Author: Pene Thom

Title: Μοντέρνα Μαθηματικά. Ένα εκπαιδευτικό και φιλοσοφικό λάθος;

Abstract: Το άρθρο αυτό του Rene Thom αμφισβητεί τις βασικές αρχές των μοντέρνων μαθηματικών τα οποία κατα την αποψή του πριμοδοτούν την Άλγεβρα σε βάρος της Γεωμετρίας. Στο άρθρο του ο Thom συγκεντρώνει ιδιαίτερα τα πυρά της κριτικής του στη σχολή των Bourbaki της οποίας η επιρροή υπήρξε εξαιρετικά μεγάλη.

Creator: HDML

«ΜΟΝΤΕΡΝΑ» ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΝΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΟ ΛΑΘΟΣ.

Rene Thom

Γιά τούς περισσότερους άνθρώπους τῆς έποχῆς μας, αύτό πού όνομάζουμε μοντέρνα μαθηματικά, χαίρει ίδιαίτερης έκτίμησης, κατέχοντας μιά θέση μεταξύ κυβερνητικῆς καί θεωρίας πληροφοριῶν μέσα στό σάκκο μέ τά τρύκσ πού ή άπατηλή δημοσιότητα άναγορεύει σέ ούσία τῆς μοντέρνας τεχνολογίας, σέ άπαραίτητα έργαλεῖα γιά τή μελλοντική άνάπτυξη όλης τῆς έπιστημονικῆς γνώσης. Καί σ'ένα άλλο έπίπεδο άπό τότε πού άρχισε ό έκμοντερνισμός τοῦ σχολικοῦ προγράμματος, έκδηλώθηκε τό ένδιαφέρον πολλῶν γονιῶν πού έβλεπαν ότι δέν είχαν πλέον τήν ίκανότητα νά βοηθήσουν τούς νεαρούς βλαστούς τους. Έπαψαν νά άκοῦν πιά ἔννοιες μέ τίς όποῖες είχαν έξοικειωθεῖ καί τά ἔχουν χαμένα μέ τή νέα όρολογία. Περικοί, συγχυσμένοι, βλέπουν όλη αύτή τή κατάσταση σάν ένα άκόμη σύμπτωμα τοῦ χάσματος τῶν γενεῶν, μέ άποτέλεσμα τήν υίοθέτηση μιᾶς κωλυσιεργοῦς στάσης ἔναντι τῶν νέων ίδεῶν. Άντίθετα, άλλοι καί συγκεκριμένα όσοι άσχολοῦνται μέ τή διδασκαλία ἔχουν δεχθεῖ μέ ένθουσιασμό τό νέο πρόγραμμα, τίς νέες ίδέες καί τό νέο συμβολισμό.

Άλλαγές στό πρόγραμμα. Άς δοῦμε σέ συντομία τίς μεταβολές πού σημειώνονται στό πρόγραμμα:

1. Προστιθέμενη ὕλη: (α) "Στοιχειώδης" συνολοθεωρία, ἡ χρήση τῶν συμβόλων ($\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$), ἀπεικονίσεις ἑνός συνόλου σέ ἕνα ἄλλο καί ποσοδείκτης. Ἡ πιό κτυπητή ἀλλαγή ἔχει νά κάνει μέ τή πανταχοῦ παρουσία τῶν συνόλων, ἀπό τό νηπιαγωγεῖο μέχρι τό τέλος τῆς δευτεροβάθμιας ἐκπαίδευσης. Σ' αὐτό τό σημεῖο θά ἐπιστρέψουμε ἀργότερα.

(β) Ἀνάπτυξη τῶν ἀλγεβρικῶν ἐννοιῶν· νόμοι σύνθεσης πάνω σέ ἕνα σύνολο, ἔννοια τῆς ὁμάδα, τοῦ δακτύλιου, τοῦ σώματος.

(γ) Νωρίτερη εἰσαγωγή τῶν θεμελίων τοῦ διαφορικοῦ καί ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ, τῶν παραγώγων, τοῦ ἀόριστου ὁλοκληρώματος καί τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων (ὅπως λογαριθμικές καί ἐκθετικές).

2. Καταργούμενη ὕλη: Ἡ παραδοσιακή Εὐκλείδια γεωμετρία, ἰδιαίτερα τά δύσκολα σημεῖα τῆς ἐπιπεδομετρίας.

Σέ συντομία, ὁ ἀναγνώστης θά σημειώσει ὅτι τό πρόγραμμα χαρακτηρίζεται ἀπό μία οὐσιώδη προσθήκη ὕλης πού εἰσάγεται στή δευτεροβάθμια ἐκπαίδευση. Ἡ τάση νά δίνουμε ἰδιαίτερη ἔμφαση στήν Ἄλγεβρα σέ βάρος τῆς γεωμετρίας εἶναι ἀκόμη ἐντονώτερη στήν Πανεπιστημιακή διδασκαλία.

Ἄλγεβρα καί Γεωμετρία.

Ἡ κατάργηση τῆς παραδοσιακῆς Εὐκλείδειας γεωμετρίας βασίζεται σέ δύο ἐπιχειρήματα. Τό πρῶτο εἶναι θεωρητικό. Ἡ ἀξιωματική ἐργασία στό Grundlagen der Geometrie τοῦ Hilbert ἔχει δείξει ὅτι ἡ δῆθεν ἀκρίβεια τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδη εἶναι σέ μεγάλο βαθμό ἀπατηλή· διακυβεύεται ἀπό τίς συχνές παραπομπές στή διαίσθηση. Κατά συνέπεια, εἶναι προτιμώτερο νά ἀποφύγουμε τήν Εὐκλείδεια γεωμετρία, ἀναπτύσσοντας τίς ἀλγεβρικές ἰδέες πού ἐπιτρέπουν μιά αὐστηρή παρουσίαση.

Τό δεύτερο ἐπιχείρημα εἶναι πρακτικό: Ἡ κλασσική ἐπιπεδομετρία, μέ τή λεπτομερειακή μελέτη τῶν ἰδιοτήτων τοῦ τριγώνου εἶναι ἄχρηστη καί σχολαστική. Σέ ποιόν κατά τή διάρκεια τῆς ζωῆς του θά χρειαστεῖ ἡ "Εὐθεία τοῦ Simpson" ἤ ὁ "κύκλος τῶν ἐννέα σημείων";

Ἂς σταθοῦμε πρώτα στό ἐπιχείρημα πού σχετίζεται μέ τή χρησιμότητα. Λέγεται ὅτι ἡ ἄλγεβρα εἶναι περισσότερο χρήσιμη καί ἀπαραίτητη ἀπό τή γεωμετρία. Δέν ὑπάρχει καμμιά ἀμφιβολία γιά τή γενική ἐπιστημονική σημασία τῆς γραμμικῆς Ἄλγεβρας ἤ ὁρισμένων ἰδεῶν τῆς πολυγραμμικῆς Ἄλγεβρας. Ὡς πρός τή γενική ἀντιμεταθετική ἄλγεβρα - πολυώνυμα κτλ. - χρειάζεται προσοχή. Στήν καθημερινή ζωή, ποιός χρειάστηκε νά λύσει μιά δευτεροβάθμια ἐξίσωση ἤ τήν ἔννοια τοῦ module πάνω σ' ἕνα δακτύλιο; Τό ἐπιχείρημα γιά τή χρησιμότητα τῆς ἄλγεβρας δέν εἶναι τόσο ἀκαταμάχητο ὅσο φαίνεται. Σχετικά μέ τό διαφορικό καί ὁλοκληρωτικό λογισμό - σημεῖο (γ) πιό πάνω - , εἶναι ἀπαραίτητος γιά τήν ὁποιαδήποτε παρουσίαση τῆς κλασσικῆς φυσικῆς.

Φυσικά σ' ἕνα στοιχειῶδες ἐπίπεδο, ἡ χρησιμοποίηση τῆς ἄλγεβρας ἁπλοποιεῖ ἐξαιρετικά τά πράγματα. Ἡ λύση "μέ τή σκέψη" τῶν προβλημάτων μέ "λόγια", τά ὁποῖα ἀντιμετωπίζει ἕνας δωδεκάχρονος, ἀπαιτεῖ μεγάλη εὐφυΐα, τή στιγμή πού ἡ ἀλγεβρική λύση εἶναι καθαρά μηχανική. Ἐδῶ εἶναι ἀναμφισβήτητη ἡ οἰκονομία σκέψης πού πετυχαίνει ἡ ἄλγεβρα. Ὁπωσδήποτε ὅμως, σέ περισσότερο σύνθετες καταστάσεις τά πλεονεκτήματα τῆς ἄλγεβρας τείνουν νά ἐξαφανιστοῦν. Ὁ Descartes ἐπινόησε τήν ἀναλυτική γεωμετρία μέ σκοπό νά πετύχει τήν ἀναγωγή τῆς γεωμετρίας σέ ἄλγεβρα. Εἶναι ὅμως γνωστό στούς ὑποψηφίους γιά τό Πανεπιστήμιο πού ἔχουν ἑτοιμαστεῖ γιά προχωρημένες σπουδές στά μαθηματικά, ὅτι τά πλεονεκτήματα τῶν ἀναλυτικῶν μεθόδων ἔναντι τῶν γεωμετρικῶν στή περίπτωση πού ἀντιμετωπίζεται ἕνα ποιοτικό θεωρητικό πρόβλημα, ἀπέχουν πολύ ἀπό τό νά θεωρηθοῦν ἀποφασιστικῆς σημασίας.

"Νεωτερισμός". Γιά τούς ἐπαγγελματίες μαθηματικούς, ἡ χρήση τῆς ἄλγεβρας σάν ἐργαλείου ἀπόδειξης ἔχει ἐξαιρετική σημασία καί εἶναι πιθανά οὐσιώδης. Οἱ σύγχρονοι μαθηματικοί, διαποτισμένοι μέ τίς ἰδέες τῶν Bourbaki (1), ἔχουν τή φυσική τάση νά εἰσάγουν στή δευτεροβάθμια καί στή Πανεπιστημιακή διδασκαλία, ἐκεῖνες τῆς ἀλγεβρικές θεωρίες καί δομές πού στάθηκαν χρήσιμες στή δική τους ἐργασία καί κατέχουν μιά ἐ-

ξέχουσα θέση στή μαθηματική σκέψη τοῦ σήμερα. Ἐν τούτοις, μπορεῖ κανείς νά ρωτήσει δικαιολογημένα ἄν θἄπρεπε νά εἰσαχθοῦν στό σχολικό πρόγραμμα οἱ ἀνάγκες τῶν εἰδικῶν καί τά τελευταῖα τους θεωρήματα.

Δέν εἶναι μόνο οἱ μαθηματικοί πού ὑποκύπτουν στόν πειρασμό αὐτό. Ἔχω διαβάσει κείμενα βιολογίας - τόσο γιά ἀρχάριους ὅσο καί γιά προχωρημένους σπουδαστές - ὅπου ἡ διπλή ὀλικά τοῦ DNA τῶν Watson καί Crick καθώς καί ὁ ἀκριβής ἐνζυματικός μηχανισμός τῆς "replication" της, παρουσιάζονται σάν ὁριστικές ἐπιστημονικές ἀλήθειες.

Ἡ εἰσαγωγή νεωτερισμῶν στό πρόγραμμα δέν θἄπρεπε νά γίνει χωρίς μιά κάποια περίοδο ἀναμονῆς. Στή Γαλλία, θἄπρεπε νά στηριχθοῦμε στίς Σχολικές Ἐπιθεωρήσεις γιά τήν ἐξασφάλιση τῆς ἀναγκαίας σταθερότητας στό πρόγραμμα. Ὁπωσδήποτε ὁ φόβος γιά τό ὅτι ἡ ἐπίδειξη γνήσιου σκεπτικισμοῦ θά μποροῦσε νά ἑρμηνευτεῖ σά γεροντική σκλήρυνση, δέν ἐπέτρεψε τήν ἀποτελεσματική λειτουργία αὐτοῦ τοῦ θεσμοῦ.

Στό κάτω-κάτω, τά κείμενα πρέπει νά ἀλλάξουν καί οἱ ἐκδότες πρέπει νά ζήσουν.

Τό πρόβλημα τῆς Γεωμετρίας. Σέ τελευταία ἀνάλυση, τό ἐπιχείρημα σχετικά μέ τή χρησιμότητα τοῦ ὑλικοῦ πού παρουσιάζεται στό πρόγραμμα δέν εἶναι ἴσως τό ἀποφασιστικό. Ἄς ἀγνοήσουμε τήν "κουλτούρα" - "αὐτό πού μένει ὅταν ὅλα τά ἄλλα ξεχνιοῦνται" - σάν ἕνα σημάδι τοῦ παρελθόντος. Μερικοί ἐπιμένουν ἀκόμη στήν ἄποψη ὅτι ἕνας ἀπό τούς στόχους τῆς διδασκαλίας, στή μιά ἤ στήν ἄλλη μορφή, εἶναι ἡ ἐπιλογή, δηλαδή ὁ προσδιορισμός τῶν κλίσεων κάθε μαθητή καί ἡ ἀνάπτυξη τους στό μέγιστο βαθμό, μέ ἰδιαίτερη προσοχή στόν προικισμένο μαθητή. Πιστεύω ὅτι δέν εἶναι δυνατό νά πετύχουμε ἕνα τέτοιο στόχο στά πλαίσια μιᾶς ἐκπαίδευσης πού δέν περιλαμβάνει μερικές τουλάχιστον ἄχρηστες ἀπό τήν ἄποψη τῆς πρακτικῆς ὠφελιμότητας κατευθύνσεις. Γιά νά κρίνουμε πλήρως τίς ἱκανότητες ἑνός μαθητή εἶναι ἀπαραίτητο νά τοῦ δώσουμε ἕνα δραστήριο ρόλο καί νά ἀφυπνίσουμε τό ἐπιχειρηματικό καί πρωτόβουλο του πνεῦμα. Αὐτό δέν εἶναι κατορθωτό μέσα στό πλαίσιο τῶν

"χρήσιμων" σπουδῶν, ὅπου τά στοιχεῖα πού περιλαμβάνονται ἐξαιτίας τῆς τεχνικῆς τους χρησιμότητας διδάσκονται μέ ἕνα δογματικό τρόπο καί ὅπου ἡ μορφωτική ὑπεροχή ὁρίζεται μέ βάση τήν ἀκριβή καί ταχεία ἀπομνημόνευση τοῦ δοσμένου ὑλικοῦ. Μόνο ἐκεῖα τά θέματα πού ἔχουν μιά ποιότητα "παιχνιδιοῦ", ἔχουν ἐκπαιδευτική ἀξία, καί ἀπ'ὅλα αὐτά τά παιχνίδια, ἡ Εὐκλείδεια γεωμετρία μέ τίς συνεχεῖς ἀναφορές σέ θεμελιώδεις, διαισθητικά ἀντιληπτές ἀρχές, εἶναι τό λιγότερο ἀνωφελές καί τό πληθωρικότερο σέ σημασία.

Μέ τά παραπάνω σάν γραμμή πλεύσης, γίνεται ἀντιληπτός ὁ παιδαγωγικά ὁλέθριος χαρακτήρας πού ἐμφανίζει ἡ σύγχρονη τάση ἀντικατάστασης τῆς γεωμετρίας ἀπό τήν ἄλγεβρα. Συνεπῶς ἡ διαδικασία αὐτή πρέπει νά σταματήσει. Ὑπάρχει ἕνας ἁπλός λόγος γι'αὐτό: Ἐνῶ ὑπάρχουν γεωμετρικά προβλήματα, δέν ὑπάρχουν ἀλγεβρικά. Ἕνα πρόβλημα πού καλεῖται ἀλγεβρικό μπορεῖ νά εἶναι μόνο μιά ἁπλή ἄσκηση πού ἀπαιτεῖ τή τυφλή ἐφαρμογή ἀριθμητικῶν κανόνων καί μιᾶς ἤδη καθιερωμένης διαδικασίας. Ἐκτός ἀπό ἐλάχιστες ἐξαιρέσεις, δέν μποροῦμε νά ζητήσουμε ἀπό ἕνα μαθητή νά ἀποδείξει ἕνα ἀλγεβρικό θεώρημα· ἤ ἡ ἀπάντηση θά εἶναι σχεδόν προφανής καί θά προκύπτει μέ μιά κατ'εὐθείαν ἀναφορά στούς ὁρισμούς, ἤ θά ἔχουμε νά κάνουμε μέ πρόβλημα πού ἀνήκει στή θεωρητική ἄλγεβρα, ὁπότε ἡ λύση του ὑπερβαίνει τίς δυνατότητες καί τοῦ πιό πορικισμένου μαθητή. Μέ μιά ἐλαφριά δόση ὑπερβολῆς, μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι στήν ἄλγεβρα τά ζητήματα εἶναι εἴτε τετριμμένα εἴτε ἀπλησίαστα γιά τούς μαθητές. Σέ ἀντιπαράθεση, τά κλασσικά γεωμετρικά προβλήματα παρουσιάζουν μιά πλατιά σειρά προκλήσεων.

Στή γεωμετρία τά προβλήματα ἀπαιτοῦν συνδυασμό χρόνου, προσπάθειας, συγκέντρωσης καί δυνατότητες προσεταιρισμοῦ πού δέν τίς ἔχουν πολλοί μαθητές. Ἴσως ἡ Εὐκλείδεια γεωμετρία, ὅπως ἡ μετάφραση τῶν Λατινικῶν, εἶναι ἕνα ἀπό ἐκεῖνα τά ὑπεροπτικά, πεπαλαιωμένα θέματα πού περιορίζονται σέ μιά ἐλίτ μαθητῶν καί εἶναι ἀσυμβίβαστα μέ τή φιλοσοφία ἑνός ἐκπαιδευτικοῦ συστήματος γιά τίς μάζες. Ἄν ἔτσι ἔχουν τά πράγματα, τότε ἡ ἀπάλειψη τῆς γεωμετρίας ἀπό τό πρόγραμμα γίνεται οὐσιαστικά ἕνα κοινωνιολογικό ζήτημα, τό ὁποῖο δέν ἐπιθυμῶ νά θί-

ξω ἐδῶ. Ἀκόμη, θά ἦταν πελώριο λάθος τό νά ἐλπίζουμε στήν ἀπλοποίηση τῆς μάθησης τῶν μαθηματικῶν μέ τήν ἀντικατάσταση, τῆς γεωμετρίας μέ ἀλγεβρικές δομές, ἄσχετα καί πρόωρα διδαγμένες, χωρίς ἐπαρκή ὑποκίνηση.

Αὐστηρότητα. Ἄς στραφοῦμε τώρα στή κριτική πού γίνεται στήν ἀξιωματική τῶν Στοιχείων, ὅτι εἶναι δῆθεν ἐλαττωματική καί στερεῖται αὐστηρότητας. Πρίν ἀπ' ὅλα μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἀπό καιρό τά βιβλία τῆς γεωμετρίας ἐγκατέλειψαν τή βαρειά, δύσπεπτη ρητορική τοῦ Εὐκλείδη. Μερικοί πίστεψαν στήν ἀντικατάσταση της ἀπό μιά ἀποδεκτή ἀπόδοση τοῦ Grundlagen τοῦ Hilbert. Ὅπως ἀναμένονταν, οἱ ἐλπίδες αὐτές θάφτηκαν ἀπό τή φοβερή περιπλοκή αὐτῆς τῆς ἐργασίας. Δέν μπορεῖ κανείς νά σταθεῖ πάνω σ' αὐτό τό ζήτημα χωρίς νά ἔρθει ἀντιμέτωπος μέ τό φιλοσοφικό ἐρώτημα τοῦ τί εἴδους ἀντίληψη τῆς μαθηματικῆς αὐστηρότητας θάπρεπε νά υἱοθετηθεῖ. Οἱ ἑξῆς τρεῖς στάσεις εἶναι ἐνδεχόμενες:

(1) Ἡ τυπική ἄποψη: Σ' ἕνα τυπικό σύστημα S, μιά πρόταση P εἶναι ἀληθινή ἄν μπορεῖ νά συναχθεῖ ἀπό τά ἀξιώματα τοῦ S μέ πεπερασμένο ἀριθμό ἐπιτρεπτῶν βημάτων μέσα στό σύστημα S.

(2) Ἡ ρεαλιστική καί Πλατωνική ἄποψη: Οἱ μαθηματικές ὀντότητες ὑπάρχουν ἀνεξάρτητα ἀπό τή σκέψη σάν Πλατωνικές ἰδέες. Μία πρόταση P εἶναι ἀληθινή ὅταν ἐκφράζει μιά σχέση πού ὑπάρχει πραγματικά μεταξύ ἰδεῶν, δηλ. ὅταν εἶναι ἰδέα ὑψηλότερης βαθμίδας, ἕνα οἰκοδόμημα ἀπό κατώτερες ἰδέες.

(3) Ἡ ἐμπειρική ἤ κοινωνιολογική ἄποψη: Μία ἀπόδειξη γίνεται δεκτή σάν αὐστηρή, ἄν τυχαίνει τῆς ἐπιδοκιμασίας τῶν κορυφαίων εἰδικῶν τῆς ἐποχῆς.

Ἀπό τίς τρεῖς αὐτές ἀπόψεις, οἱ μαθηματικοί ὑποστηρίζουν σήμερα τή πρώτη. Σέ πρώτη ματιά, αὐτή εἶναι ἡ περισσότερο δελεαστική. Δέν παρουσιάζει τίς ὀντολογικές δυσκολίες τῆς δεύτερης καί δέν εἶναι τόσο ἀσαφής καί αὐθαίρετη ὅσο ἡ τρίτη. Ὁ Bertrand Russel ἔχει πεῖ ὅτι "τά μαθηματικά εἶναι κάτι, στά πλαίσια τοῦ ὁποίου ποτέ δέν ξέρουμε τί εἶναι αὐτό γιά τό ὁποῖο μιλᾶμε, οὔτε ἄν αὐτό πού λέγεται εἶναι ἀληθινό". (2). Δυστυχῶς, ἡ καθαρά τυπική ἄποψη εἶναι δύσκολο νά ὑποστηριχθεῖ.

παραδόξως γιά τυπικούς λόγους. Εἶναι γνωστά τά προβλήματα πού παρουσιάζει ἡ ἀξιωματικοποίηση τῆς Ἀριθμητικῆς καί πού συνδέονται μέ τό θεώρημα τοῦ Gödel. Ὁ καθηγητής Kreisel, σέ πρόσφατο ἄρθρο του στό L'Agede la science (3) ἔθεσε σέ δοκιμασία τή τυπική ἄποψη. Ὅσον ἀφορᾶ ἐμένα, εἶμαι ἱκανοποιημένος μέ τήν ἀκόλουθη διασάφηση: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε καταφέρει νά κατασκευάσουμε μία ἠλεκτρονική μηχανή Μ πού γιά τήν τυπική θεωρία S εἶναι σέ θέση νά ἐκτελεῖ μέ τρομερή ταχύτητα ὅλα τά στοιχειώδη βήματα μέσα στήν S. Θέλουμε νά ἐπαληθεύσουμε τήν ὀρθότητα μιᾶς φόρμουλας F τῆς θεωρίας. Μετά ἀπό μιά διαδικασία μέ συνολικό ἀριθμό 10^{30} στοιχειωδῶν πράξεων πού περατοῦται μέσα σέ λίγα δευτερόλεπτα, ἡ μηχανή Μ μᾶς δίνει θετική ἀπάντηση. Τώρα, ποιός μαθηματικός θά δέχονταν ἀδίστακτα τήν ἐγκυρότητα μιᾶς τέτοιας "ἀπόδειξης" μέ δοσμένη τήν ἀδυναμία ἐπαλήθευσης ὅλων τῶν βημάτων της;

"Σημασία" στά μαθηματικά. Κάθε μαθηματικός πού εἶναι προικισμένος μέ μιά δόση πνευματικῆς ἐντιμότητας, θά ἀναγνωρίσει ὅτι σέ κάθε μιά ἀπό τίς ἀποδείξεις του εἶναι ἱκανός νά δώσει μιά σημασία στά σύμβολα πού χρησιμοποιεῖ. Γιά τό λόγο αὐτό, ἡ ἐργασία του διαφέρει ἀπό ἐκείνη τοῦ θεωρητικοῦ φυσικοῦ, ὁ ὁποῖος πολύ συχνά παραδίνεται στά προτερήματα τοῦ τυφλοῦ φορμαλισμοῦ μέ τήν ἐλπίδα (συχνά ἀπατηλή) ὅτι τό φῶς στό τέλος τοῦ τοῦννελ θά διασκορπίσει τό σκοτάδι πού μεσολαβεῖ.

Ἄν ἀφήσουμε κατά μέρος τόν τυπικό ὁρισμό τῆς αὐστηρότητας, πρέπει ἀναγκαστικά νά ἐπιλέξουμε ἀνάμεσα στίς δύο ὑπολειπόμενες δυνατότητες. Σέ κάθε περίπτωση, οἱ μαθηματικοί θά πρέπει νά ἔχουν τό θάρρος τῶν βαθύτερων πεποιθήσεων τους, ἐπικυρώνοντας ἔτσι τήν ἀνεξάρτητη ὕπαρξη τῶν μαθηματικῶν μορφῶν ἀπό τό μυαλό πού τίς ἐξετάζει. Αὐτή ἡ ὕπαρξη ἀναμφίβολα διαφέρει ἀπό τή συγκεκριμένη ὕπαρξη τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου, συνδέεται ὅμως μ'αὐτή ἔντεχνα καί σέ βάθος. Ἄν τά μαθηματικά εἶναι ἁπλά ἕνα αὐθαίρετο παιχνίδι, τυχαῖο ἀποτέλεσμα διανοητικῆς δραστηριότητας, πῶς μποροῦμε νά ἐξηγήσουμε τήν ἀναμφισβήτητη ἐπιτυχία τους στή περιγραφή τοῦ σύμπαντος; Τά μαθηματικά δέ βρίσκονται μόνο στή μυστηριώδη καθορισμένη τάξη τῶ

φυσικῶν νόμων ἀλλά μ'ἕνα περισσότερο καλυμμένο ἄν καί ἐξί - σου συγκεκριμένο τρόπο, βρίσκονται καί στήν ἀπεριόριστη διαδοχή ἐμψυχων καί ἄψυχων μορφῶν καί στό σχηματισμό καί στή διάλυση τῶν συμμετριῶν τους. Νά γιατί ἡ ὑπόθεση ὅτι οἱ Πλατωνικές ἰδέες δίνουν μορφή στό σύμπαν εἶναι ἡ πιό φυσική καί ἀπό φιλοσοφική ἄποψη, ἡ πιό οἰκονομική.

Ὡστόσο σέ κάθε δοσμένη στιγμή, οἱ μαθηματικοί ἔχουν μιά ἀτελή καί ἀποσπασματική εἰκόνα αὐτοῦ τοῦ κόσμου τῶν ἰδεῶν.Σάν ἀποτέλεσμα, ἡ κάθε ἀπόδειξη ἀποτελεῖ κύρια, ἀποκάλυψη μιᾶς νέας δομῆς, τῆς ὁποίας τά στοιχεῖα βρίσκονται ἀσύνδετα στή διαίσθηση τοῦ ἀνθρώπου μέχρις ὅτου τό λογικό τά συνδυάσει σέ ἕνα ὅλο. Μ'αὐτή τήν ἔννοια ἡ κάθε ἀπόδειξη εἶναι μία Σωκρατική ἐμπειρία πού ἀπαιτεῖ τήν ἀναδημιουργία στόν ἀναγνώστη τῶν ἀπαραίτητων ψυχολογικῶν διεργασιῶν γιά τήν ἀπόσπαση τῆς ὑπονοούμενης ἀλήθειας, τῆς ὁποίας κάτεχε ὅλα τά στοιχεῖα,ἀλλά αὐτή παρέμενε κρυμμένη. Στή βάση αὐτή, ἡ δεύτερη καί ἡ τρίτη ἄποψη δέν μᾶς ἀποκαλύπτεται σέ μιά κίνηση· πρέπει νά τόν ἀναδημιουργοῦμε ἀκατάπαυστα στή συνείδηση μας.

Οἱ ἀντίπαλοι τῆς ὀντολογικῆς ἀποψης θά ἔκαναν καλά νά σκεφτοῦν πάνω στό ἑξῆς: Δέν ἔχει παρουσιαστεῖ περίπτωση στήν Ἱστορία τῶν μαθηματικῶν, πού τό λάθος κάποιου ἀνθρώπου νά ἔχει ρίξει ὅλο τό συγκεκριμένο πεδίο σέ λάθος μονοπάτι. Συχνά, τά μαθηματικά ὁδηγήθηκαν στή τυπική ἀνάπτυξη ἀσήμαντων, χωρίς ἐνδιαφέρον θεωριῶν. Αὐτό ἔχει συμβεῖ στό παρελθόν, συμβαίνει σήμερα καί θά συνεχίσει βέβαια νά συμβαίνει καί στό μέλλον.Ὅμως ποτέ ἕνα σημαντικό λάθος δέν ὁδήγησε σέ κάποιο συμπέρασμα χωρίς νά ἀνακαλυφθεῖ σχεδόν ἀμέσως. Πῶς θά μπορούσαμε νά ἐξηγήσουμε μιά τέτοια κοινή στάση, ἄν αὐτή δέν ἀντιστοιχοῦσε σέ μιά γενική ἀντίληψη, πού προκύπτει σάν ἀποτέλεσμα τῆς πάλης τοῦ μυαλοῦ μέ διαρκεῖς καί καθολικούς περιορισμούς; Μέ αὐτή τήν πίστη στήν ὕπαρξη ἑνός σύμπαντος ἰδεῶν, ὁ μαθηματικός δέ χρειάζεται νά ἀνησυχεῖ ὑπερβολικά γιά τά ὅρια τῆς τυπικῆς διαδικασίας· ὅμοια μπορεῖ νά ξεχάσει τό πρόβλημα τῆς μή ὕπαρξης ἀντινομιῶν μιά καί ὁ κόσμος τῶν ἰδεῶν ξεπερνᾶ ἀπεριόριστα τίς "τεχνικές μας δυνατότητες". Καί ἀκριβῶς στή

διαίσθηση βρίσκεται ὁ ἔσχατος λόγος (ultima ratio) τῆς πί - στης μας στήν ἀλήθεια ἑνός θεωρήματος. Καί σύμφωνα μέ μιά ξεχασμένη σήμερα ἐτυμολογία, ἕνα θεώρημα εἶναι κύρια τό ἀν- τικείμενο ἑνός ὁράματος.

Ὁ καθένας πρέπει νά ἀποφασίζει γιά τόν ἑαυτό του. Δέν ὑπάρχει αὐστηρός ὁρισμός τῆς αὐστηρότητας. Γι'αὐτό θά συμ - φωνήσουμε στό ὅτι κάθε θεώρημα εἶναι αὐστηρό ἄν γίνεται ἀπο- δεκτό ἀπό ὅλους τούς ἀναγνῶστες πού εἶναι ἐπαρκῶς ἐκπαιδευ- μένοι καί προετοιμασμένοι νά τό καταλάβουν. Ἐπιπλέον ἡ ἀπό- δειξη πού ὁδηγεῖ στήν ἀποδοχή προκύπτει ἀπό τήν ὕπαρξη μιᾶς ἀρκετά καθαρῆς ἀντίληψης τοῦ κάθε συμβόλου πού ὑπεισέρχεται, ἔτσι ὥστε ὁ συνδυασμός τους νά πείθει τόν ἀναγνώστη. Ἀπό αὐ- τή τήν ἄποψη, ἡ αὐστηρότητα (ἤ τό ἀντίθετο της, ἡ ἀνακρίβεια) εἶναι οὐσιαστικά μιά τοπική ἰδιότητα τοῦ μαθηματικοῦ συλλο- γισμοῦ. Οὔτε κάποια ἐπεξεργασμένη ἀξιωματική δομή, οὔτε κά- ποια ραφιναρισμένη ἀντιληπτική μηχανή χρειάζεται γιά νά κρί- νει τήν ὀρθότητα μιᾶς συλλογιστικῆς γραμμῆς. Ἀρκεῖ ἁπλά νά ὑπάρχει μιά κατανόηση τῆς σημασίας τῶν ἐμφανιζόμενων συμβό- λων καί μιά καθαρή ἰδέα τοῦ πῶς νά τά συνδυάσουμε.

Ὅρια καί ἀναγκαιότητα τῆς ἀξιωματικοποίησης.

Μιά τέτοια θεώρηση ὑπονοεῖ μιά κάποια ἀπομάκρυνση ἀπό τήν ἀξιωματική. Τυποποίηση μιᾶς θεωρίας σημαίνει, ἀρχίζοντας μέ τό ὑλικό πού παρουσιάζεται ἀπό τή θεωρία πού εἶναι ὀργα- νωμένη ὅπως μία διαισθητική "μορφολογία" T, νά δώσουμε ἕνα τυπικό σύνολο συμβόλων καί κανόνων μέ συνέπεια τή παραγωγή ἑνός τυπικοῦ συστήματος S ἰσόμορφου πρός τή μορφολογία T· ὁ ἰσομορφισμός $S \to T$, εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἀντιστοιχία μέσω τῆς ὁ- ποίας σέ κάθε σύμβολο $s \in S$, ἀντιστοιχίζεται ἡ "σημασία" του, δηλ. τό διαισθητικό του περιεχόμενο στή μορφολογία T (ἡση- μασιολογική του πραγμάτωση θάλεγαν οἱ λογικοί). Μπορεῖ κά- ποιος νά ἐλπίζει βάσιμα ὅτι τό διαισθητικό ὑλικό τῆς θεωρί- ας T εἶναι δυνατό νά καλυφτεῖ πλήρως ἀπό τίς συμβολικές ἐκ- φράσεις τοῦ S; Ἀμέσως ἔρχεται ἕνα παράδειγμα στό μυαλό, ἐ- κεῖνο τῶν φυσικῶν γλωσσῶν. Οἱ γλωσσολόγοι τῆς φορμαλιστικῆς σχολῆς ἔχουν καταβάλει σύντονες προσπάθειες γιά τήν ἀναγωγή

τῆς γραμματικῆς καί τοῦ συντακτικοῦ τῶν φυσικῶν γλωσσῶν σέ άξιώματα. Γιά νά πετύχουν τό σκοπό τους, ἔφτασαν σ'ἕνα ὁρι - σμένο ἀριθμό τυπικῶν διαδικασιῶν - παραγωγικές καί μετασχημα- τιστικές γραμματικές - τῶν ὁποίων ἡ ἐγκυρότητα, στό ἐπίπεδο τῆς τυπικῆς περιγραφῆς τῶν προτάσεων πού περιλαμβάνονται στό σῶμα τοῦ ὑλικοῦ, δέν μπορεῖ νά ἀμφισβητηθεῖ. Ὅμως ἄν αὐτές οἱ διαδικασίες συστηματοποιηθοῦν σέ μιά σειρά κανόνων πού τό λογικό τους συμπέρασμα νά ἐπιδιώκεται μ'ἕνα τυφλό τρόπο, οἱ προκύπτουσες προτάσεις σύντομα γίνονται τόσο μεγάλες καί μπλεγ- μένες ὥστε χάνουν ὅλη τή σημασία τους.

Δέν βλέπω γιατί ἕνα ἀνάλογο φαινόμενο δέν θά μποροῦσε νά συμβεῖ στά μαθηματικά· ἐξωθώντας ἕνα τυπικό μηχανισμό στό ὅριο τῶν παραγωγικῶν του ἱκανοτήτων, γρήγορα συναρμολογοῦμε προτάσεις (formulas) πού εἶναι τόσο μεγάλες καί μπλεγμένες , ὥστε κάθε δυνατότητα διαισθητικῆς ἑρμηνείας ἐξαφανίζεται. Τά "θεωρήματα" πού θά πάρουμε μ'αὐτό τό τρόπο θά εἶναι ἴσως τυ - πικά σωστά, ἀλλά χωρίς σημασιολογικό ἐνδιαφέρον. Ἔτσι, γιά μιά δοσμένη διαισθητική θεωρία T, πρέπει νά ἀναμένουμε περισ- σότερες ἀπό μία "τοπικές" ἀξιωματικοποιήσεις· κάθε τοπική ἀ- ξιωματικοποίηση S ἔχει μιά ζώνη ἐπαφῆς Z_S μέσα στή μορφολο - γία, γιά τήν ὁποία ἡ S εἶναι ἔγκυρη ἀμέσως, μέ τή κατασκευή στά πλαίσια τῆς S μεγάλων ἤ μπλεγμένων προτάσεων (formulas), ἡ σαφήνεια ἐξαφανίζεται. Στά σύνορα τῆς ζώνης Z_S ὁ σημασιο - λογικός δεσμός ἀνάμεσα στήν S καί στή Z_S, σπάζει· αὐτό ἀπαγο- ρεύει τήν ἐπέκταση πέραν τῆς Z_S τοῦ ἰσομορφισμοῦ $S \to T$, πού ὁρίζεται ἀπό τή σημασία.

Ἡ ἰδέα ὅτι μιά θεωρία T θά μποροῦσε νά παραχθεῖ ἀπό ἕνα ἀκριβῶς τυπικό σύστημα S εἶναι a priori, τό ἴδιο ἀπίθανη μέ τήν ἰδέα ὅτι ἡ γῆ θάπρεπε νά εἶναι ἐπίπεδη ἤ μέ τό ὅτι μιά ἐπιφάνεια θά μποροῦσε νά καλυφθεῖ ἀπό ἕνα μοναδικό σύστημα συνισταμένων. Θά ἦταν ἐνδιαφέρον νά ἀντιληφθοῦμε καθαρώτερα αὐτή τή σημασιολογική βλάβη. Πιό κάτω, θά δοῦμε ἕνα χτυπητό παράδειγμα τοῦ τί συμβαίνει ὅταν οἱ κανόνες συνδυασμοῦ δέν συμβιβάζονται μέ τίς σημασιολογικές ἰδιότητες τῶν συμβολιζό- μενων ὀντοτήτων (συγκεκριμένα, ἔχουμε τή τυποποίηση Boole τῆς καθημερινῆς γλώσσας). Στά μαθηματικά, φαίνεται ὅτι μιά τέ-

τοια σημασιολογική βλάβη συμβαίνει μέ ἕνα προσδευτικό, συγκεχυμένο τρόπο (ἡ περίπτωση τῶν "ἀπείρων ἀριθμῶν" στή συνολοθεωρία γιά παράδειγμα).

Τό ἀναμφισβήτητο πλεονέκτημα τῆς τοπικῆς τυποποίησης βρίσκεται συχνά στό ὅτι καθιστᾶ περισσότερο ἀκριβεῖς, ἰδέες πού εἶναι διαισθητικά κατανοητές καί κύρια στό ὅτι ἐπιτρέπει τήν ἐπικοινωνία ἀνάμεσα στούς μαθηματικούς. Καθώς ὅλα τά μέσα ἐπικοινωνίας, προφορικῆς ἤ γραπτῆς, χρησιμοποιοῦν μιά μονοδιάστατη μορφολογία, εἶναι ἀπαραίτητο νά κωδικοποιηθεῖ ἡ διαισθητική μορφολογία T (ἡ ὁποία γενικά ὁρίζεται σ' ἕνα πολυδιάστατο χῶρο) σ'ἕνα τυπικό σύστημα μονοδιάστατων συμβόλων. Κατά τή διάρκεια τῶν τελευταίων τρόπων, ἡ σπουδαιότητα τῆς ἀξιωματικοποίησης σάν ὄργανο συστηματοποίησης καί ἀνακάλυψης ἔχει τονιστεῖ ὑπερβολικά. Σάν μέθοδος συστηματοποίησης, εἶναι βέβαια ἀποτελεσματική· ὅσο γιά τήν ἀνακάλυψη, ὑπάρχουν ἀμφιβολίες. Εἶναι χαρακτηριστικό ὅτι ἡ κολοσσιαία προσπάθεια συστηματοποίησης τοῦ Nicolas Bourbaki (ἡ ὁποία δέν ἀποτελεῖ πραγματική τυποποίηση, διότι ὁ Bourbaki χρησιμοποιεῖ μιά μή τυποποιημένη μεταγλώσσα), δέν ἔφερε στό φῶς κανένα καινούργιο θεώρημα κάποιας σημασίας. Ἀναφερόμενοι οἱ μαθηματικοί στόν Bourbaki, συχνά βρίσκουν περισσότερη πνευματική τροφή στίς ἀσκήσεις του - στίς ὁποῖες ἔχει ἐξοριστεῖ τό συμπαγές ὑλικό - παρά στό συγκεκριμένο παραγωγικό μέρος τοῦ κειμένου. Πρέπει νά τό ποῦμε καθαρά: ἡ ἀξιωματικοποίηση εἶναι δουλειά τῶν εἰδικῶν καί δέν ἔχει θέση στή δευτεροβάθμια ἤ κολλεγιακή διδασκαλία μέ ἐξαίρεση τούς ἐπαγγελματίες πού εἰδικεύονται στή μελέτη τῶν θεμελίων. Νά γιατί οἱ μομφές περί ἀσυνέπειας πού ὁμοξοῦνται κατά τῆς Εὐκλείδειας γεωμετρίας εἶναι ἄσχετες· δέν ἀγγίζουν τήν ἐγκυρότητα τῆς τοπικῆς διαισθητικῆς συλλογιστικῆς.

"Γενετική" σημασία τῆς γεωμετρίας: ἡ συνέχεια προηγεῖται τῆς ἀσυνέχειας. Τά ὅσα εἰπώθηκαν μέχει ἐδῶ, ἀποκαλύπτουν τό κλειδί γιά τήν ἱστορική ἐπιτυχία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδη. Ἡ Εὐκλείδεια γεωμετρία εἶναι τό πρῶτο παράδειγμα μεταγραφῆς μιᾶς διαδικασίας ἀναφερόμενης σέ διδιάστατο ἤ τρι-

διάστατο χῶρο, στή μονοδιάστατη γλώσσα τῆς γραφῆς. Μέσα σ' αὐτή ἡ Εὐκλείδεια γεωμετρία ἐφαρμόζει αὐστηρά καί μέ ἀκρί - βεια, μιά διαδικασία πού εἶναι ἤδη παρούσα στή καθημερινή γλώσσα. Τελικά, ἡ πρωταρχική λειτουργία τῆς καθημερινῆς γλώσ- σας εἶναι ἡ περιγραφή τῶν χωροχρονικῶν διαδικασιῶν πού μᾶς περιβάλλουν καί τῶν ὁποίων ἡ τοπολογία εἶναι ὁλοκάθαρη στή σύνταξη τῶν προτάσεων πού τά περιγράφουν. (4) Στήν Εὐκλεί - δεια γεωμετρία ἔχουμε νά κάνουμε μέ τήν ἴδια λειτουργία τῆς γλώσσας, ὅμως αὐτή τή φορά ἡ ὁμάδα τῶν ἰσοδυναμιῶν πού δρᾶ πάνω στίς μορφές εἶναι μιά ὁμάδα τοῦ Lie, ἡ μετρική ὁμάδα , σέ ἀντίθεση μέ τίς ὁμάδες πού περιγράφουν τήν περισσότερο τοπολογική ἀμεταβλητότητα τῶν "gestalten"* οἱ ὁποῖες μᾶς ἐ- πιτρέπουν νά ἀναγνωρίσουμε ἀντικείμενα τοῦ ἐξωτερικοῦ κό- σμου ὅπως περιγράφονται ἀπό τά ὀνόματα τους στή φυσική γλώσ- σα.

Σάν τέτοια, ἡ γεωμετρία εἶναι ἕνας φυσικός καί πιθανά ἀναντικατάστατος μεσάζοντας ἀνάμεσα στή καθημερινή γλώσσα καί τό μαθηματικό φορμαλισμό, ὅπου κάθε ἀντικείμενο ἀνάγε - ται σέ ἕνα σύμβολο καί ἡ ὁμάδα τῶν ἰσοδυναμιῶν, στή ταυτό - τητα τοῦ γραμμένου συμβόλου μέ τόν ἑαυτό του.Ἀπό τήν ἄποψη αὐτή, τό στάδιο τῆς γεωμετρικῆς σκέψης μπορεῖ νά εἶναι ἀδύ- νατο νά παραλειφθεῖ, στή κανονική ἐξέλιξη τῆς λογικῆς δρα - στηριότητας τοῦ ἀνθρώπου. Κατά τά τελευταία πενήντα χρόνια ἔχει δοθεῖ πολλή ἔμφαση στήν ἐπανακατασκευή τοῦ γεωμετρικοῦ συνεχοῦς ἀπό τούς φυσικούς ἀκέραιους, μέ τή χρησιμοποίηση τῆς θεωρίας τῶν τομῶν τοῦ Dedekind ἤ μέ τή πλήρωση τοῦ σώ - ματος τῶν ρητῶν. Κάτω ἀπό τήν ἐπίδραση ἀξιωματικῶν καί σχο- λαστικῶν παραδόσεων, ὁ ἄνθρωπος διέκρινε στήν ἀσυνέχεια τήν πρώτη μαθηματική ὕπαρξη:

"Ὁ θεός δημιούργησε τούς ἀκέραιους καί τά ὑπόλοιπα εἶ- ναι δουλειά τοῦ ἀνθρώπου". Αὐτό τό ἀπόφθεγμα, εἰπωμένο ἀπό τόν ἀλγεβριστή Kronecker, μᾶς λέει περισσότερα γιά τό παρελ- θόν του σάν τραπεζίτη πού πλούτισε μέ τή νομισματική κερδο- σκοπία παρά γιά τά ὅσα ἔχουν νά κάνουν μέ τή φιλοσοφική του διόραση. Δύσκολα ἀμφιβάλλει κανείς ὅτι ἀπό ψυχολογική καί γιά τό συγγραφέα, ἀπό ὀντολογική ἄποψη, τό γεωμετρικό συνε-

χές εἶναι ἡ ἀρχέγονη ὕπαρξη. Ἂν κάποιος ἔχει κάποια συναίσθηση, εἶναι ἡ συναίσθηση τοῦ χρόνου καί τοῦ χώρου· ἡ γεωμετρική συνέχεια εἶναι κατά κάποιο τρόπο ἀξεχώριστα δεμένη μέ τή συνειδητή σκέψη.

Βαθμιαία, ὁπωσδήποτε, αὐτό τό ἀρχικά ὁμογενές, ὁμορφο συνεχές ἀποκτᾶ μία δομή καί τό σπουδαιότερο δομικό ἐργαλεῖο εἶναι ἡ μετρική ὁμάδα. Αὐτή μόνη μᾶς ἐπιτρέπει τήν εἰσαγωγή τῆς ἀσυνέχειας καί διακεκριμένες πράξεις στό ὁμογενές διάστημα. Πρόκειται φυσικά γιά μιά πολύ ἐκλεπτυσμένη διαδικασία. Ἐδῶ πρέπει νά ποῦμε, ὅτι εἴχαμε ὅλες τίς τοπολογικές ἰδιότητες τοῦ συνεχοῦς, ἀλλά μόνο στούς μοντέρνους καιρούς πέτυχαν τά μαθηματικά τήν ἐπιστροφή στίς πηγές τους γιά νά θεμελιώσουν τή τοπολογία, ἐλευθερώνοντας τόν ἑαυτό τους ἀπό τή κυριαρχία τῆς μετρικῆς ὁμάδας.

Μιά τέτοια θεωρία, μή ἔχοντας οὔτε μετρικό οὔτε ποσοτικό χαρακτήρα, εἶναι κατά βάση ποιοτική καί μπορεῖ νά στηριχθεῖ στό διακεκριμένο συμβολισμό μιᾶς μισοτυποποιημένης γλώσσας. Φυσικά, οἱ τοπολογικές ἀναλλοίωτες, ἔχοντας βαθύτερες ρίζες ἀπό τίς περισσότερο ἐπιφανειακές μετρικές ἀναλλοίωτες, γίνονται δυσκολώτερα κατανοητές. Βασισμένοι σ'αὐτά, μποροῦμε νά καταλάβουμε ὅτι ἡ μετάβαση ἀπό τή καθημερινή σκέψη στή τυποποιημένη, γίνεται μέ ἕνα φυσικό τρόπο μέ τή βοήθεια τοῦ γεωμετρικοῦ σκέπτεσθαι. Ἔτσι ἔχουν τά πράγματα μέχρι σήμερα, καί στό βαθμό πού γίνεται ἀποδεκτός ὁ νόμος τῆς ἀνακεφαλαίωσης τοῦ Haeckel, σύμφωνα μέ τόν ὁποῖο κατά τήν ἐξέλιξη του τό ξεχωριστό ἄτομο περνᾶ ὅλα τά στάδια τοῦ εἴδους, ἔτσι θά πρέπει νά ἐξελίσσεται ἡ λογική σκέψη.

Συνολοθεωρία

Ἔρχομαι τώρα στή συνολοθεωρία. Αὐτή εἶναι ἡ ἀπαραίτητη λιτανεία πού ψάλλουν ὅσοι συνηγοροῦν ὑπέρ τῶν λεγόμενων μοντέρνων μαθηματικῶν. Μερικοί βεβαιώνουν ὅτι ἡ χρήση τῆς συνολοθεωρίας, ἐπιτρέπει τήν ὁλοκληρωτική ἀνακαίνιση τῆς μαθηματικῆς διδασκαλίας καί πώς χάρη σ'αὐτή τήν ἀλλαγή, ὁ μέσος μαθητής θά κυριαρχήσει πάνω στό πρόγραμμα. Δέν ἀξίζει τόν κόπο νά ποῦμε, ὅτι κάτι τέτοιο εἶναι καθαρή ἀπάτη. Ὅσο

τό ζήτημα άφορᾶ στό χειρισμό τῶν προφανῶν περιπτώσεων τῆς ἁπλοϊκῆς συνολοθεωρίας, φυσικά δέν ὑπάρχει πρόβλημα γιά κανένα. Ὅμως ἐδῶ δέν ἔχουμε οὔτε μαθηματικά οὔτε κἄν λογική. Ἀμέσως μόλις ἐμφανίζονται τά πραγματικά μαθηματικά (δηλαδή πραγματικοί ἀριθμοί, γεωμετρία, συναρτήσεις), γίνεται φανερό ὅτι δέν ὑπάρχει βασιλικός δρόμος καί ὅτι μόνο μιά μειοψηφία μαθητῶν εἶναι σέ θέση νά ἀντιληφθεῖ πλήρως τό ὑλικό.

Σέ κάθε περίπτωση, ἡ ἄκρατη αἰσιοδοξία πού δημιούργησε ἡ χρήση τῶν συνολοθεωρητικῶν συμβόλων ἔχει τίς ρίζες της σέ ἕνα φιλοσοφικό λάθος. Ἔγινε πιστευτό ὅτι διδάσκοντας τή χρήση τῶν συμβόλων $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$, θά ἦταν δυνατή ἡ κατανόηση τῶν μηχανισμῶν τῆς λογικῆς καί τῆς συναγωγῆς. Ὁ ἄνθρωπος τοῦ 20ου αἰώνα ἔχει ἀνακαλύψει ἐκ νέου μέ ἐνθουσιασμό τούς συλλογισμούς Darapti καί Celarent πού δίδαξαν οἱ σχολαστικοί τοῦ μεσαίωνα. Ὅμως ἐδῶ τά πράγματα εἶναι χειρότερα! Ὅταν τόν περασμένο αἰώνα ὁ Boole ἔγραψε τή διάσημη φερώνυμη πραγματεία του πάνω στήν ἄλγεβρα δέν δίστασε νά ἐπιγράψει: "Μιά διερεύνηση τῶν νόμων τῆς σκέψης". Ἡ ἀφελής πεποίθηση ὅτι κάθε συναγωγή βρίσκει τό μοντέλο της σέ συνολοθεωρητικούς χειρισμούς, υἱοθετήθηκε ἀπό τέτοιους μοντέρνους φιλόσοφους ὅπως οἱ νεοθετικιστές. Οὔτε ὁ Ἀριστοτέλης, οὔτε οἱ σχολαστικοί τοῦ μεσαίωνα εἶχαν τέτοιες αὐταπάτες.

Σύμφωνα μέ τόν J. Vuillemin (5), ἡ Ἀριστοτελική λογική βασίζεται σέ μιά πλούσια καί σύνθετη ὀντολογία τῆς οὐσίας. Οἱ σύγχρονοι πρωταγωνιστές τῆς συνολοθεωρίας θἄπρεπε νά ἀντιληφθοῦν ὅτι αὐτή ἡ θεωρία δέν προσφέρεται καί γιά τά πιό στοιχειώδη συναγωγικά βήματα τῆς καθημερινῆς σκέψης. Ἐπιτρέψτε μου νά δώσω ἕνα παράδειγμα πάνω σ'αὐτό.

Τά συνδετικά ἤ καί καί. Εἶναι κλασσική ἡ διδασκαλία γιά τό ὅτι τό γραμματικό ἰσοδύναμο τοῦ σύμβολου $\cup$ (ἕνωση) εἶναι τό ἤ καί τοῦ σύμβολου $\cap$ (τομή) εἶναι τό καί. Ἄς ἐφαρμόσουμε αὐτό τόν κανόνα σέ δύο ἁπλές προτάσεις, τῶν ὁποίων τά ὑποκείμενα εἶναι κύρια ὀνόματα:

(1) Ὁ Πέτρος ἤ ὁ Γιάννης ἔρχεται.

(2) Ὁ Πέτρος καί ὁ Γιάννης ἔρχονται.

Η πρώτη πρόταση μπορεῖ νά παραφρασθεῖ"ὁ Πέτρος ἔρχεται ἤ ὁ Γιάννης ἔρχεται".Ἐδῶ ὑπάρχει πλήρης συμφωνία τοῦ σύμ - βόλου ἤ μέ τή λογική ἕνωση U,μέ τόν ὅρο ὅτι τό συνδετικό δέν ἀναφέρεται στό ὑποκείμενο ἀλλά στό ρῆμα "ἔρχομαι".

Η δεύτερη πρόταση μπορεῖ ἐπίσης νά παραφρασθεῖ "ὁ Πέτρος ἔρχεται καί ὁ Γιάννης ἔρχεται". Γίνεται τώρα ἀντιληπτό ὅτι ἡ ἀρχική πρόταση εἶναι ἐλαφρά ἀσαφής, ἐπειδή περιέχει καλυμμένα αὐτό πού οἱ γλωσσολόγοι ὀνομάζουν "προϋποθέσεις". Γιά παράδειγμα, τό "ὁ Πέτρος καί ὁ Γιάννης ἔρχονται" συχνά προϋποθέτει, "ὁ Πέτρος καί ὁ Γιάννης ἔρχονται μαζί".Ἐνῶ ἡ φράση "ὁ Πέτρος ἤ ὁ Γιάννης" σκέτη δέν ἔχει σημασιολογική ἑρμηνεία, στή φράση "ὁ Πέτρος καί ὁ Γιάννης" εἶναι δυνατόν νά συλλάβουμε μιά ὁλότητα σχηματισμένη ἀπό ἕνα ζεῦγος ἀτό - μων, τόν Πέτρο καί τό Γιάννη, οἱ ὁποῖοι στό χῶρο εἶναι μαζί. Αὐτό τό γεγονός ἐξηγεῖ τή διαφορετική μεταχείριση τῶν ρημά- των, στήν (1) καί (2): Τό συνδετικό καί ἀπαιτεῖ πληθυντικό διότι προϋποθέτει μιά ὡρισμένη χωρική γειτνίαση τῶν ὑποκει- μένων.

Ἄς ἐξετάσουμε μερικές προτάσεις ὅπου τά συνδετικά χρη- σιμοποιοῦνται γιά ἰδιότητες.

3)Ὁ Πέτρος εἶναι κουτός ἤ ἔξυπνος.

4)Ὁ Πέτρος εἶναι κουτός καί ἔξυπνος.

5) Τά μαλλιά τῆς Ἰωάννας εἶναι γκρίζα ἤ καστανά.

6) Τά μαλλιά τῆς Ἰωάννας εἶναι γκρίζα καί καστανά.

Οἱ προτάσεις (4) καί (5) εἶναι σημασιολογικά ἀποδεκτές ἐνῶ οἱ (3) καί (6) μπορεῖ νά εἶναι ἀμφίβολες ἤ μή ἀποδεκτές. Μποροῦμε νά περιλάβουμε αὐτές τίς παρατηρήσεις στήν ἀκόλου- θη ἀρχή:

Ἀρχή τοῦ ἀποκλεισμοῦ: Ἄν X καί Y εἶναι δύο ἰδιότητες, οἱ προτάσεις

A εἶναι X ἤ Y δέν μποροῦν νά εἶναι καί οἱ δύο
A εἶναι X καί Y σημασιολογικά ἀποδεκτές.

Ὅταν στό "X ἤ Y" μπορεῖ νά προηγηθεῖ ἕνα ὑποκείμενο,θά λέγαμε ὅτι τό X καί Y ἀνήκουν στό ἴδιο σημασιολσγικό πεδίο γιά παράδειγμα, "γκρίζα" καί "καστανά" στίς προτάσεις (5)

καί (6). Σ'αύτή τή περίπτωση τό "Χ καί Υ" άπό άποψη άρχῆς δέν ἔχει νόημα. Ὑπάρχει, ὁπωσδήποτε, μιά σημαντική ἐξαίρεση, ὅταν ἔχουμε τήν περίπτωση ὅπου τό καί δέν προσδιορίζει λογική τομή, ἀλλά χωρική γειτνίαση. Ἔτσι εἶναι ἀπόλυτα δυνατό νά ποῦμε:

7) Αὐτή ἡ σημαία εἶναι ἄσπρη ἤ γαλάζια.

8) Αὐτή ἡ σημαία εἶναι ἄσπρη καί γαλάζια.

Τό γεγονός ὅτι στήν (8) τό συνδετικό δέν ἔχει τή σημασία τοῦ ∩ ἐξηγεῖ γιατί τό "ἡ σημαία εἶναι ἄσπρη καί γαλάζια" συνεπάγεται ὅτι τό "ἡ σημαία εἶναι ἄσπρη" εἶναι λάθος.

Οἱ ἀπαραίτητες συνθῆκες γιά νά ἔχει νόημα ἡ ἔκφραση "Χ ἤ Υ" εἶναι ἐξαιρετικά περιορισμένες ἔτσι τό "ἡ Ἰωάννα ἔχει κόκκινα ἤ κοκκινόξανθα μαλλιά" εἶναι φανερά περισσότερο ἀποδεκτό ἀπό τό "ἡ Ἰωάννα ἔχει κόκκινα ἤ καστανά μαλλιά" , διότι στή βάση τῆς σημασιολογικῆς κατηγορίας τῶν χρωμάτων τῆς κόμης, τό "κόκκινα" καί τό "κοκκινόξανθα" βρίσκονται πολύ κοντά τό ἕνα στό ἄλλο, κάτι πού δέν συμβαίνει μέ τό "κόκκινα" καί τό "καστανά". Τό συνδετικό ἤ, μιλώντας γεωμετρικά, μειώνει τό κατώφλι ἀνάμεσα στά πεδία ἔλξης πού ὁρίζουν οἱ ἐπιθετικοί προσδιορισμοί "κόκκινα" καί "κοκκινόξανθα". Ὅταν ἡ σημασιολογική ἀπόσταση ἀνάμεσα σέ δύο ἰδιότητες Χ καί Υ εἶναι πολύ μεγάλη, συγκεκριμένα ὅταν αὐτές οἱ ἰδιότητες ἀνήκουν σέ διαφορετικά σημασιολογικά πεδία, ὅπως συμβαίνει μέ μία φυσική καί μία ἠθική ἰδιότητα, τότε ἡ φράση "Χ ἤ Υ" χάνει κάθε σημασία. Ἄν καί εἶναι μᾶλλον προφανές, αὐτό τό γεγονός φαίνεται νά ἔχει ξεφύγει ἀπό τούς συγγραφεῖς πολλῶν συνολοθεωρητικῶν βοηθημάτων. Προσφέρουν στούς μαθητές ἀσκήσεις στήν ἄλγεβρα Boole πού μιλοῦν γιά "κύβους πού εἶναι μεγάλοι ἤ γαλάζιοι" καί γιά "Παριζιάνους πού εἶναι φαλακροί ἤ πλούσιοι". Αὐτές οἱ ἀσκήσεις δέν εἶναι μόνο ἀλλόκοτες καί ἄχρηστες, ἀλλά ἄν γίνουν ἀντικείμενο ἰδιαίτερης ἐπιμονῆς , μποροῦν νά ἀποδειχθοῦν ἐπιζήμιες γιά τή διανοητική ἰσορροπία τοῦ παιδιοῦ. Ἕνας ἀπό τούς θεμελιώδεις περιορισμούς πού ἐπιβάλλει ἡ ἀκριβής σκέψη εἶναι ἡ ἀποφυγή τῆς ἀνάμιξης διακεκριμένων σημασιολογικῶν πεδίων. Αὐτή ἡ ἀνάμιξη ἔχει ἕνα ὄνομα· παραλήρημα. Προσπαθώντας ὁ λογικός νά ἀποδώσει σημα-

σία σύμφωνα μέ τούς κανόνες τοῦ Boole σέ ὅλες τίς φράσεις πού κατασκευάζονται στή καθημερινή γλώσσα, προχωρεῖ σέ μιά φανταστική, παραληρούσα ἐπανακατασκευή τοῦ σύμπαντος.

Ὅλα αὐτά δείχνουν τά στενά ὅρια τῆς συνολοθεωρίας στή περιγραφή τῆς καθημερινῆς σκέψης. Τό καθημερινό σκέπτεσθαι ἐνεργοποιεῖ βαθεῖς ψυχικούς μηχανισμούς, τέτοιους ὅπως ἡ ἀναλογία, οἱ ὁποῖοι δέν μποροῦν νά ἀναχθοῦν σέ συνολοθεωρητικές πράξεις. Ἕνας σπουδαῖος παράγοντας σέ τέτοιες περιπτώσεις εἶναι ὁ ὀργανωσιακός ἰσομορφισμός ἀνάμεσα σέ σημασιολογικά πεδία, ὁμολογικά συνδεδεμένα.

Στή πραγματικότητα, οἱ σχηματοποιήσεις τοῦ Boole σπάνια ἐφαρμόζονται ἀψεγάδιαστα μέ ἐξαίρεση περιπτώσεις πού περιγράφονται ἀπό χωρικές ἐγκλείσεις ὑποσυνόλων στό χῶρο, ὅπως συμβαίνει μέ τή χρησιμοποίηση διαγραμμάτων τοῦ Venn. Σέ μιά τέτοια περίπτωση, κανένας δέν μπαίνει στόν κόπο νά τοποθετήσει τό σκέπτεσθαι σέ μιά συλλογιστική φόρμα. Ἡ ἁλεπού ξέρει ὅτι ἄν οἱ κότες εἶναι στό κοτέτσι καί τό κοτέτσι στήν αὐλή, τότε οἱ κότες εἶναι στήν αὐλή καί δέ σκοτίζεται γιά τή συνολοθεωρία. Ὁ καθένας χρησιμοποιεῖ τή συνολοθεωρία ἀπό τή στιγμή πού ὑπάρχει, ἀκριβῶς ὅπως ὁ M. Jourdain στό ἔργο τοῦ Molière, "Le Bourgeois Gentilhomme" χρησιμοποιεῖ πρόζα χωρίς νά τό γνωρίζει. Μερικοί λένε ὅτι εἶναι καλύτερα νά τή χρησιμοποιεῖς γνωρίζοντας. Τό πλεονέκτημα ἐδῶ, ἄν ὑπάρχει καθόλου, πάει στή ρητορική. Βρίσκεται μόνο στό βαθμό πού ἡ τεχνική τῆς μαθηματικῆς ἀπόδειξης εἶναι ἕνα εἶδος ρητορικῆς, ἔτσι πού νά ἀξίζει τό κόπο νά συνεχίσουμε μέ τοπικές τυποποιήσεις - οἱ ὁποῖες εἶναι στήν πραγματικότητα τοπικές χωρικοποιήσεις - καί νά ἐφαρμόσουμε τό συνολοθεωρητικό φορμαλισμό σ'αὐτές. Ἡ πειστική δύναμη τοῦ λογικοῦ σχήματος εἶναι συνέπεια τῶν χωρικῶν ἐγκλείστων καί ὄχι ἀντίστροφα. Αὐτό μᾶς λέει ὅτι ἡ λογική καλλιεργημένη σκέψη θά πρέπει νά ὁδηγεῖ στή συνολοθεωρία.

Στήν ἁπλή της, συγκεκριμένη μορφή, θάπρεπε νά εἰσαχθεῖ στό νηπιαγωγεῖο. Στά πρῶτα χρόνια, τοῦ δευτεροβάθμιου σχολείου, οἱ μαθητές θά πρέπει νά μάθουν τή χρήση τῶν συμβόλων $\in$, $\cap$, $\cup$, $\subset$, ἀργότερα θά πρέπει νά εἰσαχθοῦν οἱ ποσοδείκτες

καί τά πράγματα νά σταματήσουν ἐκεῖ.

Δέν εἶναι βέβαιο ὅτι, ἀκόμη καί στά καθαρά μαθηματικά, κάθε παραγωγή μπορεῖ νά ἔχει ἕνα συνολοθεωρητικό μοντέλο . Παράδοξα πού ἔχουν τύχει φτωχῆς ἀνάλυσης καί πού ὑπονομεύουν τή τυπική συνολοθεωρία, ὑπάρχουν γιά νά θυμίζουν στό μαθη - ματικό τούς κινδύνους πού ἐγκυμονεῖ ἡ ἄκριτη χρήση αὐτῶν τῶν φαινομενικά ἀθῶων συμβόλων. Ἴσως, ἀκόμη καί στά μαθηματικά, ἡ ποιότητα ὑπάρχει καί ἀντιστέκεται στή καθολική ἀναγωγή σέ σύνολα. Ἡ παλιά ἐλπίδα τοῦ Bourbaki νά δεῖ τίς μαθηματικές δομές νά προβάλλουν μέ φυσικό τρόπο ἀπό μιά ἱεραρχία συνό - λων, ἀπό τά ὑποσύνολα τους καί ἀπό τό συνδυασμό τους, ἀπο - δεικνύεται φρούδα. Κανένας δέν μπορεῖ νά ἀποφύγει λογικά τήν ἐντύπωση ὅτι οἱ σπουδαιότερες μαθηματικές δομές (ἀλγεβρικές, τοπολογικές) ἐμφανίζονται σάν βασικές πληροφορίες πού τίς ἐπιβάλλει ὁ ἐξωτερικός κόσμος, καί ὅτι ἡ ἔξω ἀπό κάθε μέτρο ποικιλία τους βρίσκει τή μόνη της δικαιολόγηση στήν πραγμα - τικότητα.

*gestalt-en: Ἐπιστημολογικός ὅρος. Σημαίνει τίς μορφές πού ἄν τίς δοῦμε ἀπό διαφορετική πλευρά μᾶς δίνουν τήν ἐντύ - πωση διαφορετικοῦ ἀντικειμένου.

Ἀναφορές καί ὑποσημειώσεις.

1. Nicolas Bourbaki: Εἶναι τό ψευδώνυμο πού υἱοθέτησε στά 1930 μιά ὁμάδα ἐξεχόντων νέων Γάλλων μαθηματικῶν, οἱ ὁποῖοι ἔθεσαν τό μνημειώδη στόχο τῆς ἀναδιοργάνωσης τῶν μαθηματικῶν στή βάση θεμελιωδῶν δομικῶν συστα - τικῶν. Αὐτή ἡ προσπάθεια βρίσκεται σέ ἐξέλιξη. Τά μέλη τῆς ὁμάδας πρέπει νά ἀποχωροῦν στά πενήντα τους σύμφωνα μέ τό καταστατικό τοῦ Bourbaki.

2. Bertrand Russel, quoted in A. Hooper, 1948. Makers of Mathematics. N.Y.: Random House, p. 384.

3. G. Kreisel. 1970. The formalist-positivist doctrine of mathematical precision in the light of experience.. L'Age de la science 3: 17-46.

4. R. Thom. 1970. Topologie et linguistique. In Essays on Topology and Related Topics, André Haefliger and Raghavan Navasimham, eds. (Mémoires dédiés à Georges de Rham). New York: Springer-Verlag. p.p. 226-48.

5. J. Vuillemin. 1967. De la logique à la théologie, Paris: Flammarion.