Author: Jean A. Dieudonne

Title: Πρέπει να διδάσκουμε Μοντέρνα Μαθηματικά;

Abstract: Το άρθρο αυτό αντιμετωπίζει τα τρία ερωτήματα που θέτει ο Rene Thom. 1) Αυστηρότητα και Αξιωματικοποίηση. 2) Τη διδασκαλία των μαθηματικών στα Πανεπιστήμια. 3) Τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο.

Creator: HDML

ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΔΙΔΑΣΚΟΥΜΕ «ΜΟΝΤΕΡΝΑ» ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ;

Τοῦ Jean A. Dieudonne

Μετάφραση Θ. Τζουβάρας

Μιά καταφατική ἀπάντηση ἀπό ἕναν ἀπ'τούς ἱδρυτές τῆς ὁμάδας Bourbaki γιά τίς ἀρχές πού διέπουν τά νέα προγράμματα μαθηματικῶν στά σχολεῖα.

Σημείωμα τοῦ Ἐκδότη: Τό ἄρθρο τοῦ René Thom, "Μοντέρνα Μαθηματικά : ἕνα Ἐκπαιδευτικό καί Φιλοσοφικό Λάθος;" στό τεῦχος τοῦ American Scientist τοῦ Νοεμβρίου 1971 προσέλκυσε πλατιά τό ἐνδιαφέρον τῶν μαθηματικῶν, κυρίως ἐπειδή ἀμφισβητεῖ τίς βασικές ἀρχές τῶν "μοντέρνων" μαθηματικῶν τά ὁποῖα, κατά τήν ἄποψή του, πριμοδοτοῦν τήν ἄλγεβρα σέ βάρος τῆς γεωμετρίας. Στό ἄρθρο του ὁ Thom συγκεντρώνει ἰδιαίτερα τά πυρά τῆς κριτικῆς του στή σχολή τῶν Bourbaki τῆς ὁποίας ἡ ἐπιρροή ὑπῆρξε ἐξαιρετικά μεγάλη. Οἱ ἀναγνῶστες μας θά θυμοῦνται ὅτι "Bourbaki" εἶναι τό συγγραφικό ψευδώνυμο μιᾶς ὁμάδας Γάλλων , κυρίως, μαθηματικῶν πού ἔχουν ἀναλάβει, ἀπό τό 1930, νά παρουσιάσουν ὅλα τά μαθηματικά μ'ἕναν ἑνοποιημένο ἀξιωματικό τρόπο. Γιά νά ὑπάρξει ἀντίλογος στίς ἀπόψεις τοῦ καθηγητῆ Thom, ἡ Συντακτική Ἐπιτροπή κάλεσε τόν Jean A. Dieudonné,ἐ-

---

*Μετάφραση ἀπ'τό περιοδικό American Scientist. Vol.61(1)(1973) 16-19.

ναν άπ'τούς ίδρυτές τῶν Bourbaki, νά άπαντήσει στό άρθρο τοῦ Thom.'Ο καθηγητής Dieudonné ὑπῆρξε γιά πολλά χρόνια ἐπισκέπτης καθηγητής σέ πανεπιστήμια ὅλου τοῦ κόσμου καί γνωρίζει πῶς διδάσκονται τά μαθηματικά τόσο στίς ΗΠΑ ὅσο καί στήν Εὐρώπη.

'Ο René Thom παρουσίασε πρόσφατα τίς ἀπόψεις του γιά τά λεγόμενα "μοντέρνα" μαθηματικά σ'ἕνα ἄρθρο πού δημοσιεύτηκε στό τεῦχος τοῦ Νοεμβρίου 1971 αὐτοῦ τοῦ περιοδικοῦ. Νομίζω πώς τό γραπτό του περιέχει μερικές ὀξυδερκεῖς ἀναλύσεις γιά τή φύση τῆς μαθηματικῆς σκέψης - ὅπως θά περίμενε κανείς ἀπό ἕνα μαθηματικό πρώτης σειρᾶς - καί μερικές βαθειές ἀλήθειες τῆς κοινῆς λογικῆς, μαζί μέ μερικές περίεργες παρερμηνεῖες καί διακηρύξεις πού,μή βρίσκοντας καλύτερη λέξη, θά τίς ὀνόμαζα "στενόμυαλες". Μιά ἀνάλυση τοῦ ἄρθρου δέν εἶναι εὔκολη ἀπ'τό γεγονός ὅτι ὁ Thom συστηματικά μπερδεύει τρία διαφορετικά ζητήματα, πού ὁ ἀπληροφόρητος ἀναγνώστης θά'ταν δύσκολο νά τά ξεχωρίσει: (1) τό νόημα τῆς "αὐστηρότητας" στά (καθαρά) μαθηματικά· (2) τή διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν στό πανεπιστήμιο· (3) τή διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν στό σχολεῖο. 'Εξετάζοντας τίς ἰδέες τοῦ Thom, θά'ταν νομίζω σαφέστερο νά ἀντιμετωπίσουμε αὐτά τά τρία ἐρωτήματα ξεχωριστά.

Αὐστηρότητα καί 'Αξιωματικοποίηση

Πίσω ἀπ'τίς ἀπόψεις τοῦ Thom γιά τό θέμα αὐτό βρίσκεται ἡ πίστη - τήν ὁποία συμμερίζομαι ἀπόλυτα - ὅτι οἱ σπουδαῖες μαθηματικές ἰδέες προέρχονται ἀπό μιά χούφτα μαθηματικῶν. Εἶμαι βέβαιος ὅτι ἀπό τό 1700 καί ὥς, τό 90% τῶν νέων μεθόδων καί ἐννοιῶν πού μπῆκαν στά μαθηματικά, βγῆκαν ἀπό τή φαντασία τεσσάρων ἢ πέντε ἀνθρώπων τό 18ο αἰῶνα, περίπου τριάντα ἀνθρώπων τόν 19ο αἰῶνα, καί σίγουρα ὄχι περισσότερων ἀπό ἑκατό ἀνθρώπων στόν αἰῶνα μας. Αὐτοί οἱ δημιουργικοί ἐπιστήμονες ξεχωρίζουν χάρη στήν πλούσια φαντασία τους συμπληρωμένη μέ μιά βαθειά κατανόηση τοῦ ἀντικειμένου πού μελετοῦν. Αὐτός ὁ συνδυασμός ἀξίζει τό ὄνομα "διαίσθηση";μολονότι εἶναι ἄσχετος μ'ὅ,τι συνήθως ἀποκαλοῦμε μέ τούτη τή

λέξη, γιατί ἀναφέρεται σέ "ἀντικείμενα" πού, γενικά, δέν ὑπάρχουν στόν κόσμο τῶν αἰσθήσεων μας.

Θά μποροῦσε λοιπόν κανείς νά ὑποστηρίξει ὅτι ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν μόνον τά ἔργα τῶν προικισμένων αὐτῶν ἀνθρώπων - ὅτι ἡ δημιουργία καί διάδοση τῶν μαθηματικῶν θά μποροῦσε νά διεξάγεται ἀποκλειστικά ἀνάμεσα σέ μιά ὁμάδα ἀπό ἰδιοφυΐες, ὅπως ἀκριβῶς, μᾶς λένε, οἱ Αἰγύπτιοι ἱερεῖς ἤ οἱ Πυθαγόρειοι μετέδιδαν προφορικά τίς παραδόσεις τους σέ λίγους διαλεχτούς. Σ'αὐτή τήν ἰδανική κατάσταση, ἡ ἔννοια "αὐστηρότητα", θά μποροῦσε θαυμάσια νά εἶναι ἐκείνη πού ὑπερασπίζεται ὁ Thom, μέ ἐλάχιστες, ἄν ὄχι καθόλου, ἄσχημες ἐπιπτώσεις στήν ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν.

Δυστυχῶς, ἕνα τέτοιο οὐτοπικό ὄνειρο δέ φαίνεται νά συμβιβάζεται οὔτε μέ τό σημερινό κοινωνικό μας σύστημα οὔτε μέ κάποια προβλέψιμη ἐξέλιξη αὐτοῦ τοῦ συστήματος. Ἡ ἐπικοινωνία ἀνάμεσα σέ μαθηματικούς μέ μιά κοινή γλώσσα πρέπει νά διατηρηθεῖ, ὅπως παραδέχεται ὁ ἴδιος ὁ Thom, καί ἡ μετάδοση τῆς γνώσης δέν εἶναι δυνατό νά ἀφεθεῖ ἀποκλειστικά στούς ἰδιοφυεῖς. Κατά κανόνα θά τήν ἐμπιστευθοῦμε σέ καθηγητές πού, κατά τήν ἔκφραση τοῦ Thom, "εἶναι ἐπαρκῶς μορφωμένοι καί προετοιμασμένοι νά κατανοήσουν (τίς ἀποδείξεις)". Καθώς ἡ πλειονότητα ἀπ'αὐτούς δέν θά εἶναι προικισμένοι μέ τήν ἐξαιρετική "διαίσθηση" τῶν δημιουργῶν, ὁ μόνος τρόπος γιά νά ἀποκτήσουν μιά ἱκανοποιητική γνώση τῶν μαθηματικῶν καί νά τήν μεταβιβάσουν στούς μαθητές τους, θά εἶναι ἡ προσεχτική παρουσίαση τοῦ ὑλικοῦ τους, ὅπου ὁρισμοί, ὑποθέσεις καί συλλογισμοί ἔχουν ἀρκετή ἀκρίβεια ὥστε νά ἀποφεύγονται οἱ παρεξηγήσεις, ἐνῶ οἱ πιθανές συγχύσεις καί οἱ παγίδες ἐπισημαίνονται ὅταν χρειάζεται.

Αὐτό εἶναι τό εἶδος τῆς ἐκθετικῆς γραφῆς πού ὑπῆρξε, νομίζω, ὁ ἀντικειμενικός σκοπός τῶν μαθηματικῶν πού ὁ Thom ἀποκαλεῖ "φορμαλιστές", ἀπό τόν Dedekind καί τόν Hilbert ὡς τούς Bourbaki καί τούς συνεχιστές τους. Ἄν αὐτός ὁ στόχος φαίνεται ὑπερβολικά μετριόφρονας, πάντως βρίσκεται πλησιέστερα πρός τήν ἀληθινή ἐρμηνεία τῶν προσπαθειῶν τους ἀπό τό νά τούς ἀποδίδουμε γενναιόδωρα τέτοιες ἄσωτες φιλοδοξίες, ὅ-

πως κάνει ὁ Thom. Δέ νομίζω πώς σοβαρολογεῖ ὅταν λέει ὅτι οἱ Bourbaki πάντα πίστευαν πώς τά Στοιχεῖα τους θά παρήγαγαν νέες ἀνακαλύψεις ἤ ἔλπιζαν πώς οἱ θεμελιώδεις μαθηματικές δομές "θά πήγαζαν μέ φυσικό τρόπο ἀπό μιά ταξινόμηση τῶν συνόλων". Ἄν οἱ Bourbaki δέ συμμερίζονται κατ'ἀνάγκη τή γνώμη τοῦ Thom ὅτι οἱ μαθηματικές δομές "ἐπιβάλλονται ἀπ'τόν ἐξωτερικό κόσμο", θεωροῦν, ὅπως καί ὁ Hilbert, ὅτι οἱ δομές πηγάζουν ἀπό προβλήματα μέ ἀπρόβλεπτο τρόπο καί ὅτι ἡ "ταξινόμηση τῶν συνόλων" εἶναι μονάχα ἕνα βολικό πλαίσιο ὅπου οἱ δομές τοποθετοῦνται καθώς βαθμιαία ἀνακαλύπτονται.

Ἡ δουλειά τῆς συστηματοποίησης τῶν μαθηματικῶν σίγουρα δέν εἶναι πάρα πολύ συναρπαστική, ἀλλά συχνά παρέχει ἀνταμοιβές. Προσπαθώντας κανείς νά κάνει τίς καινούργιες ἰδέες καί μεθόδους σαφέστερες καί πιό κατανοήσιμες, ὁδηγεῖται σχεδόν πάντα νά σκεφτεῖ ἄλλες δυνατές προσεγγίσεις, πράγμα πού ἀνοίγει μερικές φορές δρόμους σκέψης καί μονοπάτια ἔρευνας ἀνυποψίαστα γιά τόν σκαπανέα τῆς θεωρίας. Γιά νά πάρουμε ἕνα γνωστό ἱστορικό παράδειγμα, ἡ τεράστια δουλειά τῆς διασάφησης πού ἄρχισε μέ τό θάνατο τοῦ Riemann γιά νά ἐνσωματωθοῦν οἱ θαυμάσιες ἀνακαλύψεις του στόν κύριο κορμό τῶν μαθηματικῶν, θά εἶχε ἐλάχιστη ἀξία ἄν πετύχαινε μόνο νά δώσει αὐστηρότερες ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων του. Ἡ σημασία της ξεκινᾶ ἀπ'τό γεγονός ὅτι ἔφερε τόν μαθηματικό τίς γεωμετρικές μεθόδους τῶν Brill καί Noether, τήν ἀντιμεταθετική ἄλγεβρα τῶν Dedekind καί Weber καί, ἀργότερα, τά τοπολογικά ἐργαλεῖα τῶν Poincaré καί H. Weyl καί τίς ἄμεσες μεθόδους τοῦ Hilbert στό λογισμό μεταβολῶν. Ὅμοια, ὅταν οἱ E. Schmidt, M. Fréchet καί F. Riesz εἰσήγαγαν μιά γεωμετρική γλώσσα στή θεωρία τῶν χώρων Hilbert, δέν πρόσθεταν πολλή οὐσία στή δουλειά τοῦ Hilbert, ἀλλά ἡ μεσολάβηση τῶν "διαισθήσεων" πού οἱ μέθοδοί τους ἔκαναν διαθέσιμες, ὑπῆρξε ἰσχυρός παράγοντας στήν κατοπινή ἐξέλιξη τῆς θεωρίας.

Αὐτό μέ φέρνει στούς ἰσχυρισμούς τοῦ Thom γιά τήν προτεραιότητα τοῦ "συνεχοῦς" ἔναντι τοῦ "διακεκριμένου". Ἀσφαλῶς ἔχει δίκιο ὅταν κριτικάρει τόν Kronecker γιά τήν μονόπλευρη ἀντίληψή του γιά τά μαθηματικά, ὅτι ξεκινοῦν δηλ. ἀ-

ποκλειστικά ἀπ'τήν ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ.'Εν τούτοις στήν ἐπό - μενη παράγραφο δείχνει μιά παρόμοια στενοκεφαλιά ὁ ἴδιος,διαλέγοντας, ἀνάποδα, τή γεωμετρία σάν τήν πρωταρχική ρίζα τῶν μαθηματικῶν, καθώς ἐπιμένει ὅτι ἡ συνείδηση εἶναι πρωταρχικά "συνείδηση χώρου καί χρόνου". Παρ'ὅλο πού δέν ἔχω ἀσχοληθεῖ καθόλου μέ τήν ψυχολογία, μοῦ φαίνεται πώς καί ἡ πιό ἐπιφά - νειακή παρατήρηση τῶν μικρῶν παιδιῶν, ἀποκαλύπτει ἀμέσως τήν ἱκανότητά τους νά ξεχωρίζουν τά ἀντικείμενα σέ πολύ μικρή ἡλικία καί νά ξεφεύγουν ἔτσι ἀπ'τό "ὁμογενές συνεχές" πολύ πρίν ἀποκτήσουν ὁποιαδήποτε ἐμπειρία κίνησης ἤ ἰσομετρίας.

"Ολη ἡ ἱστορία τῶν μαθηματικῶν ἀποδεικνύει ὅτι ποτέ δέν οἰκοδομήθηκαν ἀποκλειστικά γύρω ἀπό μιά ἔννοια, εἴτε τήν ἔννοια τῆς συνέχειας εἴτε τήν ἔννοια τοῦ διακεκριμένου. Μετά τούς Πυθαγόρειους καί τήν "ἀριθμογεωμετρία" τους τά μαθηματικά ἐκτείνονται πάντα ἀνάμεσα σ'αὐτούς τούς δύο ταυτόχρονους καί συμπληρωματικούς πόλους σκέψης καί ἡ σταθερή πρόκληση ἀπό τήν ὕπαρξη αὐτῶν τῶν πόλων, ἀποτέλεσε, νομίζω τήν πηγή σπουδαίων προόδων τόσο γιά τά μαθηματικά ὅσο καί γιά τίς φυσικές ἐπι - στῆμες. Τά παραδείγματα ἀφθονοῦν: "Ολη ἡ ἀναλυτική θεωρία ἀριθμῶν εἶναι μιά ἰδιαίτερα ἐπιτυχημένη σειρά προσπαθειῶν νά φέρουμε τή δύναμη τῆς ἀνάλυσης (καί κυρίως τῆς θεωρίας τοῦ Cauchy) ἀρωγό στά προβλήματα τῆς ἀρίθμησης (τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἤ τῶν λύσεων Διοφαντικῶν ἐξισώσεων).'Εννοιολογικά βαθύ - τερες ἰδέες γιά τήν εἰσαγωγή τῆς "συνέχειας" στό πεδίο τοῦ "διακεκριμένου" κατέληξαν, ἀπό τή μιά μεριά στήν θεωρία τοῦ Hensel τῶν p-αδικῶν ἀριθμῶν καί τίς γενικεύσεις της στή διαδικασία πλήρωσης δακτυλίων καί ὁμάδων καί, ἀπό τήν ἄλλη,στήν "τοπολογία Zariski" καθώς καί ἄλλες γλωσσικές κατασκευές πού μᾶς ἔχουν βοηθήσει νά χρησιμοποιήσουμε γεωμετρική "διαίσθηση" σέ προβλήματα καθαρῆς ἄλγεβρας.

Στήν ἀντίθετη κατεύθυνση, ὁ ἴδιος ὁ Thom ἀναγνωρίζει τήν ἀνάγκη νά "διακεκριμενοποιήσουμε τό συνεχές"' ἀπ'τόν Poincaré καί μετά ὁ μόνος τρόπος ἀπόκτησης τοπολογικῆς γνώσης, ὑπῆρξε ἡ ὅλο καί εὐρύτερη χρήση ἄλγεβρας, μέ ἀντικείμενα ἀλ - γεβρικοῦ λογισμοῦ τά τοπολογικά ἀντικείμενα. Μέ τήν εὐκαιρία, εἶναι εἰρωνεία τῆς τύχης ὅτι ὁ Thom πού, προφανῶς, ἀπεχθάνε-

ται τήν ἄλγεβρα, θά μείνει γνωστός γιά τόν πρωτότυπο τρόπο πού τήν χρησιμοποίησε στή θεωρία του τοῦ κομπορντισμοῦ (cobordism), ἀκριβῶς ὅπως ὁ Kronecker, ὁ πρωταθλητής τοῦ διακεκριμένου, πρόσφερε σημαντικά στήν ἀνάλυση καί στίς ἐφαρμογές της στήν ἀλγεβρική γεωμετρία καί τήν θεωρία ἀριθμῶν.

Μαθηματικά στό Πανεπιστήμιο

Αὐτό τό ζήτημα θίγεται ἁπλῶς πολύ σύντομα στό ἄρθρο τοῦ Thom καθώς ἐπιτίθεται στήν ἀξιωματική μέθοδο τῆς κολλεγιακῆς διδασκαλίας. Καθώς προσθέτει ὅτι "ἡ ἀξιωματικοποίηση... δέν ἔχει θέση...παρά γιά τούς ἐπαγγελματίες πού εἰδικεύονται στή μελέτη τῶν θεμελίων", μοῦ δίνει τήν ἐντύπωση ὅτι ἔχει στό μυαλό του ἕνα ἀξιωματικό σύστημα πού ξεκινᾶ ἀπ' τή θεωρία συνόλων καί "κατασκευάζει" διαδοχικά τούς ἀκέραιους, τούς ρητούς καί τούς πραγματικούς. Ἄν αὐτό πράγματι συμβαίνει, συμφωνῶ ἀπόλυτα μαζί του καί μέ ὅσα λέει γιά τήν λανθασμένη ἔμφαση πού δίνεται σ'αὐτές τίς "ἀνακατασκευές" τοῦ συνεχοῦς. Αὐτές ἴσως ἀποδείχτηκαν ἱστορικά χρήσιμες ὅταν ἀνακαλύφτηκαν στό τελευταῖο τρίτο τοῦ 19ου αἰῶνα γιά νά διασαφηνίσουν τήν ἔννοια τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐπί πλέον αὐτά τά βαρετά μαθηματικά ἔφεραν σέ φῶς δύο τουλάχιστον σημαντικές ἰδέες (ἄλλο ἕνα παράδειγμα τοῦ φαινομένου πού προαναφέραμε). Ἡ πρώτη, ἀλγεβρικῆς φύσης, εἶναι ἡ "συμμετρικοποίηση" πού ὁδηγεῖ ἀπό μιά ἀντιμεταθετική "ἡμιομάδα" σέ μιά ὁμάδα πού πολύ πρόσφατα ἀποδείχτηκε πολύτιμη στόν ὁρισμό τῶν "ὁμάδων Grothendieck" στήν K-θεωρία· ἡ ἄλλη, ἡ "πλήρωση", μολονότι τοπολογικῆς φύσης, χρησιμοποιεῖται τώρα κατ'ἐξοχήν στήν ἄλγεβρα σάν ἰσχυρό ἐργαλεῖο πού ὁδηγεῖ στόν ὁρισμό τῶν p-αδικῶν ἀριθμῶν καί τῶν ὁμοίων "τοπολογικῶν δακτυλίων". Αὐτές οἱ ἐφαρμογές, πάντως, βρίσκονται πολύ πάνω ἀπ'τό ἐπίπεδο τῆς προπτυχιακῆς διδασκαλίας καί συμφωνῶ μέ τόν Thom ὅτι οἱ παραδοσιακές "τομές Dedekind" ἤ παρόμοιοι τρόποι "ὁρισμοῦ" τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι τελείως ἄχρηστα καί ἴσως ἐπιζήμια πράγματα σ'αὐτό τό ἐπίπεδο.

Ἀλλά ἡ παραπάνω ἑρμηνεία τῆς "ἀξιωματικοποίησης" εἶναι πολύ στενή. Ἐκεῖνο πού οἱ περισσότεροι ἐρευνητές καί δάσκα-

λοι ἀντιλαμβάνονται μ'αὐτή τή λέξη, δέν εἶναι μιά λεπτομερής ἐξέταση τῶν θεμελίων· αὐτή ἐλάχιστα ἐνδιαφέρει τούς περισσότερους (ἀντίθετα ἀπ'ὅ,τι νομίζει ὁ Thom). Στήν πραγματικότητα συμμερίζονται τήν Πλατωνική του ἀντίληψη γιά τόν μαθηματικό, ἄν καί δέν τό ὁμολογοῦν δημόσια. Αὐτό πού ἐννοοῦν λέγοντας ἀξιωματική θεωρία εἶναι ἕνας ὀρθολογικός καί νοικοκυρεμένος τρόπος παρουσίασης ὁρισμῶν καί θεωρημάτων πού ξεκαθαρίζει μᾶλλον τή "διαίσθηση" παρά τήν παραγκωνίζει.

Γιά παράδειγμα, συμφωνῶ ὅτι οἱ πραγματικοί ἀριθμοί εἶναι οὐσιῶδες μέρος τῆς διαίσθησής μας καί δέν πρέπει νά "ὁρίζονται" μέ τιμές Dedekind ἤ μέ ἄλλα τεχνάσματα. Ἀλλά πιστεύω ὅτι μόνο κέρδος θά εἶχε ὁ μαθητής καί ὄχι ζημία ἄν τοῦ ἀπαριθμούσαμε σέ μιά λίστα τίς βασικές ἰδιότητες τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πού θά χρησιμοποιήσει στήν ἀνάλυση, καί τοῦτο εἶναι ἁπλῶς πού συνιστᾶ τό "ἀξιωματικό σύστημα" τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ τελικός στόχος τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν σέ κάθε ἐπίπεδο χωρίς ἀμφιβολία εἶναι νά δοθεῖ στό μαθητή μιά ἀξιόπιστη "διαίσθηση" τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων μέ τά ὁποῖα θά ἀσχοληθεῖ. Ἀλλά ἡ πεῖρα δείχνει ὅτι αὐτό μπορεῖ νά ἐπιτευχθεῖ μόνο μέσω μιᾶς μακρᾶς ἐξοικείωσης μέ τό ὑλικό καί μέ ἐπανειλημμένες ἀπόπειρες νά τό κατανοήσουμε ἀπό κάθε δυνατή πλευρά. Ἕνας καθηγητής πού πρό πολλοῦ ἀπόκτησε αὐτή τήν ἐξοικείωση, κινδυνεύει νά ἀποτύχει πλήρως στήν ἐπικοινωνία του μέ τούς μαθητές, ἄν νομίζει ὅτι μπορεῖ νά παραμελήσει τίς ἀκριβεῖς διατυπώσεις ὅταν προσπαθεῖ νά τούς μεταβιβάσει τή "διαίσθηση". Μ'ἄλλα λόγια, πιστεύω ὅτι ἡ πρόοδος πρός τήν ἀπόκτηση "διαίσθησης" ἀναγκαστικά περνάει μέσα ἀπό μιά περίοδο καθαρά τυπικῆς καί ἐπιφανειακῆς γνώσης πού μόνο σταδιακά θά ἀντικατασταθεῖ ἀπό μιά καλύτερη καί βαθύτερη κατανόηση.

Ἕνα σημεῖο, πάντως, ὅπου πρέπει νά συμφωνήσω μέ τόν Thom εἶναι ἡ κριτική του γιά τήν ἀξιοθρήνητη τάση πολλῶν νέων πανεπιστημιακῶν δασκάλων νά εἰσάγουν πολλή ἀφηρημένη ἄλγεβρα σέ πρώιμη φάση, ὅταν αὐτό δέν εἶναι καθόλου ἀναγκαῖο. Πολλοί μαθηματικοί (ἰδιαίτερα ὁ Knonecker καί ὁ Chevalley, ἀπ' τούς μεγαλύτερους ἀλγεβριστές ὅλων τῶν ἐποχῶν) ἐπανειλημμένα ἐ-

χουν τονίσει πώς ἡ ἄλγεβρα, ἐξαιρετικά χρήσιμη καθώς εἶναι , δέν πρέπει ποτέ νά διδάσκεται καί νά γίνεται χωρίς ἐρεθίσματα ἀπ'τά ὑπόλοιπα μαθηματικά· μ'ἄλλα λόγια πρέπει μονάχα νά ἀναπτύσσει τό μηχανισμό πού ἀπαιτεῖται γιά τή λύση συγκεκριμένων προβλημάτων πού ἀνακύπτουν ἀπ'τούς ἄλλους κλάδους.'Αλλοιῶς θά ἔχουμε αὐτή πού σωστά ὁ Thom καυτηριάζει σάν "φορμαλιστική ἀνάπτυξη" ἀσήμαντων καί ἀνιαρῶν θεωριῶν". Νομίζω πώς αὐτή ἡ ἄτυχη καί περίεργη τάση ὀφείλεται σ'ἕνα πρακτικά βέβαιο γεγονός πού θά ἐξέπλησσε τούς μαθηματικούς τοῦ 19ου αἰῶνα, ὅτι δηλαδή εἶναι πολύ πιό εὔκολο νά διδάξεις ἀφηρημένα μαθηματικά ἀπό τό νά μεταδώσεις, γιά παράδειγμα, μιά καλή διαισθητική γνώση κλασσικῆς ἀνάλυσης. Καί ἔτσι ἔχουμε τήν πλημμύρα τῶν κατηγοριῶν, τῶν συνδέσμων, τῶν κομψῶν δακτυλίων ἤ χώρων κάθε φανταστικοῦ εἴδους, πού κολακεύουν τό ἐγώ ὅσων ἐντρυφοῦν σέ τέτοια λυρικά θέματα ἐνῶ ἔχουν πλήρη ἄγνοια τῆς ἀριθμοθεωρίας, τῆς ἀλγεβρικῆς γεωμετρίας, τῆς διαφορικῆς τοπολογίας ἤ τῆς συναρτησιακῆς ἀνάλυσης.

Μαθηματικά στό Σχολεῖο

Μέ τίς λίγες ἐπιφυλάξεις πού μόλις πρίν ἀνέφερα δέν ὑπάρχουν μεγάλες διαφορές ἀπόψεων γιά τό εἶδος τῶν μαθηματικῶν πού πρέπει νά διδάσκονται στά διάφορα ἐπίπεδα τοῦ πανεπιστημιακοῦ προγράμματος.'Απ'τήν ἄλλη μεριά οἱ γνῶμες ἀποκλίνουν σέ μεγάλο βαθμό στό ἴδιο ἐρώτημα πού ἀφορᾶ τά μαθηματικά στό Γυμνάσιο καί τό Λύκειο.

Κατ'ἀρχήν εἶναι ξεκάθαρο ὅτι τό 90% τῶν μαθητῶν αὐτῆς τῆς βαθμίδας δέν πρόκειται νά χρησιμοποιήσει καθόλου ἄλλα μαθηματικά, πέρα τῆς στοιχειώδους ἀριθμητικῆς, ὅταν ἐνηλικιωθεῖ.'Ετσι μπορεῖ κανείς θαυμάσια νά ἰσχυριστεῖ ὅτι δέν πρέπει νά διδάσκονται καθόλου μαθηματικά σέ παιδιά πάνω τῶν 15 χρόνων, ἄς ποῦμε, ἐκτός ἀπό ἐκεῖνα πού προορίζονται γιά ἐπιστημονικό ἤ τεχνικό ἐπάγγελμα. 'Επειδή, πάντως, εἶναι πολύ δύσκολο νά διακρίνουμε μελλοντικές ἐπιστημονικές ἱκανότητες σέ παιδιά κάτω ἀπ'αὐτή τήν ἡλικία, καλό εἶναι νά ἐξοικειώνονται μέ κάποιο πλῆθος ἐπιστημονικῶν ἀληθειῶν καί σκέψεων προσαρμοσμένων στό δικό τους ἐπίπεδο ὡριμότητας.

Ἰδιαίτερα ὅσον ἀφορᾶ τά μαθηματικά, συμφωνῶ ἀπόλυτα μέ τόν Thom ὅτι ἡ κύρια ἐπιδίωξη πρέπει νά εἶναι νά δείξουμε στό παιδί πῶς ἡ ἀκατέργαστη καί ἄμορφη συνείδηση τοῦ χώρου καί τοῦ χρόνου μπορεῖ βαθμιαία νά ὀργανωθεῖ σέ κάποια λογική δομή· μ'ἄλλα λόγια, ἡ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν στό γυμνάσιο πρέπει νά ἀκολουθεῖ ἕνα πρότυπο ὅμοιο μ'ἐκεῖνο τῆς διδασκαλίας τῆς φυσικῆς καί τῆς βιολογίας στήν ἴδια βαθμίδα . Ἀλλά ἐκεῖνο πού ὁ Thom καί οἱ ἄλλοι ὑποστηρικτές τοῦ παλιοῦ καθεστῶτος στά σχολεῖα ἀδυνατοῦν νά καταλάβουν εἶναι ὅτι τό παλιό σύστημα ἦταν ὁδυνηρά ἀνεπαρκές γιά τήν πραγμάτωση αὐτοῦ τοῦ στόχου. Ἡ ἄλγεβρα παρουσιάζονταν σάν καθαρό παιγνίδι συμβόλων μέ ἐλάχιστες ἀναφορές σέ ὁ,τιδήποτε παραπέρα· οἱ ἄνθρωποι τῆς γενιᾶς μου θυμοῦνται καλά πῶς ξόδευαν χρόνια "συζητώντας τή δευτεροβάθμια ἐξίσωση". Ἡ Γεωμετρία διδάσκονταν στήν ἡλικία τῶν δώδεκα χρόνων, ξεκινώντας κατ' εὐθείαν μέ τά Εὐκλείδια ἀξιώματα, ἀνακατεμένα (ἀπό ἀνάγκη, καθώς δέν ἀποτελοῦν πλῆρες σύστημα) μέ ἀναφορές στή διαίσθηση πού μεταμφιέζονταν σέ "προφανῆ γεγονότα".

Γιά νά δώσω ἕνα παράδειγμα, ὅταν κανείς ἤθελε νά ἀποδείξει ὅτι ἀπό ἕνα σημεῖο P μιᾶς εὐθείας D, μπορεῖ νά ἀχθεῖ στό ἐπίπεδο μιά κάθετος στή D, ἡ "ἀπόδειξη" ἦταν ἡ ἑξῆς: "Περιστρέφουμε" μιά ἡμιευθεία Δ μέ ἀρχή τό P ἀπό τή θέση ὅπου συμπίπτει μέ μιά ἀπό τίς ἡμιευθεῖες D', πάνω στή D, μέχρι τή θέση πού συμπίπτει μέ τήν ἄλλη ἡμιευθεία D" πάνω στή D. Καθώς ἡ γωνία (D',Δ) αὐξάνει ἀπό 0 ὡς 180^0 καί ἡ γωνία (Δ,D") ἐλαττώνεται ἀπό 180^0 ὡς 0, θά πρέπει νά ὑπάρχει κάποια θέση τῆς Δ ὅπου αὐτές νά εἶναι ἴσες. Βέβαια σά διαισθητική εἰκόνα τά παραπάνω εἶναι καλά, ἀλλά ἀπέχουν πολύ ἀπό τό εἶδος τοῦ αὐστηροῦ συλλογισμοῦ πού ὁ καθηγητής τῆς ἴδιας ἐποχῆς χρησιμοποιοῦσε γιά νά ἀποδείξει ἀποτελέσματα πού, σ'ἕνα ἀπροετοίμαστο παιδί, θά φαίνονταν τό ἴδιο "προφανῆ" ὅσο καί τό παραπάνω. Ἡ δική μου ἀνάμνηση ἐκείνων τῶν σχολικῶν χρόνων εἶναι ὅτι ποτέ δέν κατάλαβα αὐτή τή διαφορά μεταξύ προφανοῦς καί μή, καί ὅτι ἡ ἰδέα τῆς ἀπόδειξης παρέμεινε γιά μένα μυστήριο γιά πολύ καιρό.

Γνώμη μου εἶναι ὅτι πρίν ἀπ'τά δεκαπέντε χρόνια τῆς ἡ-

λικίας κανένα ἀξιωματικό σύστημα δέν πρέπει νά διδάσκεται . Αὐτό δέν ἀπαγορεύει ἀπόπειρες ἐξοικείωσης μέ τή λογική συνεπαγωγή· ἀντίθετα κάθε εὐκαιρία νά ἐντυπωσιάσουμε τά παιδιά μέ τήν ἀσυνήθιστη δύναμη αὐτῆς τῆς νοητικῆς διαδικασίας πρέπει νά ἀξιοποιεῖται μέ ζῆλο. Ἀλλά ἄν κανείς θέλει νά ἀποδείξει ὅτι τό Α συνεπάγεται τό Β, ὅπου τό Α εἶναι ἕνα ἀρκετά προφανές γεωμετρικό γεγονός (π.χ. ὕπαρξη διχοτόμου γωνίας) καί Β κάτι καθόλου προφανές (ἄς ποῦμε, ὅτι οἱ διχοτόμοι τριγώνου ἔχουν κοινό σημεῖο), σίγουρα δέ χρειάζεται νά ξέρει ὅτι τό Α εἶναι ὁ 426ος κρίκος στήν ἁλυσίδα τῶν προτάσεων πού προκύπτουν ἀπό ἕνα ἀξιωματικό σύστημα!

Ἄν στραφοῦμε τώρα στή διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν σέ μεγαλύτερα παιδιά, σέ προσανατολισμένους πρός τήν ἐπιστήμη μαθητές Λυκείου, φαίνεται νά ἐνεδρεύει πίσω ἀπ' τά ἐπιχειρήματα τοῦ Thom ὑπέρ τοῦ παλιοῦ συστήματος μιά βασική παρεξήγηση: πιστεύει ὅτι ἡ Εὐκλείδια Γεωμετρία ἐξοβελίζεται ἀπ' τό νέο πρόγραμμα καί ἀντικαθίσταται ἀπ' τή γραμμική ἄλγεβρα. Ἐνῶ δέν ξέρω ἄν αὐτό ἔγινε πραγματικά σέ καμιά χώρα, μπορῶ νά πῶ μέ βεβαιότητα πώς δέ συνέβη στό Βέλγιο, πού ὑπῆρξε ἀπ' τούς πρωτοπόρους στόν ἐκσυγχρονισμό τοῦ μαθηματικοῦ προγράμματος τοῦ Λυκείου. Ἐπιδίωξη εἶναι νά ἐξαλειφθεῖ ὄχι ἡ Εὐκλείδια γεωμετρία ἀλλά ὁ ἀπαρχαιωμένος τρόπος διδασκαλίας της, (πού ὑπῆρξε παραδοσιακός ἀπ' τόν Εὐκλείδη καί μετά) καί ἔτσι νά ξεκαθαρίσουμε τό νόημα τῆς γεωμετρίας καί νά προάγουμε τήν κεντρική της θέση στόν μαθηματικό καί τήν καθολική της δύναμη.

Γιά τόν σημερινό ἐπαγγελματία μαθηματικό εἶναι κοινοτοπία ὅτι τά βασικά θεωρήματα τῆς Εὐκλείδιας γεωμετρίας (σέ ὁποιοδήποτε ἀριθμό διαστάσεων) προκύπτουν πολύ εὔκολα ἀπό τήν ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ χώρου ἐφοδιασμένου μέ μιά θετικά ὁρισμένη τετραγωνική μορφή. Γιατί αὐτή ἡ μέθοδος δέν θἄπρεπε νά διδάσκεται (γιά δύο ἤ τρεῖς διαστάσεις) στούς μαθητές Λυκείου ἀντί γιά τίς ἀπίστευτες, σαφῶς ἄσχετες ἀνατομίες τριγώνων, ὅπου κάθε βῆμα μοιάζει μέ κόλπο θαυματοποιοῦ; Πιστεύει ἀλήθεια ὁ Thom ὅτι ἡ γραμμική ἄλγεβρα σέ ἕνα διδιάστατο πραγματικό διανυσματικό χῶρο, εἶναι "ἀφηρημένο" ἀντι-

κείμενο, πέρα άπ'τίς δυνατότητες τοῦ δεκαπεντάχρονου άγοριοῦ ἤ κοριτσιοῦ, ὅταν κάθε μιά άπ'τίς βασικές ἔννοιες μπορεῖ νά γίνει ὁρατή στόν πίνακα καί κάθε άξίωμα ἔχει ἕνα άμεσο διαισθητικό νόημα;

Ὁ άντιαλγεβρικός του λίβελλος θά ἦταν δικαιολογημένος ἄν ἡ "άλγεβρα" ἦταν ἡ "τυφλή ἐφαρμογή άριθμητικῶν κανόνων" άπ'τήν ὁποία κι αὐτός κι ἐγώ ὑποφέραμε στά σχολικά μας χρόνια, ἡ καθαρά άφηρημένη θεωρία ὁμάδων δακτυλίων καί σωμάτων. Άλλά τώρα πού ἡ βασική άρχή τῶν μοντέρνων μαθηματικῶν εἶναι ἡ ἐπίτευξη μιᾶς τέλειας σύντηξης "γεωμετρικῶν" καί "άλγεβρικῶν" ἰδεῶν, τό νά άντιπαραθέτουμε τή "γεωμετρία" στήν "άλγεβρα" ὅπως κάνει ὁ Thom, εἶναι άπλῶς χωρίς νόημα, άρκεῖ φυσικά ἡ "γεωμετρική άλγεβρα" (γιά νά χρησιμοποιήσω τήν πετυχημένη ἔκφραση τοῦ E. Artin) νά διδάσκεται σάν μιά ὁλότητα, ὅπου κάθε άλγεβρική ἔννοια ἤ θεώρημα νά συνοδεύεται άπό μιά γεωμετρική "μετάφραση". Ἐπίσης, μ'αὐτό τό πνεῦμα κυρίως, θά ἤθελα νά ἔβλεπα ἐννοιες σάν αὐτές τῆς ὁμάδας ἤ τοῦ δακτυλίου, νά διδάσκονται στούς μαθητές, ὅταν κανείς διαθέτει γεωμετρικά παραδείγματα γιά νά τίς παραστήσει, ὅπως ἡ ὁμάδα τῶν στροφῶν στό ἐπίπεδο (οἱ "γωνίες"!) ἤ ὁ δακτύλιος τῶν ἐνδομορφισμῶν τοῦ ἐπιπέδου (σάν διανυσματικός χῶρος). Φυσικά ἡ "άφηρημένη" θεωρία τῶν ὁμάδων ἤ τῶν δακτυλίων δέν πρέπει νά ἔχει καμμιά θέση στή μέση ἐκπαίδευση.

Ἀφοῦ τά βασικά θεωρήματα τῆς Εὐκλείδιας Γεωμετρίας άποδειχθοῦν μέ γραμμική άλγεβρα (χωρίς συντεταγμένες, φυσικά!), τίποτα δέν ἐμποδίζει τόν καλό μαθητή νά άντιμετωπίσει κλασσικά προβλήματα τριγώνων ἤ κωνικῶν τομῶν ἄν τοῦ ἀρέσει. Δέν άσπάζομαι ἐντελῶς τήν γνώμη τοῦ Thom ὅτι αὐτό τό εἶδος τῶν άσκήσεων ἔχει μεγάλη παιδευτική άξία. Θρονῶ ὅτι ἄν κανείς θέλει νά εἰσάγει "μή-χρήσιμο" ὑλικό, ὑπάρχει πλῆθος ἐπιλογῶν πού σίγουρα ἔχουν μεγαλύτερη συνάφεια μέ τίς μοντέρνες ἰδέες στά μαθηματικά καί τή φυσική άπ'ὅ,τι τά παραδοσιακά προβλήματα. Γιά νά άποδειχτεῖ, γιά παράδειγμα, ὅτι ἡ ὁμάδα στροφῶν στό χῶρο εἶναι άπλή, δέν άπαιτεῖται περισσότερη γεωμετρική άλγεβρα άπ'ὅσο γιά νά άποδειχτεῖ ἡ ὕπαρξη τοῦ κύκ -

κλου τῶν ἐννέα σημείων. Ἐν τούτοις αὐτή ἡ ἄσκηση, ἄν καί ὄχι ἄμεσα "χρήσιμη", εἶναι κατά τή γνώμη μου πολύ πιό σημαντική.

Ὅταν σκέφτομαι τήν παράξενη ἀπροθυμία τοῦ Thom καί πολλῶν συναδέλφων του στό Πανεπιστήμιο νά ἐγκαταλείψουν τόν παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν στή μέση ἐκπαίδευση - ἀκόμα κι ὅταν ἀντιλαμβάνεται ὅτι στερεῖται καταλληλότητας καί αὐστηρότητας - νομίζω ὅτι προέρχεται ἀπό τόν ἐνστικτώδη φόβο ὅτι τά "μοντέρνα" μαθηματικά, ἄν διδαχτοῦν ἄσχημα, θά φέρουν πολύ χειρότερα ἀποτέλεσματα. Δυστυχῶς ὑπάρχουν ἄφθονα παραδείγματα πού δείχνουν ὅτι αὐτός ὁ φόβος δέν εἶναι ἄβάσιμος. Ἄν πολλοί πανεπιστημιακοί δάσκαλοι ἔχουν τήν ἀξιοθρήνητη τάση νά ὑπερτονίζουν τήν ἀφαίρεση σέ βάρος τῆς διαίσθησης, δέν θά πρέπει νά νοιώσει κανείς ἔκπληξη ἀπ'τό γεγονός ὅτι οἱ καθηγητές τῶν Λυκείων, πού δέν ἔχουν μεγάλες δυνατότητες νά ἀντιληφθοῦν τά βαθύτερα κίνητρα γιά τήν εἰσαγωγή τῶν καινούργιων μαθηματικῶν ἐννοιῶν στό σχολεῖο, προσκολλῶνται στό <u>γράμμα</u> τοῦ νέου προγράμματος ἀντί νά κατανοήσουν τό <u>πνεῦμα</u> πού τό κατέστησε ἀναγκαῖο. Ὅπως καί οἱ συνάδελφοι τους στό Πανεπιστήμιο, ἀνακάλυψαν ὅτι εἶναι πολύ πιό εὔκολο νά διδάσκεις τό χειρισμό ἀφηρημένων ἐννοιῶν ἀπ'τό νά δίνεις μιά διαισθητική εἰκόνα τῆς πραγματικότητας πού κρύβεται πίσω ἀπ'τίς ἀφαιρέσεις. Σ'αὐτό ὀφείλεται καί ἡ ἰδιαίτερη προτίμησή τους στή λογική καί ἡ ἄτακτη συσσώρευσή της μέσα στή διδασκαλία τους.

Φυσικά μπορεῖ κανείς νά ἰσχυριστεῖ ὅτι ἡ ἐξάσκηση στήν λογική σκέψη ἔχει κάποια χρησιμότητα· παρ'ὅλο πού μονάχα ἀνοιχτομάτηδες ἰδεαλιστές πιστεύουν πραγματικά ὅτι ἡ λογική μπορεῖ νά (καί θά) κυριαρχήσει κάποια μέρα στήν ἀνθρώπινη συμπεριφορά, παραδεχόμαστε ἀμέσως ὅτι λίγο μεγαλύτερη ποσότητα ἀπ'αὐτή δέ θά ἔβλαπτε τό λαουτζίκο. Ἀλλά τά ἄστεῖα παραδείγματα πού στιγματίζει σέ μάκρος ὁ Thom πρέπει νά πείσουν τούς ἐκπαιδευτικούς νά περιορίσουν τήν ἄλγεβρα Boole αὐστηρά ἐκεῖ πού ἀνήκει, δηλαδή στά μαθηματικά καί γενικά τήν ἐπιστήμη. Ἀκόμα καί μέσα σ'αὐτά τά ὅρια οἱ ἐκπαιδευτικοί πρέπει νά προσέξουν μήν, κατά λάθος, θεωρηθεῖ πανάκεια ἀντί γιά ἐργαλεῖο πού εἶναι. Ἡ λογική εἶναι μαθηματικά ὅσο καί οἱ ἀτομικοί ἀν-

τιδραστῆρες εἶναι πυρηνική φυσική ἄν εἶσαι ἀρκετά ἔξυπνος νά φανταστεῖς μιά ἀπόδειξη, ἡ λογική θά σέ βοηθήσει νά τήν φέρεις σέ πέρας, ἀκριβῶς ὅπως ὁ πυρηνικός φυσικός χρειάζεται σύνθετα καί ἀκριβά μηχανήματα γιά νά δείξει ὅτι ἡ θεωρία του γιά τίς πυρηνικές δυνάμεις εἶναι σωστή. Καί στίς δύο περιπτώσεις ἡ φαντασία πάντα εἶναι ὁ ἀναντικατάστατος ἀρχικός σπινθήρας.

Θά πίστευε ἐπίσης κανείς ὅτι στή σχολική διδασκαλία ὑπάρχει μιά ἐσωτερική παρόρμηση νά μετατρέπεται τό κάθε τί σέ ἀκαδημαϊσμό, μέ τήν χειρότερη σημασία τοῦ ὅρου. Πολλοί μαθηματικοί καί ἐπιστήμονες στενοχωριοῦνται εἰλικρινά ὅταν βλέπουν τόν παλιό ἀκαδημαϊσμό, τόν ὁποῖο εἶχαν ἀποδεχτεῖ σάν ἕνα γεγονός τῆς ζωῆς καί ἔμαθαν νά ζοῦν μαζί του, νά ἀντικαθίστανται ἀπό ἕνα πολύ ἐπιθετικότερο καί πιό ἀνόητο ρεῦμα κάτω ἀπ'τή σημαία τοῦ "μοντερνισμοῦ".

Παρ'ὅλ'αὐτά ἐξακολουθῶ νά ἐλπίζω ὅτι ἡ τωρινή ἀναταραχή τελικά θά κοπάσει καί θά κατασταλάξει σέ κάποιον μετριοπαθῆ λογικό συμβιβασμό. Μέ τήν πίεση πού ἀσκεῖ ἡ ἐπιστήμη καί ἡ τεχνολογία στίς ἀνθρώπινες ὑποθέσεις, πού συνεχῶς αὐξάνει,δέν μποροῦμε νά ἐπιτρέψουμε οἱ αὐριανοί διευθυντές καί τεχνικοί νά σπαταλοῦν τά πολύτιμα χρόνια τῆς σχολικῆς ζωῆς τους ρουφώντας ἄχρηστη γνώση διδαγμένη μέ ἀπαρχαιωμένες μεθόδους, ἀκόμα κι ἄν παραδεχτοῦμε κάποιο στοιχεῖο "παιγνιδιοῦ" στό πρόγραμμα.'Η ἀγωνία τῶν γονιῶν πού δέν καταλαβαίνουν τό λεξιλόγιο τῶν παιδιῶν τους θά σβήσει μέ τόν ἐρχομό τῆς ἐπόμενης γενιᾶς. Καί τελικά, ἄν οἱ ἄνθρωποι πού εἶναι ἁρμόδιοι γιά τό σχεδιασμό τῶν σχολικῶν προγραμμάτων πειστοῦν νά συμβουλεύονται ἐπαγγελματίες μαθηματικούς ὥστε νά καταλάβουν τήν ἐπίπτωση τῶν ἀποφάσεών τους στήν ἐπιστήμη ὅπως πραγματώνεται στό πανεπιστήμιο καί ἔξω ἀπ'αὐτό, μπορεῖ κάποια μέρα νά δοῦμε κάποια συνετή διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν ἀπ'τό νηπιαγωγεῖο ὡς τίς μεταπτυχιακές σχολές.

Ὁ Jean A. Dieudonnέ, ἐπίτιμος καθηγητής τῶν Μαθηματικῶν στό Πανεπιστήμιο τῆς Nice, στή Γαλλία, σπούδασε στήν Ecole Normale Supérieure τοῦ Παρισιοῦ, παίρνοντας τό Διδακτορικό του Δίπλωμα στίς Μαθηματικές Ἐπιστῆμες τό 1931. Πρίν τό διορισμό του τό 1964 στή Nice, κατεῖχε θέσεις στά πανεπιστήμια τῆς Rennes (1933-37), τοῦ Nancy (1937-52), τοῦ Michigan (1952-53), τό Northwestern University (1953-49) καί στό Institut des Hautes Etudes Scientifiques, στό Παρίσι (1959-64). Ἦταν κοσμήτορας τῆς Faculté des Sciences στή Nice ἀπό τό 1965-68 καί παραιτήθηκε τό 1970. Ἦταν Πρόεδρος τῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας τῆς Γαλλίας τό 1964-65 καί ἐκλέχτηκε τό 1968 στή Γαλλική Ἀκαδημία Ἐπιστημῶν. Τά ἐρευνητικά του ἐνδιαφέρονται περιλαμβάνουν πολυώνυμα καί συναρτήσεις "schlicht" μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς, γενική τοπολογία, θεωρία ὁλοκλήρωσης, τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους, γενική θεωρία μή ἀντιμεταθετικῶν δακτυλίων, κλασσικές ὁμάδες καί τυπικές ὁμάδες Lie. Εἶναι συγγραφέας περίπου 130 ἄρθρων καί ἔχει γράψει πολλά βιβλία ἀνάλυσης, γραμμικῆς ἄλγεβρας καί γεωμετρίας, κλασσικῶν ὁμάδων καί θεωρίας ἀμεταβλησίας. Ἡ Διεύθυνση του εἶναι: Villa Nancago, Corniche Fleurie, 06- Nice, France.