nu,k,s) = \frac{g^{-\nu}}{k!}\,\Delta_h^k\,(x)_{\nu,g}\big|_{x=0} \tag{4.21}$$

"Αν στήν ἀναγωγική σχέση

$$(sx)_{\nu+1} = (sx-\nu)\,(sx)_\nu$$

ἀναπτύξουμε τά παραγοντικά $(sx)_{\nu+1}$ καί $(sx)_\nu$ σέ σειρές παραγοντικῶν $(x)_k$ χρησιμοποιώντας τήν (4.19) καί ἐξισώσουμε τούς συντελεστές τῶν $(x)_k$ καί στά δύο μέλη παίρνουμε τήν ἀναγωγική σχέση

$$C(\nu+1,k,s) = (s\nu-k)\,C(\nu,k,s) + sC(\nu,k-1,s)\ . \tag{4.22}$$

Οἱ ἀρχικές συνθῆκες εἶναι

$$C(0,0,0)=1,\quad C(0,k,s)=0,\quad sk\neq 0. \tag{4.23}$$

θέτοντας στή (2.5) $f(x)=(sx)_\nu$ καί χρησιμοποιώντας τήν (4.20) παίρνουμε γιά τούς άριθμούς $C(\nu,k,s)$ τήν έκφραση

$$C(\nu,k,s)=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}(sr)_\nu \tag{4.24}$$

Άπό τήν άναγωγική σχέση (4.22) καί τίς άρχικές συνθήκες (4.21) ή άπό τήν (4.24) προκύπτει ότι γιά $s$ θετικό άκέραιο οί άριθμοί $C(\nu,k,s)$ είναι θετικοί άκέραιοι ένώ γιά $s$ άρνητικό άκέραιο είναι άκέραιοι καί έχουν τό πρόσημο τοῦ $(-1)^{\nu-k}$.

Ἡ γεννήτρια

$$h_{k,s}(u)=\sum_{\nu=k}^{\infty}C(\nu,k,s)\frac{u^\nu}{\nu!} \tag{4.25}$$

μπορεῖ νά προσδιορισθεῖ άπό τή λύση τῆς άναγωγικῆς διαφορικῆς έξισώσεως

$$(1+u)\frac{d}{du}h_{k,s}(u)=skh_{k,s}(u)+sh_{k-1,s}(u),\ h_{k,s}(0)=1.$$

πού προκύπτει άπό τήν (4.22). Εὐκολότερα προσδιορίζεται μέ τή χρησιμοποίηση τῆς (4.14). Ἔχουμε

$$\begin{aligned} h_{k,s}(u)&=\sum_{\nu=k}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}(sr)_\nu\right\}\frac{u^\nu}{\nu!}= \\ &=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{sr}{\nu}u^\nu \\ &=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}(1+u)^{sr}=\frac{1}{k!}\left[(1+u)^s-1\right]^k, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$h_{k,s}(u)=\sum_{\nu=k}^{\infty}C(\nu,k,s)\frac{u^\nu}{\nu!}=\frac{1}{k!}\left[(1+u)^s-1\right]^k. \tag{4.26}$$

Οί άριθμοί $C(\nu,k,s)$ συνδέονται μέ τούς άριθμούς Stirling $s(\nu,r)$ καί $S(r,k)$ μέ τή σχέση

$$C(\nu,k,s)=\sum_{r=k}^{\nu}s(\nu,r)S(r,k)s^r \tag{4.27}$$

πού προκύπτει άπό τήν άνάπτυξη τοῦ $(sx)_\nu$ σέ δυνάμεις τοῦ y=sx μέ τήν χρησιμοποίηση τῆς (4.1) καί στή συνέχεια τήν ἀνάπτυξη τῶν δυνάμεων $x^r$ σέ παραγοντικά μέ τή χρησιμοποίηση τῆς (4.10):

$$(sx)_\nu = \sum_{r=0}^{\nu} s(\nu,r)s^r x^r = \sum_{r=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{r} s(\nu,r)S(r,k)s^r (x)_k$$
$$= \sum_{k=0}^{\nu}\left\{\sum_{r=k}^{\nu} s(\nu,r)S(r,k)s^r\right\}(x)_k$$

καί σύγκριση αὐτῆς μέ τήν (4.19).

Ἀπό τήν (4.27) μέ s=1 καί ἐπειδή $C(\nu,k,1)=\delta_{\nu k}$ παίρνουμε τή σχέση

$$\sum_{r=k}^{\nu} s(\nu,r)S(r,k)=\delta_{\nu k} \qquad (4.28)$$

ἡ ὁποία ἀποδεικνύεται καί χωρίς τή χρησιμοποίηση τῆς (4.27) ὅπως καί ἡ σχέση

$$\sum_{r=k}^{\nu} S(\nu,r)s(r,k)=\delta_{\nu,k} \qquad (4.29)$$

Ἐπειδή $\lim_{s\to 0} s^{-1}\Delta_s=D$, $\lim_{s\to 0} s^{-\nu}(sx)_\nu=x^\nu$ ἔχουμε τίς ὁριακές σχέσεις

$$\lim_{s\to 0} s^{-k}C(\nu,k,s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{k!}(s^{-1}\Delta_s)^k(x)_\nu\big|_{x=0}=\frac{1}{k!}D^k(x)_\nu\big|_{x=0}=s(\nu,k) \qquad (4.30)$$

$$\lim_{s\to\infty} s^{-\nu}C(\nu,k,s)=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{k!}\Delta^k s^{-\nu}(sx)_\nu\big|_{x=0}=\frac{1}{k!}\Delta^k x^\nu\big|_{x=0}=S(\nu,k) \qquad (4.31)$$

Κλείνοντας τήν παράγραφο αὐτή θά προσδιορίσουμε τή γεννήτρια

$$\varphi_k(t)=\sum_{\nu=k}^{\infty} S(\nu,k)t^\nu$$

ἡ ὁποία μετασχηματιζόμενη μᾶς δίδει μιά πολύ χρήσιμη ἐπέκταση τῆς (4.10) καί στή συνέχεια τῆς (4.1). Ἀπό τήν(4.12) ἔχουμε

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} S(\nu,k)t^\nu - t\sum_{\nu=k}^{\infty} S(\nu-1,k-1)t^{\nu-1} - kt\sum_{\nu=k+1}^{\infty} S(\nu-1,k)t^{\nu-1} = 0$$

δηλαδή

$$(1-kt)g_k(t)-tg_{k-1}(t)=0, \quad k=1,2,\ldots$$

Ἐπειδή $g_0(t)=1$,

$$g_k(t)=\frac{t^k}{(1-t)(1-2t)\cdots(1-kt)}=\sum_{\nu=k}^{\infty}S(\nu,k)t^\nu$$

θέτοντας $t=1/y$ παίρνουμε τή σχέση

$$\frac{1}{(y)_{k+1}}=\sum_{\nu=k}^{\infty}S(\nu,k)\frac{1}{y^{\nu+1}} \tag{4.32}$$

πού συγκλίνει γιά $y>k$. Ἡ (4.32) μέ $y=-x$ καί χρησιμοποιώντας τήν (3.4) γράφεται ἀκόμη στή μορφή

$$(x)_{-k}=\sum_{\nu=k}^{\infty}(-1)^{\nu-k}S(\nu,k)x^{-\nu} \tag{4.33}$$

πού ἀποτελεῖ ἐπέκταση τῆς (4.10).

Πολλαπλασιάζοντας τήν (4.33) μέ $(-1)^{j-k}s(j,k)$ καί ἀθροίζοντας γιά ὅλα τά $k=j, j+1, \ldots$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=j}^{\infty}(-1)^{j-k}s(k,j)(x)_{-k} &=\sum_{k=j}^{\infty}\sum_{\nu=k}^{\infty}(-1)^{\nu-j}s(k,j)S(\nu,k)x^{-\nu}\\ &=\sum_{\nu=k}^{\infty}\left\{\sum_{k=j}^{\nu}s(k,j)S(\nu,k)\right\}(-1)^{\nu-j}x^{-\nu}.\end{aligned}$$

καί χρησιμοποιώντας τήν (4.29),

$$x^{-\nu}=\sum_{k=j}^{\infty}(-1)^{j-k}s(k,j)(x)_{-k} \tag{4.34}$$

Ἀνάλογα ἀποδεικνύεται καί ἡ σχέση

$$\frac{1}{(\beta x)_{k+1}}=\sum_{\nu=k}^{\infty}sC(\nu,k,s)\frac{1}{(\alpha x)_{\nu+1}}, \quad s=\alpha/\beta. \tag{4.35}$$

πού μπορεῖ νά γραφεῖ καί στή μορφή

$$(\beta x)_{-k}=\sum_{\nu=k}^{\infty}(-1)^{\nu-k}C(\nu,k,s)(\alpha x)_{-\nu} \tag{4.36}$$

**5. Έφαρμογές**

Στήν παράγραφο αὐτή θά ἐξετάσουμε μερικές ἀπό τίς ἐφαρμογές τῶν ἀριθμῶν Stirling. Γιά τήν κατανόηση αὐτῶν, ἐκτός ἀπό τά ἐκτεθέντα στίς προηγούμενες παραγράφους, ἀπαιτοῦνται στοιχειώδεις μόνο γνώσεις ἀπό τή θεωρία Πιθανοτήτων καί τή Στατιστική.

**5.1. Γενικευμένη διωνυμική κατανομή (τό μοντέλο τοῦ Poisson).**

Γενικεύοντας τό μοντέλο τῶν ἀνεξαρτήτων δοκιμῶν τοῦ Bernoulli ὅπου ἡ πιθανότητα ἐπιτυχίας, $P[\{\epsilon\}]$, εἶναι ἡ ἴδια σέ ὅλες τίς δοκιμές, ὁ Poisson ὑπέθεσε ὅτι στήν j δοκιμή $P[\{\epsilon\}]=p_j$, $j=1,2,\ldots$ . Ἄς θεωρήσουμε μιά ειδική περίπτωση τοῦ μοντέλου αὐτοῦ στήν ὁποία $p_j=\frac{j}{\nu+1}$ , ὅπου ν εἶναι ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν δοκιμῶν. Ἔστω X ὁ ἀριθμός τῶν ἐπιτυχιῶν στίς ν δοκιμές καί $A_j$ τό ἐνδεχόμενο ἐπιτυχίας στήν j δοκιμή. Τότε (θεώρημα Poincaré)

$$P(X=k)=\sum_{r=k}^{\nu}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}S_r$$

ὅπου

$$S_r=\sum P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_r})$$

καί τό ἄθροισμα λαμβάνεται γιά ὅλους τούς $\binom{\nu}{r}$ συνδυασμούς $\{j_1,j_2,\ldots,j_r\}$ τῶν δεικτῶν $\{1,2,\ldots,\nu\}$ ἀνά r. Ἀπό τήν ὑπόθεση τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν δοκιμῶν καί τήν $P(A_j)=p_j=\frac{j}{\nu+1}$ ,ἔχουμε

$$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_r})=p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_r}=\frac{j_1\cdot j_2\cdots j_r}{(\nu+1)^r}$$

Χρησιμοποιώντας καί τή (4.6) παίρνουμε

$$S_r=\frac{1}{(\nu+1)^r}\sum j_1\cdot j_2\cdots j_r=\frac{(-1)^r}{(\nu+1)^r}s(\nu+1,\ \nu-r+1)=$$

$$=\frac{1}{(\nu+1)^r}\ c(\nu+1,\nu-r+1).$$

καί

$$P(X=k)=\sum_{r=k}^{\nu}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\frac{c(\nu+1,\nu-r+1)}{(\nu+1)^r}$$

οἱ παραγοντικές ῥοπές τῆς κατανομῆς αὐτῆς εἶναι

$$E[(X)_s]=\sum_{k=s}^{\nu}(k)_s P(X=k)=s!\sum_{k=s}^{\nu}\sum_{r=k}^{\nu}(-1)^{r-k}\binom{k}{s}\binom{r}{k}\frac{c(\nu+1,\nu-r+1)}{(\nu+1)^r}$$

$$=s!\sum_{r=s}^{\nu}\left\{\sum_{k=s}^{r}(-1)^{r-k}\binom{k}{s}\binom{r}{k}\right\}\frac{c(\nu+1,\nu-r+1)}{(\nu+1)^r}=$$

$$=\frac{s!c(\nu+1,\nu-s+1)}{(\nu+1)^s}$$

ἐπειδή

$$\sum_{k=s}^{r}(-1)^{r-k}\binom{k}{s}\binom{r}{k}=\delta_{rs}\ .$$

## 5.2. Ἀριθμός τῶν κύκλων μιᾶς μεταθέσεως.

Ὅπως εἶναι γνωστό ὑπάρχουν $\nu!$ μεταθέσεις $\nu$ διακεκριμένων στοιχείων. Μιά ὁποιαδήποτε μετάθεση μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο κύκλων ἤ κυκλικῶν μεταθέσεων. Γιά τή γεννήτρια $c_\nu(t)$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεταθέσεων $\nu$ στοιχείων οἱ ὁποῖες ἀναλύονται σέ γινόμενο $k$ κύκλων ἔχουμε (γιά λεπτομέρειες βλ. [7]).

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(t)\frac{u^\nu}{\nu!}=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}t\frac{u^k}{k!}\right)=\exp[t\log(1-u)^{-1}]=(1-u)^{-t}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu(-t)_\nu\frac{u^\nu}{\nu!}$$

δηλαδή

$$c_\nu(t)=(-1)^\nu(-t)_\nu=\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{\nu-k}s(\nu,k)t^k$$

καί ἑπομένως $c(\nu,k)=(-1)^{\nu-k}s(\nu,k)$ εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν μεταθέσεων $\nu$ στοιχείων οἱ ὁποῖες ἀναλύονται σέ γινόμενο $k$ κύκλων.

Ἡ κατανομή μέ συνάρτηση πιθανότητας

$$p_\nu(k)=\frac{c(\nu,k)}{\nu!}\ ,\ k=1,2,\ldots,\nu$$

ἐμφανίζεται στό πρόβλημα τῶν διακυμάνσεων τῶν τυχαίων περι-πάτων.

**5.3. Ἡ k-πλή συνέλιξη τῆς λογαριθμικῆς κατανομῆς.**

Ἡ λογαριθμική κατανομή ἔχει συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X=\nu)=\left[-\log(1-\theta)\right]^{-1}\frac{\theta^{\nu}}{\nu}\,,\quad \nu=1,2,\ldots\,,\quad (\theta>0)$$

καί γεννήτρια

$$f(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}P(X=\nu)t^{\nu}=\left[-\log(1-\theta)\right]^{-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\theta t)^{\nu}}{\nu}=\frac{-\log(1-\theta t)}{-\log(1-\theta)}$$

Ἄν $X_1,X_2,\ldots,X_k$ εἶναι ἀνεξάρτητες καί ἰσόνομες τυχαῖες με-ταβλητές μέ τήν ἴδια λογαριθμική κατανομή, τότε ἡ $Z=X_1+X_2+\cdots+X_k$ ἔχει γεννήτρια

$$f_k(t)=\left[f(t)\right]^k=\left[\frac{\log(1-\theta t)}{\log(1-\theta)}\right]^k$$

Χρησιμοποιώντας τήν (4.9) παίρνουμε

$$f_k(t)=\frac{k!}{\left[-\log(1-\theta)\right]^k}\sum_{\nu=k}^{\infty}(-1)^{\nu-k}s(\nu,k)\frac{\theta^{\nu}}{\nu!}t^{\nu}$$

καί ἐπομένως ἡ συνάρτηση πιθανότητας τῆς Z εἶναι

$$P(Z=\nu)=\frac{k!c(\nu,k)}{\left[-\log(1-\theta)\right]^k}\,\frac{\theta^{\nu}}{\nu!}\,,\quad \nu=k,\ k+1,\ldots$$

ἡ ὁποία καλεῖται k-πλή συνέλιξη τῆς λογαριθμικῆς κατανομῆς.

**5.4. Τό κλασσικό πρόβλημα καταλήψεως.**

Ὑποθέτουμε ὅτι ν διακεκριμένα σφαιρίδια κατανέμονται τυχαία μέσα σέ r διακεκριμένα κελλιά. Ὑπάρχουν $r^{\nu}$ τέτοιες κατανομές (τρόποι τοποθετήσεως) τίς ὁποῖες ὑποθέτουμε ἰσο-πίθανες. Ἐνδιαφερόμαστε γιά τήν πιθανότητα $p(k|\nu,r)$ ὅπως k ἀκριβῶς κελλιά παραμείνουν κενά.

Ἔστω $A_j$ τό ἐνδεχόμενο τό j κελλί νά παραμείνει κενό, $j=1,2,\ldots,r$. Τότε

$$P(A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_i}) = \frac{(r-i)^\nu}{r^\nu}\ , \quad S_i = \sum P(A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_i}) = \binom{r}{i} \frac{(r-i)^\nu}{r}$$

καί

$$p(k|\nu,r) = \sum_{i=k}^{r} (-1)^{i-k} \binom{i}{k}\binom{r}{i} \frac{(r-i)^\nu}{r^\nu}$$

Ἔχουμε ὅμως

$$\binom{i}{k}\binom{r}{i} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{i-k}$$

καί ἐπομένως

$$p(k|\nu,r) = \frac{(r)_{r-k}}{r^\nu} \frac{1}{(r-k)!} \sum_{i=k}^{r} (-1)^{i-k} \binom{r-k}{i-k} (r-i)^\nu$$

$$= \frac{(r)_{r-k}}{r^\nu} \frac{1}{(r-k)!} \sum_{j=0}^{r-k} (-1)^{j} \binom{r-k}{j} (r-k-j)^\nu$$

$$= \frac{(r)_{r-k}}{r^\nu} \frac{1}{(r-k)!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^{r-k-i} \binom{r-k}{i} i^\nu$$

ἤ

$$p(k|\nu,r) = \frac{(r)_{r-k}\, S(\nu,r-k)}{r^\nu}\ , \quad k=0,1,2,\ldots,r.$$

## 5.5. Καταλήψεις μέ περιορισμούς.

Ὑποθέτουμε ὅτι $\nu$ ταυτόσημα σφαιρίδια κατανέμονται τυχαία μέσα σέ $r$ διακεκριμένες ὁμάδες κελλιῶν ἀποτελούμενες ἀπό $s$ διακεκριμένα κελλιά ἡ κάθε μιά. Ὑποθέτουμε ἐπιπλέον ὅτι τά κελλιά εἶναι περιωρισμένης χωρητικότητας καί συγκεκριμένα ὅτι κάθε κελλί μπορεῖ νά χωρέσει ἕνα μόνο σφαιρίδιο. Ἐνδιαφερόμαστε γιά τήν πιθανότητα $p(k|\nu,r,s)$ ὅπως $k$ ἀκριβῶς ὁμάδες κελλιῶν παραμείνουν κενές.

Ἔστω $A_j$ τό ἐνδεχόμενο ἡ $j$ ὁμάδα κελλιῶν νά παραμείνει κενή. Τότε

$$P(A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_i}) = \frac{(sr-si)_\nu}{(sr)_\nu}\ ,$$

$$S_i = \sum P(A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_i}) = \binom{r}{i} \frac{(sr-si)_\nu}{(sr)_\nu}$$

καί

$$p(k\,|\,\nu,r,s)=\sum_{i=k}^{r}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\binom{r}{i}\frac{(sr-si)_\nu}{(sr)_\nu}$$

$$=\frac{(r)_{r-k}}{(sr)_\nu}\;\frac{1}{(r-k)!}\sum_{j=0}^{r-k}(-1)^j\binom{r-k}{j}(sr-sk-sj)_r$$

$$=\frac{(r)_{r-k}}{(sr)_\nu}\;\frac{1}{(r-k)!}\sum_{i=0}^{r-k}(-1)^{r-k-i}\binom{r-k}{i}(si)_r$$

Χρησιμοποιώντας τήν (4.24) παίρνουμε τελικά

$$p(k\,|\,\nu,r,s)\;\frac{(r)_{r-k}C(\nu,r-k,s)}{(sr)_\nu},\quad k=0,1,2,\ldots,r.$$

**5.6. Σχέσεις μεταξύ συνήθων καί παραγοντικών ροπών.**

Ἄς θεωρήσουμε μιά διακριτή τυχαία μεταβλητή X μέ ἀκέραιες τιμές καί ἔστω $p(x)=P(X=x)$, $x=0,1,2,\ldots$ ἡ συνάρτηση πιθανότητας αὐτῆς. Ἡ μέση τιμή μιᾶς συναρτήσεως $g(X)$ δίδεται ἀπό τήν

$$E[g(X)]=\sum_{x=0}^{\infty}g(x)\,p(x)$$

Οἱ $\mu'_\nu=E[X^\nu]$, $\nu=1,2,\ldots$ καλοῦνται συνήθεις ροπές, ἐνῶ οἱ $\mu_{[\nu]}=E[(X)_\nu]$, $\nu=1,2,\ldots$ καλοῦνται παραγοντικές ροπές τῆς X. Ἀπό τή γραμμικότητα τῆς μέσης τιμῆς καί τίς σχέσεις (4.1) καί (4.10) προκύπτουν οἱ σχέσεις

$$E[(X)_\nu]=\sum_{k=0}^{\nu}s(\nu,k)E[X^k],\quad E[X^\nu]=\sum_{k=0}^{\nu}S(\nu,k)E[(X)_k].$$

**5.7. Ἀνάλυση γινομένου πρώτων ἀριθμῶν σέ παράγοντες.**

Ἔστω $\alpha_\nu=\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu$, ὅπου $\beta_i$, $i=1,2,\ldots,\nu$, πρῶτοι ἀριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους καί $A_{\nu,k}$ ὁ ἀριθμός τῶν τρόπων πού ὁ $\alpha_\nu$ ἀναλύεται σέ γινόμενο k παραγόντων. Γιά παράδειγμα γιά $\nu=3$ θά ἔχουμε

$A_{3,1}=1$, δηλαδή $\alpha_3=(\beta_1\beta_2\beta_3)$

$A_{3,2}=3$, $\alpha_3=(\beta_1\beta_2)(\beta_3)$, $\alpha_3=(\beta_2\beta_3)(\beta_1)$, $\alpha_3=(\beta_3\beta_1)(\beta_2)$

$A_{3,3}=1$, $\alpha_3=(\beta_1)(\beta_2)(\beta_3)$.

Γιά νά ὑπολογίσουμε τό $A_{4,3}$ μποροῦμε νά προχωρήσουμε ὡς ἑξῆς:

Πρῶτο προσθέτοντας σάν τρίτο παράγοντα τό $\beta_4$ σέ κάθε μιά ἀπό τίς $A_{3,2}=3$ παραστάσεις

$$\alpha_4=(\beta_1\beta_2)(\beta_3)(\beta_4),\ \alpha_4=(\beta_2\beta_3)(\beta_1)(\beta_4),\ \alpha_4=(\beta_3\beta_1)(\beta_2)(\beta_4).$$

καί δεύτερο πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά κάθε παράγοντα τῆς παραστάσεως $A_{3,3}$ μέ $\beta_4$

$$\alpha_4=(\beta_1\beta_4)(\beta_2)(\beta_3),\ \alpha_4=(\beta_1)(\beta_2\beta_4)(\beta_3),\ \alpha_4=(\beta_1)(\beta_2)(\beta_3\beta_4).$$

Παρατηροῦμε ὅτι

$$A_{4,3}=A_{3,2}+3A_{3,3}$$

Ἡ σχέση αὐτή ἰσχύει γενικά. Πράγματι γιά νά ὑπολογίσουμε τό $A_{\nu,k}$ ξεκινοῦμε ἀπό τά $A_{\nu-1,k-1}$ καί $A_{\nu-1,k}$ καί προσθέτουμε σάν ν-οστό παράγοντα τό $\beta_\nu$ σέ κάθε μιά ἀπό τίς $A_{\nu-1,k-1}$ παραστάσεις τοῦ $\alpha_{\nu-1}$ σέ $k-1$ παράγοντες. Ἀκόμη πολλαπλασιάζουμε διαδοχικά κάθε παράγοντα κάθε μιᾶς ἀπό τίς $A_{\nu-1,k}$ παραστάσεις τοῦ $\alpha_{\nu-1}$ σέ $k$ παράγοντες. Ἐπειδή ἀπό κάθε μιά ἀπό τίς παραστάσεις αὐτές προκύπτουν $k$ παραστάσεις τοῦ $\alpha_\nu$, ἕπεται ἡ ἀναγωγική σχέση

$$A_{\nu,k}=A_{\nu-1,k-1}+kA_{\nu-1,k}$$

Οἱ ἀρχικές συνθῆκες εἶναι $A_{\nu,1}=1$ ἄν $\nu>1$ καί $A_{\nu,1}=0$ ἄν $\nu<0$. Συγκρίνοντας τήν ἀναγωγική αὐτή σχέση μέ τήν (4.12) συμπεραίνουμε ὅτι

$$A_{\nu,k}=S(\nu,k).$$

Τό πρόβλημα αὐτό εἶναι τό ἴδιο μέ ἐκεῖνο τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὑποσυνόλων μέ $k$ στοιχεῖα ἑνός συνόλου $\nu$ στοιχείων.

### 5.8. Παράγωγοι καί διαφορές μιᾶς συναρτήσεως.

Ἀπό τίς (2.11) καί τίς (4.9), (4.16) ἔχουμε

$$h^k D^k=\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{k!}{\nu!}\,s(\nu,k)\,\Delta_h^\nu, \qquad (5.1)$$

$$\Delta_h^k = \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{k!}{\nu!} S(\nu,k) h^\nu D^\nu \tag{5.2}$$

καί ἐπομένως

$$h^k D^k f(x) = \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{k!}{\nu!} s(\nu,k) \Delta_h^\nu f(x),$$

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{k!}{\nu!} S(\omega,k) h^\nu D^\nu f(x)$$

μέ τήν προϋπόθεση ὅτι οἱ σειρές συγκλίνουν.

'Επειδή

$$\Delta_h = E_h - 1 = E_g^s - 1 = (1+\Delta_g)^s - 1, \quad s = h/g$$

ἀπό τήν (4.26) προκύπτει ὅτι

$$\Delta_h^k = \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{k!}{\nu!} C(\nu,k,s) \Delta_g^\nu \tag{5.3}$$

καί ἐπομένως

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{k!}{\nu!} C(\nu,k,s) \Delta_g^\nu f(x)$$

μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ σειρά συγκλίνει.

'Αξίζει νά σημειωθεῖ ὅτι παίρνοντας τά ὅρια στήν (5.3) ὅταν (i) $h \to 0$ καί (ii) $g \to 0$ καί χρησιμοποιώντας τίς (4.30) καί (4.31) παίρνουμε τίς (5.1) καί (5.2) ἀντίστοιχα.

### 5.9. Οἱ τελεστές $\theta = xD$ καί $\Psi = x\Delta$.

Στόν ἀπειροστικό λογισμό συχνά χρησιμοποιεῖται ὁ τελεστής $\theta = xD$. Γιά τήν ἔκφραση τῶν δυνάμεων αὐτοῦ συναρτήσει τοῦ τελεστοῦ τῆς παραγώγου παρατηροῦμε ὅτι

$$\theta^2 = xD(xD) = xD + x^2D^2,$$

$$\theta^3 = xD\theta^2 = xD + 3x^2D + x^3D^3.$$

καί γενικά

$$\theta^\nu = \sum_{k=1}^{\nu} A_{\nu,k} x^k D^k \tag{5.4}$$

ὅπου οἱ συντελεστές $A_\nu$, εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς συναρτήσεως στήν όποία έφαρμόζεται ὁ τελεστής. Ἐπομένως γιά τό προσδιορισμό τους μπορεῖ νά ἐκλεγεῖ ἡ καταλληλότερη συνάρτηση. Μιά τέτοια συνάρτηση εἶναι ἡ $f(x)=x^t$. Ἔχουμε

$$\theta x^t = t x^t \,,\ \theta^\nu x^t = t^\nu x^t \,,\quad D^k x^t = (t)_k\, x^{t-k}$$

καί εἰσάγοντας τίς τιμές αὐτές στήν (5.4) παίρνουμε τή σχέση

$$t^\nu = \sum_{k=1}^{\nu} A_{\nu,k}\,(t)_k$$

ἡ ὁποία συγκρινόμενη μέ τήν (4.10) δίδει

$$A_{\nu,k} = S(\nu,k)$$

Ἄρα

$$\theta^\nu = \sum_{k=1}^{\nu} S(\nu,k)\, x^k D^k \,.$$

πολλαπλασιάζοντας αὐτή μέ $s(r,\nu)$ καί ἀθροίζοντας γιά $\nu=1,2,\ldots,r$ παίρνουμε

$$\sum_{\nu=1}^{r} s(r,\nu)\,\theta^\nu = \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu} s(r,\nu) S(\nu,k)\, x^k D^k$$
$$= \sum_{k=1}^{r}\left\{\sum_{\nu=k}^{r} s(r,\nu) S(\nu,k)\right\} x^k D^k$$

καί λαμβάνοντας ὑπόψη τήν (4.28),

$$D^k = x^{-k}\sum_{\nu=1}^{r} s(r,\nu)\,\theta^\nu \,.$$

Ὁ τελεστής $\Psi = x\Delta$ εἶναι ὁ ἀντίστοιχος τοῦ $\theta$ στό λογισμό τῶν πεπερασμένων διαφορῶν. Γιά τήν ἔκφραση τῶν δυνάμεων αὐτοῦ συναρτήσει τοῦ $\Delta$ παρατηροῦμε ὅτι

$$\Psi^2 = x\Delta(x\Delta) = x\Delta + (x+1)_2\Delta^2$$

$$\Psi^3 = x\Delta\Psi^2 = x\Delta + 3(x+1)_2\Delta^2 + (x+2)_3\Delta^3$$

καί γενικά

$$\Psi^\nu = \sum_{k=1}^{\nu} B_{\nu,k}\,(x+k-1)_k\,\Delta^k$$

όπου οί συντελεστές $B_{\nu,k}$ εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς συναρτήσεως στήν ὁποία ἐφαρμόζεται ὁ τελεστής. Ἔτσι ἐφαρμόζοντας τόν τελεστή $\Psi^{\nu}$ στή συνάρτηση $g(x)=(x+t-1)_t$ καί ἐπειδή

$$\Psi(x+t-1)_t = x\Delta(x+t-1)_t = t(x+t-1)_t \;,\; \Psi^{\nu}(x+t-1)_t = t^{\nu}(x+t-1)_t \;,$$

$$\Delta^{k}(x+t-1)_t = (t)_{\nu}\,(x+t-1)_t$$

παίρνουμε τή σχέση

$$t^{\nu} = \sum_{k=1}^{\nu} B_{\nu,k}(t)_k \;.$$

Ἄρα $B_{\nu,k}=S(\nu,k)$ καί

$$\Psi^{\nu} = \sum_{k=1}^{\nu} S(\nu,k)(x+k-1)_k\,\Delta^{k}$$

Ἀντιστρέφοντας τή σχέση αὐτή παίρνουμε

$$\Delta^{k} = \frac{1}{(x+k-1)_k}\sum_{\nu=1}^{r} s(r,\nu)\;\Psi^{\nu} = (x-1)_{-k}\sum_{\nu=1}^{r} s(r,\nu)\Psi^{\nu} \;.$$

### 5.10. Ὁ τελεστής $\Phi=x^{\beta+1}D$.

Γιά τήν ἔκφραση τῶν δυνάμεων τοῦ τελεστοῦ $\Phi=x^{\beta+1}D$, $\beta$ πραγματικός ἀριθμός, συναρτήσει τοῦ τελεστοῦ τῆς παραγώγου παρατηροῦμε ὅτι

$$\Phi^{2}=x^{\beta+1}D(x^{\beta+1}D)=(\beta+1)x^{2\beta+1}D+x^{2\beta+2}D^{2}$$

$$\Phi^{3}=x^{\beta+1}D(\Phi^{2})=(\beta+1)(2\beta+1)x^{3\beta+1}D+3(\beta+1)x^{3\beta+2}D^{2}+x^{3\beta+3}D^{2}+x^{3\beta+3}D^{3}$$

καί γενικά

$$\Phi^{\nu} = \sum_{k=1}^{\nu} C_{\nu,k}(\beta)\,x^{\nu\beta+k}D^{k}$$

όπου οί συντελεστές $C_{\nu,k}(\beta)$ εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς συναρτήσεως στήν ὁποία ἐφαρμόζεται ὁ τελεστής. Ἔτσι ἐφαρμόζοντας τόν τελεστή στή συνάρτηση $h(x)=x^{t}$ καί ἐπειδή

$$\Phi x^{t} = tx^{t+\beta} \;,\; \Phi^{\nu}x^{t}=t(t+\beta)(t+2\beta)\cdots(t+\nu\beta-\beta)\,x^{t+\nu\beta}$$

$$D^{k}x^{t}=(t)_k\,x^{t-k}$$

παίρνουμε τή σχέση

$$t(t+\beta)(t+2\beta)\cdots(t+\nu\beta-\beta)=\sum_{k=1}^{\nu} C_{\nu,k}(\beta)(t)_k$$

ἡ ὁποία μέ $s=-1/\beta$ γίνεται

$$(st)_\nu=\sum_{k=1}^{\nu} s^\nu C_{\nu,k}(\beta)(t)_k \ .$$

Συγκρίνοντας τή σχέση αὐτή μέ τήν (4.19) συμπεραίνουμε ὅτι

$$C_{\nu,k}(\beta)=s^{-\nu}C(\nu,k,s), \quad s=-1/\beta$$

καί

$$\Phi^\nu=\sum_{k=1}^{\nu} s^{-\nu}C(\nu,k,s)x^{\nu\beta+k}D^k, \quad s=-1/\beta.$$

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


1. W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley, New York, 1968.

2. N.L. Johnson and S. Kotz, Urn Models and Their Applications, John, Wiley, New York, 1977.

3. C. Jordan, Calculus of Finite Differences, Chelsea, New York, 1950.

4. K. Jordan, Chapters on the Classical Calculus of Probability, Akadèmiai Kiadò, Budapest, 1972.

5. J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, John Wiley, New York, 1958.

6. J. Riordan, Combinatorial Identities, John Wiley, New York, 1958.

7. Χ.Α. Χαραλαμπίδη, Εἰσαγωγή στή Συνδυαστική, Ἀθήνα, 1978.