Author: Μιχαήλ. Κ. Κωβαίος

Title: Η εις άτοπον απαγωγή.

Abstract: Το άρθρο αυτό διαπραγματεύεται τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής με παραδείγματα από την καθημερινή ζωή, καθώς και με καθαρά μαθηματικά παραδείγματα, κυρίως από τη Γεωμετρία.

Creator: HDML

Η ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ

Ὑπό

Μιχαήλ Κ. Κωβαίου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Η ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ.

1. Κριτήριο τοῦ ψεύδους ἡ ἀντίθεσή του πρός ἀναγνωρισμένες ἀλήθειες. Τό ἄτοπο.
2. Κοινό παράδειγμα: τό "ἄλλοθι" στά δικαστήρια.
3. Ἀναίρεση τοῦ ἰσχυρισμοῦ τοῦ Ἀριστοτέλη, ὅτι τά βαρύτερα σώματα πίπτουν ταχύτερα.
4. Ἡ ἰδιοτυπία τῆς μεθόδου.
5. Τύπος τῆς μεθόδου καί παραδείγματα, ὅπου τό ἄτοπο συνίσταται σέ ἀντίφαση πρός συνθήκη δεκτή στήν ὑπόθεση.
6. Ἀντίφαση πρός αἴτημα ἤ θεώρημα.
7. Ἐφαρμογή τῆς μεθόδου στήν ἀπόδειξη ἀντιστρόκων προτάσεων, ὅπου τά ἐναλλακτά μέρη εἶναι συνθῆκες μοναδικότητας.
8. Γενικό κριτήριο ἀποδοχῆς, χωρίς ἀπόδειξη, τῶν ἀντιστρόκων μιᾶς εἰδικῆς κατηγορίας προτάσεων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Θεωρία εἶναι σύστημα γνώσεων, πού ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα ἀριθμό πρώτων ἐννοιῶν καί βασικῶν προτάσεων (ἀξιώματα,αἰτήματα), μαζί μέ ὅλες τίς λογικές τους συνέπειες. Οἱ λογικές αὐτές συνέπειες δέν εἶναι γνωστές ἐκ τῶν προτέρων, ἀλλά ἐξάγονται ἀπό τίς βασικές ἔννοιες καί προτάσεις μέ διανοητικές ἐπεξεργασίες, τό σύνολο τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ καί αὐτό ἀναπόσπαστο μέρος τοῦ περιεχομένου τῆς θεωρίας.

Οἱ πρῶτες ἔννοιες καί οἱ βασικές προτάσεις ἀποτελοῦν τή βάση κάθε θεωρητικῆς ἐπιστήμης. Οἱ συνέπειές των ἀποτελοῦν τά λεγόμενα θεωρήματα, δηλαδή προτάσεις, τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια δέν εἶναι ἀμέσως φανερή, ὅπως τῶν ἀξιωμάτων, ἀλλά χρειάζεται νά θεωρηθεῖ, δηλαδή νά γίνει ἀντικείμενο πνευματικῆς ἐνατενίσεως καί λογικῆς ἐπεξεργασίας, γιά νά προκύψει σάν ἀναγκαῖο συμπέρασμα κάποιου λογικοῦ συλλογισμοῦ. Ἕνας τέτοιος συλλογισμός,πού ἀποκαθιστᾶ τήν ἀναγκαιότητα ἑνός θεωρήματος μέσα στά πλαίσια ἑνός θεωρητικοῦ συστήματος,ὀνομάζεται ἀπόδειξη.

Εἶναι λοιπόν ἡ ἀπόδειξη τό ὄργανο καί συγχρόνως ὁ νωτιαῖος μυελός τῆς θεωρίας. Μέ τήν ἀπόδειξη ἐξασφαλίζεται ἡ ἐσωτερική συνοχή ἑνός συστήματος θεωρητικῆς γνώσεως, μιᾶς δομῆς ὅπως λέγεται συχνά, καί μέ αὐτήν ἀποκαθίσταται ἡ λογική ὀργάνωση καί τό ἀλληλέγγυο τῶν διαφόρων μερῶν αὐτοῦ. Γι'αὐτό τά Μαθηματικά, πού μποροῦμε νά ποῦμε πῶς εἶναι ἡ μήτρα κάθε θεωρητικῆς γνώσεως, παρέχουν τό πρότυπο μιᾶς θαυμαστῆς ἐσωτερικῆς ἁρμονίας μέ τήν ὁποία γοητεύουν καί συναρπάζουν.Κάθε θεωρητική δομή ἀποτελεῖται, ὅπως εἴπαμε, ἀπό τή βάση καί τίς συνέπειές της. Ἡ δομή λοιπόν εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη,ὅταν δοθεῖ ἡ βάση της, ἄσχετα ἄν τό μυαλό δέν εἶναι σέ θέση νά συλλάβει διά μιᾶς ἤ ν'ἀναγνωρίσει ὅλο τό θησαυρό τῶν ἀληθειῶν , πού ἀπορρέουν ἀπό τή βάση ἤ καλύτερα, πού κρύβονται καί συνυπάρχουν μέσα σ'αὐτή.

2.Ἀπό ὅσα εἴπαμε παραπάνω γίνεται φανερό πῶς ἡ χρήση τῆς ἀποδείξεως προϋποθέτει τήν κατοχή τῆς ἀποδεικτέας ἀλήθειας, ἄλλως δέν θά ξέραμε τί ν'ἀποδείξουμε. Κάί μένει φυσικά ἀ-

κάλυπτη ἡ ἀπορία: πῶς θά βαδίσει ὁ νοῦς γιά νά φτάσει στήν ἀνακάλυψη τῶν θεωρημάτων, πού ἀπορρέουν ἀπό τή βάση μιᾶς δομῆς σάν ἀναγκαῖες συνέπειες;

Στό ἐρώτημα αὐτό δέν εἶναι δυνατό νά δοθεῖ μιά σαφής καί συγκεκριμένη ἀπάντηση. Ἄν ἦταν δυνατό νά γνωρίζαμε κανόνες, μέ τήν ἐφαρμογή τῶν ὁποίων θά μπορούσαμε νά βρίσκωμε καί νά κατασκευάζωμε ἐπιστημονικές ἀλήθειες στή σειρά, σάν προϊόντα τῆς βιομηχανίας, τότε ὅλοι θά ἦσαν σέ θέση νά ἐφαρμόσουν αὐτούς τούς κανόνες καί ὁ τίτλος τοῦ σοφοῦ δέν θά εἶχε πιά καμιάν ἰδιαίτερη ἀξία. Ὥστε δέν μένει ἄλλο παρά ἡ ἐλπίδα πώς μέ τή μακρά καί προσεκτική μελέτη τῶν ἔργων τῶν μεγάλων διδασκάλων τῆς ἐπιστήμης καί μέ τήν ἐπίμονη ἄσκηση τῶν πνευματικῶν μας δυνάμεων πάνω στ' ἀντικείμενά της, θά μπορέσωμε ἴσως μιά μέρα νά φτάσωμε ἤ νά πλησιάσωμε στό ὕψος τους.

Ἐνῶ ὅμως μᾶς εἶναι ἀδύνατο νά ὑποδείξωμε πῶς ἀκριβῶς θά βαδίσωμε γιά νά φτάσωμε στήν ἀνακάλυψη τῆς ἀλήθειας, δέν μᾶς εἶναι δύσκολο νά μεταδώσουμε στούς ἄλλους τήν πεποίθηση γιά τήν ἀλήθεια πού ἤδη κατέχομε. Οἱ διάφοροι τρόποι, μέ τούς ὁποίους εἶναι δυνατό νά ἐπιτύχωμε αὐτό τό ἀποτέλεσμα ἀνάγονται σέ δύο γενικούς τύπους, πού ἀνταποκρίνονται ὁ καθένας σέ μιά ἰδιαίτερη ὁμάδα ψυχολογικῶν συνειρμῶν. Ὁ ἕνας εἶναι <u>ἡ ἐπαλήθευση μέ τό πείραμα ἤ τήν ἐφαρμογή.</u> Ὁ ἄλλος εἶναι <u>ἡ ἀπόδειξη μέ τά μέσα τῆς λογικῆς.</u> Καί ὁ ἕνας καί ὁ ἄλλος ἀπό τούς δύο αὐτούς τρόπους παρουσιάζουν συγχρόνως ἕνα μεγάλο μειονέκτημα καί ἕνα μεγάλο πλεονέκτημα. Ἡ ἐπαλήθευση μέ τό πείραμα ἤ τήν ἐφαρμογή πάνω σέ συγκεκριμένα ζητήματα τῆς πράξεως ἤ τῆς θεωρίας <u>δέ φωτίζει ἐσωτερικά</u> τό ζήτημα, δέ μᾶς ἐξηγεῖ <u>γιατί</u> οἱ ἰσχυρισμοί μας εἶναι ἀναγκαστικά ἀληθεῖς, ἀλλά μᾶς προσφέρει μιά μαρτυρία <u>ἀπ' ἔξω</u>, πῶς αὐτό πού προτείνομε εἶναι ἀληθινό, ἀφοῦ ὄχι μόνο δέ συγκρούεται μέ τά πράγματα, ἀλλ' ἀντιθέτως ἐναρμονίζεται καί συμβιβάζεται μέ αὐτά. Ἔχει λοιπόν τό προσόν - καί αὐτό εἶναι τό μεγάλο πλεονέκτημα της - ὅτι στερεώνει ὅσο τίποτε ἄλλο τήν πίστη στήν ἀλήθεια τῶν ἰσχυρισμῶν τῆς ἐπιστήμης καί γι' αὐτό ἀποτελεῖ τή λυδία λίθο γιά τή βάσανο κάθε θεωρίας.

Ἐξ ἄλλου ἡ ἀπόδειξη μέ τά μέσα τῆς λογικῆς ἔχει τό μεγάλο προσόν ὅτι φωτίζει τό ζήτημα ἐκ τῶν ἔνδον, δίνει, ὅπως λέμε, λογική ἐξήγηση καί συγχρόνως διέξοδο καί ἱκανοποίηση στή μεταφυσική ὁρμή, πού εἶναι ἔμφυτη στόν ἄνθρωπο, νά μάθει γιατί τοῦτο ἤ ἐκεῖνο εἶναι ἀλήθεια ἤ, μέ τά λόγια τοῦ Ἀριστοτέλη, διατί ἕκαστα γίγνεται. Ἐδῶ πρόκειται προφανῶς γιά τήν ἱκανοποίηση ἑνός βαθύτατα ριζωμένου ἐνστίκτου, πού μαρτυρεῖ ἀκριβῶς ἀπό ποῦ προέρχονται τ'ἀνώτερα ἐκεῖνα πνευματικά συναισθήματα καί οἱ βαθειές χαρές πού συναρπάζουν τίς εὐαίσθητες ψυχές τῶν διανοουμένων ἀνθρώπων.

Στό βάθος ὅμως κάθε συλλογισμοῦ ὁσονδήποτε αὐστηροῦ κεῖται πάντοτε μιά προϋπόθεση: ὅτι συλλογιζόμαστε σωστά καί μιά ἀμφιβολία: μήπως δέν συλλογιζόμαστε σωστά. Ἡ ἀμφιβολία αὐτή πλανιέται σάν φάντασμα πάνω ἀπό κάθε ἰσχυρισμό πού ἀντλεῖ τό κῦρος του ἀπό μιά καθαρή θεωρία. Ἔχομε κριτήριο ἁλάνθαστο γιά ν'ἀναγνωρίζωμε ὅτι ἡ σειρά τῶν σκέψεών μας εἶναι σωστή; Τέτοιο ὑπέρτατο κριτήριο μάταια θ'ἀναζητήσουμε μέσα στά πλαίσια τῆς ἀνθρώπινης λογικῆς καί ὅ,τι ἀπό συμφώνου ὀνομάζομε βεβαιότητα δέν εἶναι γιά τό νοῦ παρά μιά μεγάλη πιθανότητα.

Βλέπομε τώρα καθαρά πῶς ἡ ἀπόδειξη ὑπερέχει ἐκεῖ ὅπου ἀκριβῶς ὑστερεῖ ἡ πειραματική ἐπαλήθευση, καί ὑστερεῖ πάλι ἡ πρώτη ἐκεῖ ὅπου ὑπερέχει ἡ δεύτερη. Εἶναι λοιπόν εὐνόητο πῶς ὁ συνδυασμός καί τῶν δύο μαζί θά δώσει στήν ἐπιστήμη τά μέσα, πού θά τῆς ἐπιτρέψουν ἀπό τό ἕνα μέρος νά ἐξηγήσει τούς ἰσχυρισμούς της μέ τό φῶς τῆς θεωρίας καί ἀπό τό ἄλλο μέρος νά ἐπιβεβαιώσει τό κῦρος τους μέ τή βάσανο τοῦ πειράματος. Ἔτσι ἱκανοποιεῖ καί τίς δύο ἀπαιτήσεις τῆς ἀνθρώπινης ἰδιοσυγκρασίας γιά τήν ἀποδοχή τῆς ἀλήθειας. Τή μαρτυρία τῆς ἐμπειρίας ἀπό τό ἕνα μέρος καί τῆς νοήσεως ἀπό τό ἄλλο, τῶν δύο δηλαδή μαγικῶν τόπων, μεταξύ τῶν ὁποίων κυλᾶ σά γάργαρο νερό ἡ ἀνθρώπινη συνείδηση.

Ἡ διδακτική τῶν Μαθηματικῶν δέν πρέπει ποτέ νά παραγνωρίζει τό οὐσιῶδες αὐτό γεγονός. Ἡ ὁλοκλήρωση τῆς θεωρητικῆς γνώσεως πρέπει νά γίνεται ἀπό δύο πλευρές. Ἡ μία θά προσφέρει τή χαρά τοῦ γιατί ἔτσι συμβαίνουν τά πράγματα, καί ἡ ἄλ-

λη τή χαρά τῆς ἐπιβεβαιώσεως τῶν στοχασμῶν μας μέ τή μαρτυρία τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου ἤ τῆς ἀποκατεστημένης θεωρίας. Ἔτσι ἐξηγεῖται ἡ παιδαγωγική ἀνάγκη τοῦ παραδείγματος στή διδασκαλία.

"Κάθε ἄτομο", λέγει ὁ Laurent, "πού ἐκθέτει μιά θεωρία, πρέπει, γιά νά πείσει τούς ἄλλους, νά ὑποβάλει τελικά τήν ἀλήθεια πού ἀποδεικνύει μέ συλλογισμούς στόν ἔλεγχο τοῦ πειράματος. Τό πείραμα τοῦτο στά Μαθηματικά συνίσταται σέ ἀριθμητικές ἤ γεωμετρικές ἐφαρμογές (παραδείγματα) τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς θεωρίας, ὅπου τοῦτο εἶναι δυνατό, ἤ στήν ἐξέταση εἰδικῶν περιπτώσεων πού ἐπιτρέπουν νά ξαναβροῦμε προτάσεις, πού ἔχουν εὑρεθεῖ ἤ ἀποδειχθεῖ μέ σκέψεις διαφορετικές ἀπό ἐκεῖνες ἐπάνω στίς ὁποῖες στηριχθήκαμε γιά νά φτάσωμε στό θεώρημα, πού ζητοῦμε νά ἐπαληθεύσωμε. Δέν πρέπει νά λησμονοῦμε πῶς οἱ πειραματικές ἐπαληθεύσεις ἐπιβάλλονται στό πνεῦμα περισσότερο ἀπό ἄλλες πού θεωροῦμε λογικά ἀκαταμάχητες. Ἡ ἱστορία διδάσκει πῶς συλλογισμοί, πού ἦσαν ἀπό μακροῦ χρόνου δεκτοί σάν σωστοί, ὑποβλήθηκαν στόν ἔλεγχο καί, ἔπειτα ἀπό αὐστηρή κριτική, ἀπορρίφτηκαν μαζί μέ τά συμπεράσματά τους".

3. Ἐδῶ ἐξετάζομε τήν ἀπόδειξη ἀπό καθαρά λογική ἄποψη σάν ὄργανο τῆς θεωρίας γιά τήν κατοχύρωση τῆς ἀλήθειας. Οἱ σπουδαιότερες μορφές πού ἔγιναν ἀντικείμενο τῆς μελέτης μας εἶναι ἡ σύνθεση, ἡ ἀνάλυση καί ἡ εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή. Ἡ πρώτη ἔρευνα τῶν βασικῶν αὐτῶν τρόπων τοῦ σκέπτεσθαι εἶχε γίνει, ὅπως εἶναι γνωστό, ἀπό τούς Ἀρχαίους Ἕλληνες καί μάλιστα ἀπό τή Σχολή τοῦ Πλάτωνα, στόν ὁποῖον ἀποδίδεται ἰδιαίτερα ἡ ἀνάπτυξη τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου καί ἡ χρησιμοποίηση τῶν γεωμετρικῶν τόπων. Στό 7ο βιβλίο τῆς Συναγωγῆς τοῦ Πάππου (τέλος τοῦ 3ου αἰῶνα μ.Χ.) ὑπάρχει μάλιστα ἡ πληροφορία ὅτι σχετική ἐργασία, ὑπό τόν τίτλο Ἀναλυόμενος τόπος, εἶχε γραφεῖ κατά τούς Ἀλεξανδρινούς χρόνους ἀπό τρεῖς ἄνδρες: τόν στοιχειωτή Εὐκλείδη, τόν Ἀπολλώνιο τόν Περγαῖο καί τόν Ἀρισταῖο τόν πρεσβύτερο*.

* Βλ. Κ. Κωβαίου: Περί ἀντιστροφῆς καί ἀναστροφῆς τῶν ὑποθετικῶν σωρευτῶν. Ἄρθρον δημοσιευθέν εἰς τό ὑπ' ἀρ. ΚΘ/1954 Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας.

Φυσικά, οἱ τρεῖς ἀποδεικτικές τρόποι, πού ἀναφέραμε, δέν εἶναι οἱ μοναδικοί πού χρησιμοποιεῖ ὁ νοῦς στήν ἄγρυπνη προσπάθειά του νά ὀργανώσει λογικά τό περιεχόμενο τῆς συνειδήσεως. Θά μπορούσαμε ν'ἀναφέρωμε ἀκόμη π.χ. τήν πλήρη ἐπαγωγή, τήν διάβαση στό ὅριο κ.λ.π.Ἀλλά οἱ τρεῖς, πού, πρόκειται νά ἐξετάσωμε ἐδῶ καί τούς ὁποίους χαρακτηρίσαμε σπουδαιότερους, εἶναι τόσο βασικοί καί ἔχουν τέτοια γενικότητα, πού θά μποροῦσε κανείς νά ἰσχυρισθεῖ, χωρίς καμμία δόση ὑπερβολῆς, πῶς ἀποτελοῦν θεμελιακές μορφές τῆς νοήσεως.Ὁ νοῦς δουλεύει μ'αὐτούς τούς τρόπους κάθε στιγμή πάνω στό ὑλικό τῆς ἐμπειρίας, χωρίς ἐμεῖς νά ἔχωμε συνείδηση τῆς ἀπίστευτα γρήγορης καί γόνιμης αὐτῆς δραστηριότητας.

Τί εἶναι πραγματικά αὐτό πού κάνει ὁ στοχασμός στή κίνησή του πρός τήν ἀπόδειξη μιᾶς ἀλήθειας ἤ ἑνός ψεύδους; Ποιά βήματα ἀκολουθεῖ καί ποιές εἶναι οἱ σταθερές μορφές αὐτοῦ τοῦ λογικοῦ συνειρμοῦ, πού ὀνομάζεται ἀπόδειξη; Πῶς ὑφαίνει τό αἰθέριο ὑλικό τῆς ἐξωτερικῆς καί ἐσωτερικῆς ἐμπειρίας καί πῶς ἀνεγείρει μέσα στή συνείδηση τά τρόπαια τῆς ἀλήθειας, δηλαδή τήν ἐπιστήμη;

Τά ζητήματα αὐτά ἀνήκουν βασικά στή θιλοσοφία.Ἡ ψυχολογία πρώτη θά ἐξετάσει ποιές ψυχικές ἐνέργειες καθορίζουν τήν εἰδική αὐτή πορεία τῆς σκέψεως καί πῶς αὐτή συνδέεται αἰτιολογικά ἤ τελολογικά μέ τά ἄλλα γεγονότα τοῦ ψυχικοῦ βίου. Ἡ Λογική, ὕστερα, θά ἐξετάσει εἰδικώτερα τό τυπικό βάδισμα τοῦ στοχασμοῦ καί θά διατυπώσει τούς κανόνες τῆς ὀρθῆς πορείας.θά κάμει ἀνατομία τῆς σκέψεως, ἐξακρίβωση τῆς λειτουργίας καί τῶν τυπικῶν μορφῶν της.

Διασάφηση αὐτοῦ τοῦ εἴδους δέν γίνεται στά σχολικά ἐγχειρίδια τῆς τυπικῆς Λογικῆς, ἤ τουλάχιστο δέν γίνεται στό βάθος πού ἀπαιτεῖ ἡ ἐπιστημονική ἔρευνα. Παρουσιάζεται ἔτσι ἕνα κενό, τοῦ ὁποίου τίς συνέπειες, εἶναι εὔκολο νά διαπιστώσουμε στήν Ἐκπαίδευση. Σκοτεινές καί λογικά ἄστοχες διατυπώσεις βρίθουν σέ πολλά διδακτικά ἐγχειρίδια ὅλων τῶν βαθμίδων, πού, ὅπως εἶναι φυσικό, ἐπιδροῦν δυσμενῶς στήν καθαρότητα τῆς διδασκαλίας, στή σωστή καλλιέργεια τοῦ ἐπιστημονικοῦ πνεύματος

καί στήν προαγωγή τῆς Πνευματικῆς ὡριμότητας τῶν μαθητῶν*.

4. Σέ ἐκτενές ἄρθρο, πού δημοσιεύθηκε στό περιοδικό ΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ ΖΩΗ ('Αρ. 35,36,37/1955) μέ τόν τίτλο "'Η Μαθηματική 'Απόδειξη", ἐκάμαμε σαφές πώς ἡ ἀνατομία τῆς μαθηματικῆς προτάσεως μέ τήν ἀνάλυσή της σέ ἁπλές συνθῆκες εἶναι ἀπαραίτητη γιά νά καταλάβωμε πῶς διαχειρίζεται κάθε φόρα ὁ νοῦς τά στοιχεῖα τοῦ θεωρήματος καί ποιά εἶναι ἀκριβῶς τά βήματα πού ἀκολουθεῖ στήν ἀπόδειξη τῆς ἀναγκαιότητάς του.

'Εξ ἄλλου,σέ μελέτη πού δημοσιεύθηκε στό ΔΕΛΤΙΟΝ τῆς ΕΜΕ (Τόμος Κθ: Α,Β,Γ/1955) μέ τίτλο: "Περί ἀντιστροφῆς καί ἀναστροφῆς τῶν ὑποθετικῶν σωρειτῶν",γίνεται λογική διασάφηση τῆς 'Αναλύσεως καί Συνθέσεως σάν γενικῶν τρόπων λειτουργίας τῆς νοήσεως.

'Υπολείπεται ἡ ἐξέταση τῆς ἀπαγωγῆς στό ἄτοπο μέσα στά πλαίσια τῶν ἰδεῶν πού ἀναφέρθησαν καί αὐτήν ἀκριβῶς ἔχει σάν ἀντικείμενο ἡ μελέτη πού ἀκολουθεῖ. Φιλοσοφική διασκόπηση ἀπό γνωσιολογική ἄποψη τῆς ἀξίας τῆς ἀποδείξεως ἐν γένει καί ἀναφορά ἰδιαίτερα στίς διάφορες ἀπόψεις, πού πρεσβεύουν οἱ ποικίλες λόγικο-φιλοσοφικές σχολές σχετικά μέ τήν ἀπαγωγή στό ἄτοπο, εἶναι ἐκτός τῶν στόχων τῆς μελέτης μας.

---

* Μ.χ. Κ. Κωβαίου: 'Η θεωρία τῶν Μαθηματικῶν στά Γυμνάσια. "Αρθρο δημοσιευθέν στό περιοδικό "Παιδεία καί Ζωή",'Αθῆναι,Τεύχη 20-21/15 Σεπτεμβρίου 1953.

Η ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ

1.Ἡ ἀπόδειξη μέ τή μέθοδο τῆς "εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς"στηρίζεται ἐπάνω στό γνωστό κανόνα τῆς Λογικῆς γιά τό κῦρος δύο ἀντιφατικῶν προτάσεων*. Σύμφωνα μέ αὐτό τόν κανόνα, ἐάν ἀληθεύει ἡ πρόταση:

(Α) Η → Ε (ἐάν ἀληθεύει Η, ἀληθεύει Ε)

τότε θά ψεύδεται ἡ ἀντιφατική της:

(α) Η → οὐ Ε (ἐάν ἀληθεύει Η, δέν ἀληθεύει Ε)

καί ἀντιστρόφως, ἄν ἡ (α) ψεύδεται, θ'ἀληθεύει κατ'ἀνάγκην ἡ (Α). Συνάγεται λοιπόν πῶς γιά ν'ἀποδείξωμε τήν ἀλήθεια τῆς προτάσεως (Α), ἀρκεῖ ν'ἀποδείξωμε τό ψεῦδος τῆς ἀντιφατικῆς της (α). Πῶς ὅμως θ'ἀποδείξωμε τό ψεῦδος της;

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ ψεύδους εἶναι συχνά πολύ εὐκολώτερη ἀπό τήν ἀπόδειξη τῆς ἀλήθειας μιᾶς προτάσεως, γιατί τό ψεῦδος εἶναι ἕνας ἰσχυρισμός πού ἔρχεται σέ σύγκρουση μέ τήν παραδεκτή καί ἀποκατεστημένη γνώση καί ἔτσι ἀποκρούεται μέ δύναμη ἀπό τό στοχασμό σάν κάτι τό ἐπικίνδυνο, πού ἔρχεται νά διαταράξη τή λογική του ἐσωτερική τάξη καί ἁρμονία. Γι'αὐτό,κρι-

---

* Βλ.Μιχ. Κ. Κωβαίου: Ἡ Μαθηματική Ἀπόδειξις. "Παιδεία καί Ζωή" 1955, τεῦχος 35, σ. 49-58.

τήριο τῆς ψευδοῦς γνώσεως εἶναι ἡ σύγκρουση πρός ἀναγνωρίσμένες ἀλήθειες (ὑποθέσεις, αἰτήματα, θεωρήματα), δηλαδή τό ἄτοπο. Καμμιά γνώση δέν ἠμπορεῖ νά γίνει δεκτή σάν ἀληθινή, ἄν ὁδηγεῖ σέ ἄτοπα συμπεράσματα.

2. Στή καθημερινή ζωή βρισκόμαστε συχνότατα στήν ἀνάγκη ν'ἀποδείξωμε τό ψεῦδος ἑνός ἰσχυρισμοῦ. Καί γι'αὐτό ἡ ἐφαρμογή τῆς μορφῆς αὐτῆς τοῦ σκέπτεσθαι μέ τήν ἀπαγωγή στό ἄτοπο εἶναι συχνότερη ἀπό ὅ,τι θά ἠμποροῦσε κανείς νά φαντασθεῖ.Δέν εἶναι ὑπερβολή ἄν ἰσχυριστοῦμε πώς ἡ εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή εἶναι διαρκῶς παροῦσα στήν καθημερινή διαλεκτική καί πώς πρέπει νά συγκαταριθμεῖται στούς γενικούς τρόπους πού ἀκολουθεῖ ἡ νόηση στήν ἔρευνα τῆς ἀλήθειας. Τυπικό παράδειγμα εἶναι ἡ ἀπόδειξη τῆς ἀθωότητας τοῦ κατηγορουμένου στά ποινικά δικαστήρια μέ τό ἐπιχείρημα τοῦ ἄλλοθι.Ὁ συνήγορος προβάλλει τόν ἀκόλουθο συλλογισμό*: "Ὁ πελάτης μου δέν εἶναι ἔνοχος (ἀποδεικτέα πρόταση). Γιατί, ἄς παραδεχθοῦμε πώς εἶναι ἔνοχος (ἀντιφατική τῆς προηγουμένης πρότασης) τότε θἄπρεπε, φυσικά, νά βρισκόταν στόν τόπο τοῦ ἐγκλήματος τήν ὥρα πού ἔγινε τό ἔγκλημα.Ἀλλά τήν ἴδια ὥρα, αὐτός βρισκόταν σέ ἄλλη πόλη, ὅπως μαρτυροῦν τά γεγονότα.Ἔτσι φθάνομε στό συμπέρασμα πώς ὁ ἄνθρωπος αὐτός βρισκόταν τήν ἴδια ὥρα σέ δυό διάφορους τόπους, πρᾶγμα, ὅπως ξέρομε, ἀδύνατο, ἄτοπο. Ἄρα εἶναι ψεῦδος ὅτι ὁ κατηγορούμενος εἶναι ἔνοχος καί ἀληθές ὅτι εἶναι ἀθῶος (ἀποδεικτέον).

3.Ἄλλο ἀξιοσημείωτο παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἀποτελεῖ ὁ συλλογισμός, μέ τόν ὁποῖο ὁ Γαλιλαῖος (1564-1642) ἀπέδειξε τό ψεῦδος τοῦ ἰσχυρισμοῦ τοῦ Ἀριστοτέλη (384-323), ὅτι:

"τά βαρύτερα σώματα πίπτουν ταχύτερα ἀπό τά ἐλαφρότερα".

Στό βιβλίο του DIALOGHI SOPRA DUE NUOVAE SCIENZE, ὁ περίφημος πειραματιστής τῆς Πίζας διατυπώνει τόν ἀκόλουθο ἀκαταμάχητο συλλογισμό:

α) Ἄς παραδεχθοῦμε πρός στιγμή πῶς ἀληθεύει ἡ πρόταση:

---

*Προϋποτίθεται,ὅτι τήν πρόταση Η→Ε ἐκφέρει τό κατηγορητήριο:"ἐκ τῶν στοιχείων πού ἔχει ὑπ'ὄψη του τό δικαστήριο συνάγεται,ὅτι ὁ κατηγορούμενος εἶναι ἔνοχος".

"Τό βαρύτερο σῶμα πίπτει ταχύτερα ἀπό τό ἐλαφρότερο"

β) Τότε ἕνας μεγάλος λίθος, π.χ., ἔπειτα ἀπό ὡρισμένο χρόνο, θ'ἀποκτήσει μιά ταχύτητα, ἔστω 10 μέτρα κατά δευτερόλεπτο, ἐνῶ ἕνας ἄλλος λίθος, μικρότερος, θ'ἀποκτήσει μιά ταχύτητα μικρότερη, ἔστω 5 μέτρα κατά δευτερόλεπτο.

γ) Ἄν τώρα δέσωμε μαζί τούς δύο λίθους καί τούς ἀφίσωμε νά πέσουν σάν νά ἦταν ἕνα σῶμα, τότε ὁ μεγάλος, σάν ταχύτερος, θά βιάζει τόν μικρότερο νά τρέξει περισσότερο. Ὁ μικρότερος πάλι, σάν βραδύτερος, θά βιάζει τόν μεγαλύτερο νά τρέξει λιγότερο. Ἔτσι θά προκύψει ἀναγκαστικά μιά νέα ταχύτητα μεγαλύτερη, φυσικά, ἀπό τά 5 καί μικρότερη ἀπό τά 10 μέτρα κατά δευτερόλεπτο.

δ) Ἀλλά τό νέο σῶμα, πού ἀποτελεῖται ἀπό τούς δύο λίθους μαζί, εἶναι φυσικά βαρύτερο ἀπό τόν μεγαλύτερο λίθο καί σύμφωνα μέ τήν παραδοχή σας, θά τρέξει περισσότερο, δηλαδή μέ ταχύτητα μεγαλύτερη τῶν 10 μέτρων κατά δευτερόλεπτο.

ε) Ἔτσι καταλήγουμε στό συμπέρασμα πῶς τό νέο σῶμα θά ἔχει ταχύτητα μικρότερη καί συγχρόνως μεγαλύτερη τῶν 10 μέτρων κατά δευτερόλεπτο. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο. Καί συνεπῶς ὁ ἰσχυρισμός πού ἐκάμαμε δεκτό στήν ἀρχή εἶναι ψευδής.

4. Ἡ εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή συναντᾶται πολύ συχνά στά Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδη. Καί κατά τούς νεώτερους χρόνους πολλοί συγγραφεῖς ἔδειξαν κάποια προτίμηση σ'αὐτή τή μέθοδο, χάρις στήν ἀπόλυτη πειστικότητα, μέ τήν ὁποίαν ἐπιβάλλει τήν ἀποδεικτέα ἀλήθεια. Ἔχει ὅμως τό μειονέκτημα νά μή φωτίζει ἐσωτερικά τήν οὐσία τῆς ἀποδεικτέας ἀλήθειας. Μᾶς ἐξαναγκάζει νά δεχθοῦμε τήν ἀλήθεια τοῦ θεωρήματος ἀπό τήν ἀναστάτωση πού θ'ἀκολουθοῦσε μέσα στό στοχασμό μας, ἄν παραδεχόμαστε τό ψεῦδος του. Γι' αὐτό δέν ἱκανοποιεῖ κατά βάθος τό πνεῦμα, πού ἀρέσκεται πρό πάντων στή θεώρηση τῆς ἀλήθειας μέσα ἀπό μιά αὐστηρή διαδοχή ἀποδεικτικῶν λόγων, μέ τούς ὁποίους ἑρμηνεύεται τό γιατί ἀπό τήν ὑπόθεση τοῦ θεωρήματος συνάγεται ἡ ἀλήθεια τοῦ συμπεράσματος. Μόλον τοῦτο ἀποτελεῖ σπουδαιότατο ὄργανο τοῦ ἀποδεικτι -

κοῦ συστήματος τῆς μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, ἀπό τόν ὁποῖον εἶναι ἀδύνατο νά παραιτηθοῦμε. Πολλές φορές οἱ προσπάθειες μας νά βροῦμε μιά συνθετική ἤ ἀναλυτική ἀπόδειξη ἑνός θεωρήματος ὁδηγοῦν σέ ἀδιέξοδο, εἴτε γιατί δέν ὑπάρχει τέτοια ἀπόδειξη, εἴτε γιατί ἡ εὕρεσή της ξεπερνᾶ τήν ἀποδεικτική μας δύναμη . Καταφεύγουμε τότε στήν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή. Χωρίς αὐτή, πολλά ζητήματα τῶν μαθηματικῶν θά περίμεναν ἀκόμη τή λύση τους καί ἡ ὅλη ἐξέλιξη τῆς ἐπιστήμης θά συναντοῦσε ἀνυπέρβλητες δυσχέρειες.

5.Ἀπό ὅσα εἴπαμε παραπάνω, μποροῦμε νά συνοψίσωμε ὡς ἑξῆς τήν οὐσία τῆς μεθόδου:

Προκειμένου ν'ἀποδείξωμε τήν ἀλήθεια ἑνός ἰσχυρισμοῦ ὑπό τή μορφή (A) $H \to E$, σχηματίζομε τήν ἀντιφατική πρόταση (α): $H \to$ οὐ E, καί ὁρμώμενοι ἀπό αὐτήν, τήν ὁποίαν ὑποθέτομε πρός στιγμή σάν ἀληθῆ, κατασκευάζομε μιά σειρά ἀπό διαδοχικές ἀκολουθίες μέχρις ὅτου καταλήξωμε σέ κάποια συνθήκη^{K},πού νά ἔρχεται σέ ἀντίφαση πρός κάποιαν ἀδιαφιλονίκητη ἀλήθεια . Τότε συνάγομε μέ βεβαιότητα πώς ἡ (α) ψεύδεται καί ἐπομένως πώς ἀληθεύει ἡ ἀποδεικτέα (A).

Συμβολικά, θά μπορούσαμε νά δώσωμε τόν τύπο τῆς μεθόδου ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{l} (\alpha).....H \to \text{οὐ} \\ \qquad \text{οὐ } E \to E_1 \\ \qquad\quad E_1 \to E_2 \\ \qquad\quad E_2 \to K \\ \qquad\quad H \to \text{οὐ } K \\ \hline \end{array}$$

Ἄρα ψευδής ἡ (α) καί ἀληθής ἡ:

(A) $\quad H \to E$

Γιά νά καταλάβωμε καλύτερα τό μηχανισμό τῆς μεθόδου θά παραθέσωμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.

"Ἐάν τμῆμα εὐθείας τιθέμενο ἐπάνω σέ ἄλλο τμῆμα εὐθείας ἐφαρμόζει, θά ἐφαρμόζει καί ὅταν τεθεῖ ἀντιστρόφως".

Δηλαδή, ἄν τό τμῆμα ΓΔ ἐφαρμόζει ἐπί τοῦ ΑΒ, ὅταν τεθεῖ ἐπάνω σ'αὐτό κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε τό Γ νά πέσει ἐπί τοῦ Α, τότε θά ἐφαρμόσει καί ὅταν τεθεῖ κατά τέτοιο τρόπο πού νά πέσει τό Δ στό Α.

Ἀ π ό δ ε ι ξ η: Γιατί ἄν κατά τή δεύτερη ἐπίθεση τό ΓΔ δέν ἐφάρμοζε ἐπάνω στό ΑΒ θά ἦτο τό ἕνα μέρος τοῦ ἄλλου καί ἐπομένως θά ἦταν ἄνισα. Ἀλλά ἐξ ὑποθέσεως τά δύο τμήματα ἐφάρμοσαν κατά τήν πρώτη ἐπίθεση καί ἐπομένως εἶναι ἴσα. Φθάσαμε λοιπόν σέ ἄτοπο, γιατί δύο μεγέθη δέν ἠμποροῦν νά εἶναι συγχρόνως ἴσα καί ἄνισα. Τό θεώρημα λοιπόν ἀληθεύει.

Παράδειγμα 2.

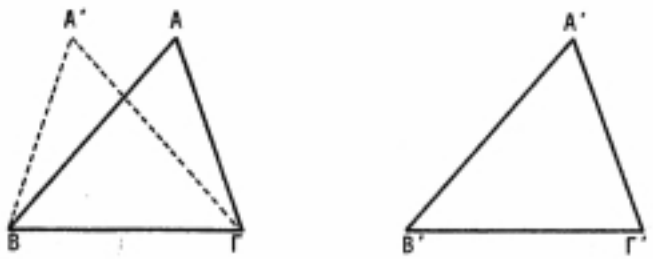
"Εὐθύγραμμα τμήματα πού εἶναι κατά μέρη ἴσα εἶναι καί κέραια ἴσα".

Ἄν δηλαδή δύο τμήματα ἀποτελοῦνται ἀπό ἰσάριθμα μέρη ἴσα, ἕνα πρός ἕνα, τότε καί ὁλόκληρα τά τμήματα θά εἶναι ἴσα.

Ἀ π ό δ ε ι ξ η: Γιατί ἄν παραδεχθοῦμε πώς ὁλόκληρα δέν εἶναι ἴσα, τότε δέν θά ἐφαρμόζουν καί τό ἕνα θά εἶναι μέρος τοῦ ἄλλου. Ἀλλά ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἴσα κατά μέρη, καί ἐπομένως πρέπει νά ἐφαρμόζουν κατά τεμάχια. Πρᾶγμα ἄτοπο, γιατί δύο τμήματα δέν ἠμποροῦν νά ἐφαρμόζουν καί νά μή ἐφαρμόζουν συγχρόνως. Ἄρα τό θεώρημα ἀληθεύει.

Παράδειγμα 3.

"Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν τίς τρεῖς πλευρές των ἴσες μίαν πρός μίαν τά τρίγωνα εἶναι ἴσα".



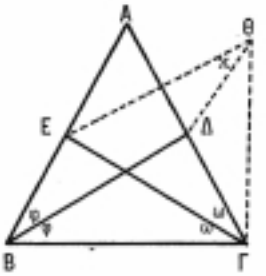
Ἀ π ό δ ε ι ξ η: Θά ὑποθέσωμε πρός στιγμήν,ὅτι τά δύο τρίγωνα, πού ἔχουν τίς τρεῖς πλευρές ἴσες μίαν πρός μίαν,εἶναι ἄνισα.Ἄν τότε ἀχθοῦν σέ σύμπτωση οἱ ἴσες πλευρές ΒΓ καί Β'Γ' τά δέ τρίγωνα τοποθετηθοῦν πρός τό αὐτό μέρος τῆς ΒΓ , τότε οἱ κορυφές Α καί Α' δέν θά συμπίπτουν καί θά κεῖνται πρός τό αὐτό μέρος τῆς ΒΓ (ὄχι ἑκατέρωθεν αὐτῆς).

Ἀφοῦ δέν συμπίπτουν σχηματίζονται δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα τά ΒΑΑ' καί ΓΑΑ'. Κατά γνωστό θεώρημα τῆς μεσοκαθέτου εὐθύγραμμου τμήματος, τά σημεῖα Β καί Γ πρέπει νά βρίσκονται ἐπάνω στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΑ'.Ἡ μεσοκάθετος τῆς ΑΑ' ἐπειδή ἔχει μέ τήν κοινή πλευρά ΒΓ δύο κοινά σημεῖα συμπίπτει μέ αὐτήν κατά τό γνωστό ἀξίωμα τῆς εὐθείας.Ἡ πλευρά λοιπόν ΒΓ περνᾶ ἀπό τό μέσον τῆς εὐθείας ΑΑ', καί ἐπομένως τά σημεῖα Α καί Α' βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ΒΓ. Ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο, γιατί εἴπαμε ἐξ ἀρχῆς πώς τά σημεῖα Α καί Α' βρίσκονται πρός τό αὐτό μέρος τῆς ΒΓ καί ὄχι ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

Παράδειγμα 4.

"Ἄν δύο ἐσωτερικές διχοτόμοι τριγώνου εἶναι ἴσες, τό τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές".

Ἔστωσαν ΒΔ καί ΓΕ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καί Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄν ΒΔ = =ΓΕ θ'ἀποδείξωμε πῶς τό τρίγωνο εἶναι κατ'ἀνάγκην ἰσοσκελές, δηλαδή οἱ πλευρές ΑΒ καί ΑΓ θά εἶναι ἴσες.



Ὑποθέτομε πρός στιγμήν πώς δέν εἶναι ἰσοσκελές. Καί ἔστω πῶς ἡ πλευρά ΑΓ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν ΑΒ. Κατά γνωστό θεώρημα θά εἶναι τότε καί ἡ γωνία φ (ἥμισυ τῆς Β) θά εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν ω (ἥμισυ τῆς γωνίας Γ).

Φέρομε τήν ΕΘ//ΒΔ καί τήν ΔΘ//ΒΕ. Σχηματίζεται τό παραλληλόγραμμο ΒΔΘΕ.Ἐπειδή οἱ ἀπέναντι γωνίες παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες,θά εἶναι χ=φ.Ἄν φέρωμε τώρα καί τήν εὐθεῖα Γθ, σχηματίζεται τό τρίγωνο ΕΓθ, τό ὁποῖον εἶναι ἰσοσκελές,

άφοῦ ἔχει πλευρές τίς εὐθεῖες ΕΓ καί ΕΘ, πού εἶναι ἴσες γιατί ἡ ΕΘ=ΒΔ, ἔνεκα τοῦ παραλληλογράμμου ΒΔΘΕ, καί ἡ ΒΔ=ΓΕ ἐξ ὑποθέσεως (οἱ διχοτόμοι, εἶναι ἴσες).

Ἐξ ἄλλου ὅμως,ἔχομε ὑποθέσει ὅτι φ>ω καί ἄρα χ>ω. Ἀπό τή σχέση αὐτή, ἄν λάβωμε ὑπ'ὄψη τό προηγούμενο συμπέρασμα πώς τό τρίγωνο ΕΓΘ εἶναι ἰσοσκελές, ποριζόμαστε τήν ἐξῆς σχέση : γων ΓΘΔ<γων ΘΓΔ.Ἀπό αὐτήν πάλι, κατά γνωστό θεώρημα, συνάγομε τήν ἀνισότητα τῶν πλευρῶν ΓΔ καί ΔΘ τοῦ τριγώνου ΘΓΔ, δηλαδή ΓΔ<ΒΕ.Ἀλλά τότε τά τρίγωνα ΓΕΒ καί ΒΔΓ ἔχουν δύο πλευρές ἴσες μίαν πρός μίαν καί τίς τρίτες ἄνισες. Σύμφωνα μέ γνωστό θεώρημα, ἀπέναντι τῆς μεγαλύτερης πλευρᾶς βρίσκεται μεγαλύτερη γωνία. Θά ἔχωμε λοιπόν φ<ω. Τό συμπέρασμα ὅμως αὐτό ἔρχεται σέ ἀντίφαση μέ τήν ὑπόθεση. Γιατί εἴπαμε πῶς ἡ γωνία φ εἶναι μεγαλύτερη τῆς ω. Τό θεώρημα λοιπόν ἀπεδείχθη.

6. Στά παραδείγματα πού ἐδώσαμε, τό ἄτοπο συνίσταται στό γεγονός πώς κάποια ἀκολουθία ἀντιφάσκει πρός μία συνθήκη, πού ἐκάμαμε δεκτή στήν ὑπόθεση ἀπό τήν ὁποία ξεκινήσαμε.

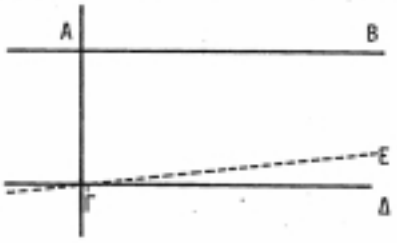
Τό ἄτοπο ὅμως παρουσιάζεται πολλές φορές καί κατ' ἄλλο τρόπο. Σάν ἀντίθεση πρός ἕνα αἴτημα ἤ πρός ἕνα γνωστό θεώρημα. Πάλι θά συμπεράνωμε πώς ἡ ὑπόθεση ἀπό τήν ὁποία ξεκινήσαμε εἶναι ψευδής (δηλαδή ἡ πρόταση Η → οὐ Ε), ἐπομένως ὅτι ἡ ἀποδεικτέα πρόταση (Η → Ε) εἶναι ἀληθής.

Ἀκολουθοῦν μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.

"Ἄν δύο εὐθεῖες εἶναι παράλληλες, κάθε εὐθεῖα πού εἶναι κάθετος ἐπί τήν μία εἶναι κάθετος καί ἐπί τήν ἄλλη".

Ἔστωσαν δύο παράλληλες εὐθεῖες, ΑΒ//ΓΔ καί τρίτη εὐθεῖα ΑΓ κάθετος ἐπί τήν ΑΒ. Θ'ἀποδείξωμε πῶς εἶναι κάθετος καί ἐπί τήν ΓΔ.

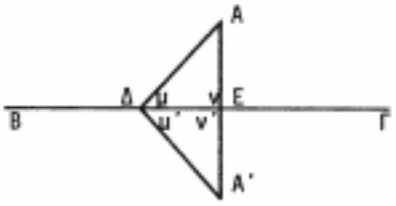


Ἀ π ό δ ε ι ξ η: Γιατί ἄν ἡ ΑΓ δέν εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΓΔ, τότε ἠμπορῶ νά φέρω στό σημεῖο Γ τήν κάθετο ΓΕ ἐπί τήν ΑΓ. Τότε ἡ ΓΕ καί ἡ ΑΒ εἶναι παράλ-

λες άφοῦ καί οἱ δύο εἶναι κάθετες ἐπί τήν αὐτήν εὐθεῖα ΑΓ. Ἔτσι φθάνομε στό συμπέρασμα πώς ἀπό τό Γ ὑπάρχουν δύο εὐθεῖες παράλληλες πρός τήν ΑΒ. Ἡ ΓΔ καί ἡ ΓΕ. Αὐτό εἶναι προφανῶς ἄτοπο. Γιατί κατά τό γνωστό μας αἴτημα: ἀπό σημείου ἐκτός εὐθείας μιά μόνο παράλληλος ἄγεται πρός τήν εὐθεῖα. Ἡ ἀποδεικτέα λοιπόν πρόταση ἀληθεύει.

Παράδειγμα 2.

"Ἀπό σημεῖο ἐκτός εὐθείας κείμενο μία μόνο κάθετος ἄγεται ἐπί αὐτήν".



Ἔστω Α τό δοθέν σημεῖον. Φέρομε τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΔ καί δεχόμαστε πῶς μιά ἄλλη εὐθεῖα ΔΑ' σχηματίζει γωνίαν μ' ἴσην μέ τήν μ πρός τό ἄλλο μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ. Φέρομε τήν ΔΑ ἐπί τῆς ΔΑ' μέ στροφή περί τήν ΒΓ καί ἑνώνομε τά σημεῖα Α καί Α' μέ τήν εὐθεῖα ΑΑ'.

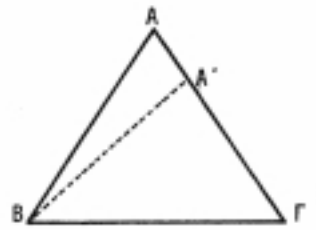
Στρέφομε τώρα περί τήν ΒΓ τό ἐπάνω μέρος τοῦ σχήματος οὕτως, ὥστε ἡ γωνία μ νά συμπέσει μέ τήν ἴση της μ' καί ἡ εὐθεῖα ΔΑ μέ τήν ἴση της ΔΑ'. Τό σημεῖον Ε κατά τήν περιστροφή ἔμεινε σταθερό. Ἡ εὐθεῖα λοιπόν ΕΑ θά συμπέσει μέ τήν ΕΑ' καί ἡ γωνία ν μέ τήν ν'. Ἀφοῦ ἡ γωνία ν εἶναι ἴση μέ τήν ν', ἡ εὐθεῖα ΑΑ' θά εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, κάθετος ἐπί τήν ΒΓ.

Ἀποδείξαμε πῶς ἀπό τό σημεῖον Α ὑπάρχει κάθετος ἐπί τήν ΒΓ. Θ' ἀποδείξωμε τώρα πῶς δέν ὑπάρχει ἄλλη κάθετος. Γιατί ἄν ὑπῆρχε καί μία ἄλλη, π.χ. ἡ ΑΔ, τότε οἱ γωνίες μ καί μ' θά ἦσαν, κάθε μία, ὀρθή καί θά εἶχαν ἄθροισμα δύο ὀρθές. Ξαίρομε πῶς ἐφεξῆς παραπληρωματικές γωνίες ἔχουν τίς μή κοινές πλευρές των ἐπί εὐθείας γραμμῆς. Οἱ πλευρές λοιπόν ΔΑ καί ΔΑ' ἀποτελοῦν μιάν εὐθεῖα πού περνᾶ ἀπό τά σημεῖα Α καί Α'. Ἀλλά ἀπό τά ἴδια σημεῖα περνᾶ καί ἡ ΑΑ'. Θθάνομε λοιπόν στό συμπέρασμα πώς ἀπό δύο σημεῖα περνοῦν δύο διαφορετικές εὐθεῖες. Πρᾶγμα ἄτοπο, γιατί ἀντιβαίνει στό γνωστό αἴτημα, πῶς ἀπό δύο σημεῖα μιά μόνον εὐθεῖα διέρχεται.

Παράδειγμα 3.

"Αν δύο γωνίες τριγώνου είναι ίσες, τότε καί οί άπέναντι πλευρές αύτοῦ είναι ίσες".

Έστω τό τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου οί δύο γωνίες Β καί Γ είναι ίσες. Θά άποδείξωμε πώς καί οί πλευρές ΑΒ καί ΑΓ είναι ίσες.



Α π ό δ ε ι ξ η: Θά ὑποθέσωμε πρός στιγμήν ὅτι δέν είναι ίσες καί ὅτι π.χ. είναι ἡ ΑΒ μικρότερη άπό τήν ΑΓ. Πέρνομε έπάνω στή μεγαλύτερη μῆκος ΓΑ' , ίσο μέ τή μικρότερη πλευρά ΑΒ, καί φέρομεν έπειτα τήν ΒΑ'. Σχηματίζεται τότε τό τρίγωνον Α'ΒΓ, πού είναι μέρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Άν συγκρίνωμε ὅμως τά στοιχεῖα τῶν δύο τριγώνων, θά ἰδοῦμε πώς είναι: ἡ πλευρά ΒΓ κοινή, ἡ γωνία Β τοῦ ἑνός ίση μέ τήν γωνία Γ τοῦ ἄλλου καί ἡ πλευρά ΑΒ τοῦ πρώτου ίση μέ τήν πλευρά ΓΑ' τοῦ δεύτερου. Είναι λοιπόν τά τρίγωνα ίσα. Έτσι φθάνομε στό συμπέρασμα πώς τά δύο τρίγωνα είναι ίσα καί άνισα. Πρᾶγμα ἀδύνατον.

Παράδειγμα 4.

"Αν δύο εύθεῖες είναι κάθετες έπί τήν αύτήν εύθεῖα, είναι παράλληλες".

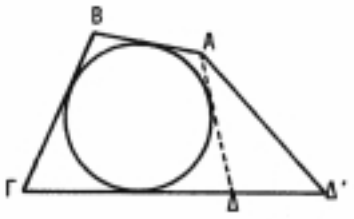
Α π ό δ ε ι ξ η: Γιατί ἄν ὑποθέσωμε πώς δέν είναι παράλληλες, τότε θά συναντῶνται σέ κάποιο σημεῖο. Άπό τό σημεῖον αὐτό θά εἴχαμε τότε δύο εύθεῖες κάθετες έπάνω στήν ἴδια εύθεῖα. Αὐτό ὅμως είναι ἄτοπο, γιατί ἀντιβαίνει στό γνωστό θεώρημα περί μοναδικότητος τῆς καθέτου πού ἄγεται έπί μίαν εύθεῖαν ἀπό σημεῖον ἐκτός αὐτῆς.

Παράδειγμα 5.

"Αν σ'ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τό ἄθροισμα δύο ἀντικειμένων πλευρῶν ΑΒ καί ΓΔ είναι ίσο πρός τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀλ-

λων πλευρῶν ΒΓ καί ΑΔ, τό τετράπλευρο αὐτό εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο*.

Γράφομε τήν περιφέρεια πού ἐφάπτεται τῶν τριῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Ἡ περιφέρεια αὐτή ὅπως ξαίρομε εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη. Θ'ἀποδείξωμε πώς καί ἡ πλευρά ΑΔ' τοῦ τετραπλεύρου θά ἐφάπτεται αὐτῆς τῆς ἰδίας περιφερείας.



Ἀ π ό δ ε ι ξ η: Γιατί ἄν ὑποθέσωμε τό ἐναντίον καί φέρωμε ἀπό τό Α τήν ἐφαπτομένη ΑΔ τῆς περιφερείας, τότε θά ἔχωμε τίς ἑξῆς σχέσεις:

α) ἀπό τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ', πού εἶναι περιγεγραμμένο στή περιφέρεια, κατά γνωστό θεώρημα:

$$AB + \Gamma\Delta' = B\Gamma + A\Delta'$$

β) ἀπό τήν ὑπόθεση:

$$AB + \Gamma\Delta = B\Gamma + A\Delta$$

Ἄν ἀφαιρέσωμε κατά μέλη αὐτές τίς ἰσότητες, θά λάβωμε τή σχέση:

$$\Delta\Delta' = A\Delta' - A\Delta \quad \text{ἤ} \quad A\Delta' = \Delta\Delta' + A\Delta,$$

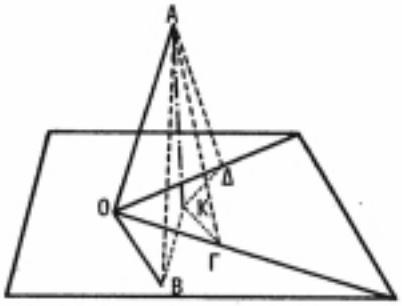
πού ἐκφράζει ὅτι ἡ πλευρά ΑΔ' τοῦ τριγώνου ΑΔΔ' εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί ἀντιβαίνει πρός τό γνωστό θεώρημα, κατά τό ὁποῖον κάθε πλευρά τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Ἡ ΑΔ λοιπόν εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας καί τό θεώρημα ἀληθεύει.

Παράδειγμα 6.

"Ἄν εὐθεῖα σχηματίζει ἴσες γωνίες μέ τρεῖς ἡμιευθεῖες τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της, τότε ἡ εὐθεῖα αὐτή εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον πού περιλαμβάνει τίς τρεῖς ἡμιευθεῖες".

Ἔστω Ο τό ἴχνος τῆς εὐθείας ΑΟ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου Π, καί ἔστωσαν ἀκόμη τρεῖς ἡμιευθεῖες τοῦ ἐπιπέδου ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ διερχόμενες ἀπό τό ἴχνος Ο καί τέτοιες,ὥστε οἱ γωνίες ΑΟΒ, ΑΟΓ καί ΑΟΔ νά εἶναι ἴσες. Μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα τυχοῦσαν γράφομεν ἐπάνω στό ἐπίπεδο Π μιά περιφέρεια, ἡ ὁποία τέμνει τίς ἡμιευθεῖες στά σημεῖα Β,Γ,Δ.Τά μήκη ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ θά εἶναι ἴσα, ἀφοῦ εἶναι ἀκτῖνες τοῦ ἰδίου κύκλου. Τά δέ τρίγωνα ΑΟΒ, ΑΟΓ καί ΑΟΔ θά εἶναι ἐπίσης ἴσα, γιατί ἔχουν δύο πλευρές ἴσες καί τήν περιεχομένη γωνία ἴση. Ἐπομένως θά ἔχουν καί τίς πλευρές των ΑΒ,ΑΓ,ΑΔ ἴσες.



Ἄν τώρα ὑποθέσω πώς ἡ ΑΟ δέν εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδο καί φέρω ἀπό τό σημεῖο Α τήν κάθετο, αὐτή θά κόψει τό ἐπίπεδο σ'ἕνα σημεῖο Κ διάφορον τοῦ Ο. Καί ἄν φέρω τίς εὐθεῖες ΚΒ,ΚΓ,ΚΔ θά σχηματίσω τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΚΒ,ΑΚΓ,ΑΚΔ πού εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τίς ὑποτεινούσες ἴσες καί τήν κάθετο πλευρά ΑΚ κοινή.Ἔχουν λοιπόν ἴσες καί τίς πλευρές ΚΒ,ΚΓ,ΚΔ. Τοῦτο ὅμως σημαίνει πῶς τό σημεῖο Κ εἶναι κέντρο τοῦ κύκλου πού περνᾶ ἀπό τά τρία σημεῖα Β,Γ,Δ.Ἀλλά εἴπαμε πώς καί τό Ο εἶναι κέντρο κύκλου πού περνᾶ ἀπό τά ἴδια σημεῖα. Φθάνομε λοιπόν ἔτσι στό συμπέρασμα πώς ὁ ἴδιος κύκλος ἔχει δύο διαφορετικά κέντρα πρᾶγμα προφανῶς ἄτοπο. Ἄρα ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον Π.

7.Ἀξιοσημείωτη εἶναι ἡ μορφή, τήν ὁποίαν πέρνει ἡ ἀποδεικτική μέθοδος πού ἐξετάζομε, στήν εἰδική περίπτωση, κατά τήν ὁποίαν πρόκειται ν'ἀποδείξωμε τήν ἀντίστροφο μιᾶς προτάσεως, ὅταν οἱ ἐναλλακτές συνθῆκες τῆς προτάσεως αὐτῆς εἶναι συνθῆκες μοναδικότητος γιά ἕνα καί τό αὐτό γεωμετρικό στοιχεῖο. Βαίρομε πῶς στήν περίπτωση αὐτή ἠμποροῦμε νά συμπεράνωμε ἀμέσως τήν ἀλήθεια τῆς ἀντιστρόφου, χωρίς καμιά ἄλλη ἀ-

πόδειξη*. Αλλά ἡ εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή εἶναι τότε ἐφαρμόσιμη καί καταλήγει πάντοτε στήν ἀναγκαστική σύμπτωση δύο γεωμετρικῶν στοιχείων, τά ὁποῖα ἀρχικῶς ἐλήφθησαν διαφορετικά μεταξύ τους.

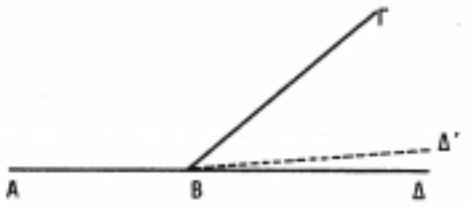
Παράδειγμα 1.

"Δύο ἐφεξῆς γωνίες, τῶν ὁποίων οἱ μή κοινές πλευρές κεῖνται ἐπί εὐθείας εἶναι παραπληρωματικές".

Ἐδῶ ἡ πλευρά ΒΔ πληροῖ δύο συνθῆκες:

1) Εἶναι προέκταση τῆς ΑΒ ἐξ ὑποθέσεως

2) Σχηματίζει γωνίαν ΓΒΔ παραπληρωματικήν τῆς ΑΒΓ κατά τό συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος.



Ἐπειδή καί οἱ δύο εἶναι συνθῆκες μοναδικότητος γιά τό στοιχεῖο ΒΔ, δηλαδή κάθε μία ὁρίζει τήν ἡμιευθεῖα ΒΔ κατά τρόπο μονοσήμαντο θά ἀληθεύει καί ἡ ἀντίστροφος πρόταση:

"Δύο ἐφεξῆς γωνίες πού εἶναι παραπληρωματικές ἔχουν τίς μή κοινές πλευρές τους ἐπί εὐθείας".

Ἡ ἀπόδειξή της **μέ τήν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή** θά γίνει ὡς ἑξῆς:

Λέγω πως ἡ ΒΔ εἶναι προέκταση τῆς ΑΒ. Γιατί ἄν δέν εἶναι προέκταση καί φέρω τήν προέκταση ΒΔ', θά ἔχω κατά τήν εὐθεῖα πρόταση τό συμπέρασμα πώς ἡ γωνία ΓΒΔ' εἶναι παραπληρωματική τῆς ΑΒΓ. Ἀλλά καί ἡ ΓΒΔ εἶναι, σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση τοῦ θεωρήματος, παραπληρωματική τῆς ἰδίας γωνίας ΑΒΓ. Ἐπομένως οἱ γωνίες ΓΒΔ καί ΓΒΔ' εἶναι ἴσες καί ἀφοῦ ἔχουν τήν πλευρά ΒΓ κοινήν, πρέπει καί οἱ πλευρές των ΒΔ καί ΒΔ' νά συμπίπτουν, ἐνῶ ὑποθέσαμε πώς δέ συμπίπτουν. Ἔχομε λοιπόν ἄτοπο, καί τό θεώρημα ἀληθεύει.

---

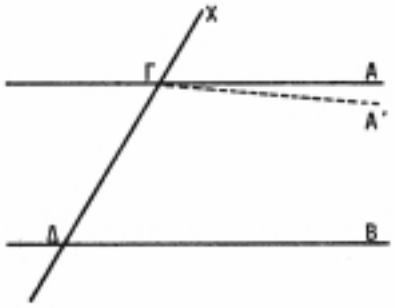
* Βλ. Μιχ. Κ. Καβαλίου: Περί ἀντιστροφῆς καί ἀναστροφῆς τῶν ὑποθετικῶν Συλλογισμῶν, εἰς τό Δελτίον τῆς Ε.Μ.Ε. Τόμος ΚΘ, 1955.

Παράδειγμα 2.

"Αν δύο εύθεῖες, τεμνόμενες ἀπό μιά τρίτη, σχηματίζουν ἕνα ζεῦγος ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνιῶν ἴσων, οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες".

Ὑπόθεση: γωνία ΓΑ,ΔΧ = γωνία ΔΒ,ΔΧ.

Συμπέρασμα: ΓΑ//ΔΒ.



Ἔχομε πάλι ἕνα στοιχεῖο , τήν εὐθεῖαν ΓΑ, πού μετέχει δύο ἰδιοτήτων: 1) εἶναι πλευρά γωνίας ΓΑ,ΓΧ ἴσης πρός τή γωνία ΔΒ,ΔΧ καί 2) εἶναι παράλληλος ἀπό τό σημεῖο Γ πρός τήν εὐθεῖαν ΔΒ.

Κάθε μία ἀπό τίς συνθῆκες αὐτές ἀρκεῖ γιά νά ὁρισθεῖ κατά τρόπο μονοσήμαντο τό στοιχεῖον ΓΑ. Ἰσχύει λοιπόν ἡ ἀντίστροφος πρόταση:

"Αν δύο εὐθεῖες παράλληλες τέμνωνται ἀπό τρίτη εὐθεῖα , οἱ σχηματιζόμενες ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες εἶναι ἴσες".

Σκεπτόμενοι μέ τήν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή θά ποῦμε:

Ἔστω πώς οἱ γωνίες ΑΓΧ καί ΒΔΧ δέν εἶναι ἴσες. Κατασκευάζω τότε τή γωνία Α'ΓΧ ἴσην πρός τήν ΒΑΧ. Κατά τήν εὐθεῖα πρόταση ἡ πλευρά ΓΑ' θά εἶναι παράλληλος πρός τήν εὐθεῖα ΔΒ. Ἀλλά πρός τήν εὐθεῖαν αὐτήν εἶναι παράλληλος, ἐξ ὑποθέσεως, καί ἡ ΓΑ. Ἔχομε λοιπόν ἀπό τό σημεῖο Γ δύο εὐθεῖες παράλληλες πρός τή ΔΒ καί, κατά τό γνωστό Εὐκλείδειο αἴτημα, αὐτό **εἶναι ἄτοπο.** Τό θεώρημα λοιπόν ἀληθεύει.

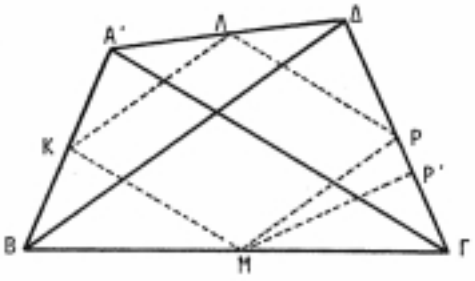
Παράδειγμα 3.

"Στό τετράπλευρο ΑΒΓΔ λαμβάνεται ἐπί τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἕνα σημεῖο Κ καί ἄγονται ἀπό αὐτό οἱ παράλληλες ΚΛ καί ΚΜ πρός τίς διαγωνίους ΒΔ καί ΑΓ ἀντιστοίχως. Ἀπό τά σημεῖα Λ καί Μ ἄγονται πάλι παράλληλες ἀντιστοίχως πρός τίς ΑΓ καί ΒΔ τεμνόμενες στό σημεῖο Ρ. Τό σημεῖον αὐτό θά κεῖται ἐπί τῆς πλευρᾶς ΓΔ τοῦ τετραπλεύρου".

Τό σημεῖο Ρ μετέχει δύο ἰδιοτήτων, κάθε μία τῶν ὁποίων εἶναι ἐπαρκής γιά τόν μονο - σήμαντο καθορισμό τοῦ σημεί- ου.

1) κεῖται ἐπί τῆς ΓΔ καί τῆς παραλλήλου πρός τήν ΑΓ ἀπό τό Λ.

2) κεῖται ἐπί τῆς ΓΔ καί τῆς παραλλήλου πρός τήν ΒΔ ἀ- πό τό Μ.



Ἰσχύει λοιπόν ἡ μερική ἀντίστροφος:

"Ἄν στό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἀχθοῦν οἱ εὐθεῖες ΚΛ,ΛΡ,ΚΜ πα- ράλληλες πρός τίς διαγωνίους του, τότε ἡ ΜΡ εἶναι παράλληλος πρός τήν ΚΛ καί τήν ἀντίστοιχο διαγώνιο, ΒΔ".

Ἔστω πώς ἡ ΜΡ δέν εἶναι παράλληλος πρός τή ΒΔ. Φέρω τό- τε ἐκ τοῦ Μ τήν παράλληλο ΜΡ', ἡ ὁποία τέμνει τήν ΓΔ στό ση- μεῖο ≠Ρ. Ἀπό γνωστό θεώρημα τῆς Γεωμετρίας ἀπορρέουν οἱ σχέ- σεις:

$$\frac{\Gamma P'}{\Gamma \Delta} = \frac{\Gamma M}{\Gamma B} = \frac{AK}{AB} \qquad (1)$$

καί, ἕνεκα τῆς ὑποθέσεως:

$$\frac{\Gamma P}{\Gamma \Delta} = \frac{\Lambda \Delta}{A \Delta} = \frac{AK}{AB} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει:

$$\frac{\Gamma P'}{\Gamma \Delta} = \frac{\Gamma P}{\Gamma \Delta} \qquad (3)$$

καί ἀπό αὐτήν: $\Gamma P' = \Gamma P$

Ἤτοι τό σημεῖον Ρ' συμπίπτει μέ τό Ρ, ἐνῶ ὑποθέσαμε Ρ'≠Ρ. Ἔχομε λοιπόν ἄτοπο καί τό ὑπ'ὄψει θεώρημα ἀληθεύει.-

Παράδειγμα 4.

"Παράλληλες εὐθεῖες τέμνονται ἀπό δέσμη εὐθειῶν εἰς μέ- ρη ἀνάλογα".

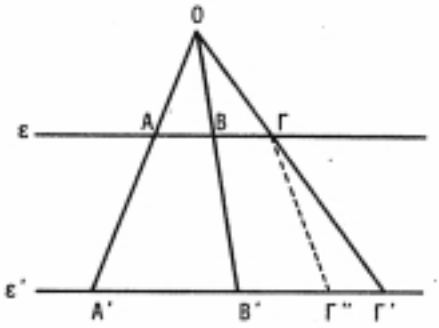
Ἀναφερόμενοι στό παρατιθέμενο σχῆμα ἔχομε:

Ὑπόθεση: ε//ε' (α)

ΑΑ',ΒΒ',ΓΓ' διέρχονται ἀπό τό κοινό σημεῖον Ο (β)

Συμπέρασμα:

ΑΒ:ΑΒ'=ΒΓ:Β'Γ' (σ)



Ἔδῶ τό σημεῖο Γ' π.χ.μετέχει τῶν ἑξῆς δύο ἰδιοτήτων:

1) κεῖται ἐπί τῆς εὐθείας ε' καί τῆς ΟΓ

2) πληροῖ τήν συνθήκη (σ).

Κάθε μιά ἀπό τίς συνθῆκες αὐτές ἀρκοῦν γιά νά ὁρίσουν κατά ἕνα τρόπο τό σημεῖο Γ'. Ἰσχύει λοιπόν ἡ ἀντίστροφος:

"Ἄν τρεῖς εὐθεῖες τέμνωνται ἀπό δύο παράλληλες σέ μέρη ἀνάλογα,τότε οἱ τρεῖς εὐθεῖες ἀποτελοῦν δέσμη (διέρχονται ἀπό τό αὐτό σημεῖο)".

Ὑπόθεση τώρα εἶναι ἡ συνθήκη (σ) καί συμπέρασμα ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΑ',ΒΒ',ΓΓ' περνοῦν ἀπό ἕνα καί τό αὐτό σημεῖο.

Οἱ δύο εὐθεῖες ΑΑ' καί ΒΒ', ἄν δέν εἶναι παράλληλες, θά τέμνωνται σ'ἕνα σημεῖον Ο. Ἀντί τώρα ν'ἀποδείξω πῶς ἡ ΓΓ' θά περάσει καί αὐτή ἀπό τό Ο, φέρω τήν ΟΓ καί τήν προεκτείνω μέχρις ὅτου κόψει τήν εὐθεῖα ε' στό Γ", καί ἀποδεικνύω πώς τά σημεῖα Γ' καί Γ" πρέπει νά συμπίπτουν. Ἀπό τήν εὐθεῖα πρόταση ἀπορρέει ἡ σχέση:

$$AB' : B\Gamma = A'B' : B'\Gamma''$$

Καί ἄν συγκρίνωμε αὐτήν μέ τήν (σ) ἤ τήν ἰσοδύναμο:

$$AB : B\Gamma = A'B' : B'\Gamma'$$

βρίσκομε:

$$A'B' : B'\Gamma'' = A'B' : B'\Gamma'$$

καί ἀπό αὐτήν: $B'\Gamma'' = B'\Gamma'$

Ἤτοι τά δύο σημεῖα Γ' καί Γ" συμπίπτουν, ἐνῶ ὑποθέσαμε $\Gamma'' \neq \Gamma'$. Ἔχομε λοιπόν ἄτοπο καί τό θεώρημα ἀληθεύει.

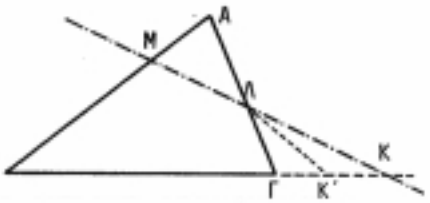
Παράδειγμα 5.

(Θεώρημα τοῦ Μενελάου). "Κάθε διατέμνουσα πού τέμνει τίς

τρεῖς πλευρές τριγώνου προσδιορίζει ἐπ'αὐτῶν ἓξ εὐθύγραμμα τμήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τρία μή διαδοχικά ἔχουν γινόμενο ἴσον μέ τό γινόμενον τῶν τριῶν ἄλλων".

(Θεώρημα ἀντίστροφο)."Ἄν τρία σημεῖα καθορίζουν ἐπί τῶν πλευρῶν τριγώνου ἓξ τμήματα τοιαῦτα ὥστε τό γινόμενο τριῶν μή διαδοχικῶν νά ἰσοῦται πρός τό γινόμενο τῶν τριῶν ἄλλων, τότε τά τρία σημεῖα κεῖνται ἐπί εὐθείας γραμμῆς".

Ἔστωσαν Κ,Λ,Μ τά σημεῖα ἐπί τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοιαῦτα ὥστε νά πληροῦν τίς συνθήκες πού ὁρίζει τό θεώρημα. Θ'ἀποδείξωμε πώς κεῖνται ἐπί μιᾶς εὐθείας γραμμῆς.



Ἀ π ό δ ε ι ξ η:Ἄν ὑποθέσωμε πώς δέν κεῖνται ἐπί εὐθείας γραμμῆς, καί φέρωμε τήν εὐθεῖαν ΜΛ, αὐτή θά κόψει τήν βάση ΒΓ τοῦ τριγώνου σ'ἕνα σημεῖο Κ' διάφορο τοῦ Κ καί κείμενον ἐπί τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ. Γιά τά δύο σημεῖα Κ καί Κ' θά ἰσχύουν τότε οἱ σχέσεις:

α) ἐξ ὑποθέσεως:

$$ΒΚ.ΓΛ.ΑΜ = ΓΚ.ΛΑ.ΜΒ \qquad (1)$$

β) λόγῳ τῆς εὐθείας προτάσεως:

$$ΒΚ'.ΓΛ.ΑΜ = ΓΚ'.ΛΑ.ΜΒ \qquad (2)$$

Ἄν διαιρέσωμε κατά μέλη θά λάβωμε:

$$\frac{ΒΚ}{ΒΚ'} = \frac{ΓΚ}{ΓΚ'} \qquad (3)$$

Καί ἄν σχηματίσωμε ἴσο κλάσμα μέ ὅρους τίς διαφορές τῶν ὁμοταγῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας (3),

$$\frac{ΒΚ}{ΒΚ'} = \frac{ΓΚ}{ΓΚ'} = \frac{ΒΓ}{ΒΓ} = 1$$

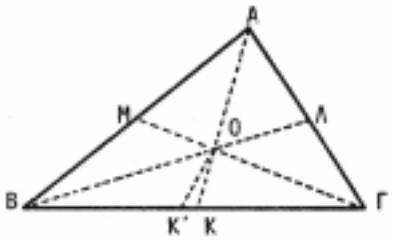
ἤτοι ΒΚ = ΒΚ' καί τά σημεῖα Κ καί Κ' συμπίπτουν, ἐνῶ ὑποθέσαμε Κ'≠Κ. Ἔχομε λοιπόν ἄτοπο. Καί τό θεώρημα ἀληθεύει.

Παράδειγμα 6.

(Θεώρημα τοῦ JIOVANNI DE CEVA)."Οἱ εὐθεῖες πού ἐνώνουν τίς κορυφές τριγώνου μέ ἕνα σημεῖον αὐτοῦ Ο καθορίζουν ἐπί τῶν πλευρῶν ἓξ τμήματα τοιαῦτα,ὥστε τό γινόμενο τριῶν μή διαδοχικῶν νά ἰσοῦται πρός τό γινόμενο τῶν τριῶν ἄλλων".

Δηλαδή, ἄν ἀναφερθοῦμε στό παρατιθέμενο σχῆμα, θ'ἀληθεύῃ ἡ σχέση:

ΒΚ.ΓΛ.ΑΜ = ΚΓ.ΑΛ.ΜΒ (1)



(Θεώρημα ἀντίστροφο). "Ἄν τρία σημεῖα Κ,Λ,Μ κείμενα ἐπί τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶναι τέτοια,ὥστε τό γινόμενο τριῶν μή διαδοχικῶν τμημάτων στά ὁποῖα διαιροῦν τίς πλευρές νά ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν τριῶν ἄλλων, τότε οἱ εὐθεῖες πού ἐνώνουν τά σημεῖα αὐτά μέ τίς ἀπέναντι κορυφές διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖον Ο".

Ἔστω Ο τό κοινόν σημεῖον τῶν ΒΛ καί ΓΜ καί ≠Κ τό σημεῖον εἰς τό ὁποῖον ἡ ΑΟ τέμνει τήν πλευράν ΒΓ. Γιά τά σημεῖα Κ καί Κ' θά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

α) ἐξ ὑποθέσεως,

$$ΒΚ.ΓΛ.ΑΜ = ΚΓ.ΑΛ.ΜΒ$$

β) Λόγω τοῦ θεωρήματος τοῦ CEVA (εὐθεῖα πρόταση):

$$ΒΚ'.ΓΛ.ΑΜ = ΚΓ'.ΑΛ.ΜΒ$$

Ἄν διαιρέσωμε κατά μέλη θά λάβωμε:

$$\frac{ΒΚ}{ΒΚ'} = \frac{ΚΓ}{ΚΓ'}$$

Καί ἄν τώρα σχηματίσωμε κλάσμα ἴσον, μέ ὅρους τά ἀθροίσματα τῶν ὁμοταγῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας θά προκύψει:

$$\frac{ΒΚ}{ΒΚ'} = \frac{ΚΓ}{ΚΓ'} = \frac{ΒΓ}{ΒΓ} = 1$$

Ἤτοι ΒΚ = ΒΚ' καί ἄρα τά σημεῖα Κ καί Κ' συμπίπτουν,ἐνῶ ὑποθέσαμε Κ'≠Κ. Ἔχομε λοιπόν ἄτοπο καί τό θεώρημα ἀληθεύει.

8. Ας θεωρήσωμε τώρα μιά σειρά προτάσεων:

$$\begin{array}{lll} (1) & \Theta,\ H_1 \rightarrow E_1 & \\ (2) & \Theta,\ H_2 \rightarrow E_2 & \\ (3) & \Theta,\ H_3 \rightarrow E_3 & (\Sigma) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ (\nu) & \Theta,\ H_\nu \rightarrow E_\nu & \end{array}$$

τῶν ὁποίων οἱ συνθῆκες ἀναφέρονται στά αὐτά γεωμετρικά στοιχεῖα. Θ εἶναι τό κοινό μέρος στήν ὑπόθεση ὅλων τῶν προτάσεων. $H_1, H_2, \ldots H_\nu$ εἶναι οἱ ἐπί μέρους συνθῆκες, οἱ ὁποῖες μαζύ μέ τή Θ ἐπάγονται ἀντιστοίχως τά συμπεράσματα $E_1, E_2, \ldots E_\nu$.

Θά κάμωμε τίς ἑξῆς παραδοχές:

(α) ὅτι οἱ συνθῆκες $H_1, H_2, \ldots H_\nu$ εἶναι ὅλες οἱ δυνατές καί ἀνεξάρτητες ἀπ' ἀλλήλων ὑποθέσεις πού ἠμποροῦν νά γίνουν μέ τά γεωμετρικά στοιχεῖα στά ὁποῖα ἀναφέρονται. Τοῦτο σημαίνει ἀπό λογικῆς ἀπόψεως ὅτι:

1) Ἐάν δέν εἶναι H_1, τότε εἶναι ἤ H_2 ἤ H_3 ἤ ..... H_ν
" H_2, " ἤ H_1 ἤ H_3 ἤ ..... H_ν
κ.ο.κ.

2) Ἐάν εἶναι $H_\kappa (\kappa = 1 \ldots \nu)$, τότε δέν εἶναι κανένα ἀπό τά λοιπά H.

(β) ὅτι οἱ συνθῆκες $E_1, E_2, \ldots E_\nu$ εἶναι ὅλες διάφορες καί ἀνεξάρτητες ἡ μία ἀπό τίς ἄλλες. Κάθε μία λοιπόν ἀποκλείει τίς ἄλλες. Δηλαδή:

ἐάν εἶναι $E_\kappa (\kappa = 1 \ldots \nu)$, τότε δέν εἶναι καμιά ἀπό τίς ἄλλες E.

Θ' ἀποδείξω τώρα τήν ἑξῆς πρόταση:

"Ἐάν σ' ἕνα σύστημα ἀληθευουσῶν προτάσεων, ὅπως τό ἀνωτέρω (Σ), οἱ συνθῆκες $H_1, H_2, \ldots H_\nu$ πληροῦν τίς προϋποθέσεις (α), τά δέ συμπεράσματα $E_1, E_2, \ldots E_\nu$ πληροῦν τίς προϋποθέσεις (β), τότε κατ' ἀνάγκην ἀληθεύουν ὅλες οἱ μερικές ἀντίστροφες τῶν προτάσεων (Σ) ἀντιστοίχως".

Θ' ἀληθεύουν δηλαδή οἱ προτάσεις:

$$
\begin{array}{lll}
(1') & \Theta,\ E_1 \rightarrow H_1 & \\
(2') & \Theta,\ E_2 \rightarrow H_2 & \\
(3') & \Theta,\ E_3 \rightarrow H_3 & (\Sigma') \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\
(\nu') & \Theta,\ E_\nu \rightarrow H_\nu &
\end{array}
$$

Ἡ ἀπόδειξη γίνεται εὔκολα μέ τήν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή, ὡς ἑξῆς.

Ἄς ἀποδείξωμε μιά τυχοῦσαν ἀπό τίς προτάσεις (Σ'), π.χ. τήν (3'). Λέγω πῶς ἀληθεύει ἡ (3'), γιατί ἄν ἦτο ψευδής, θά ἦτο ἀληθής ἡ ἀντιφατική της:

(3") $\Theta,\ E_3 \rightarrow$ ὄχι H_3

Ἀλλά τότε κατά τήν προϋπόθεση (α):

ἀφοῦ δέν εἶναι H_3, θά εἶναι ἤ H_1, H_2, ἤ .... H_ν

Ἄν ὅμως εἶναι H_1, τότε, κατά τήν πρόταση (1) θά εἶναι καί E_1 καί, κατά τήν προϋπόθεση (β), ὄχι E_3. Δηλαδή ἄτοπο. Γιατί ὑποθέσαμε πῶς ἰσχύει E_3 (3'). Ἀποκλείεται λοιπόν τό H_1.

Ἄν πάλι εἶναι H_2, τότε, κατά τήν πρόταση (2) θά εἶναι καί E_2. Ἀλλ' ὅταν εἶναι E_2, τότε κατά τήν προϋπόθεση (β) δέν εἶναι E_3. Δηλαδή ἄτοπο, ἀφοῦ ὑποθέσαμε πῶς εἶναι E_3 (3'). Ἀποκλείεται λοιπόν καί τό H_2.

Ἐντελῶς ἀναλόγως ἀποδεικνύομε πῶς ἀποκλείονται ὅλα τά Η πλήν τοῦ H_3. Ἄρα ἡ πρόταση (3') ἀληθεύει.

Μέ τόν ἴδιο συλλογισμό ἀποδεικνύομε καί τήν ἀλήθεια τῶν ἄλλων προτάσεων (Σ').

Ἡ γενική αὐτή θεωρία ὄχι μόνο μᾶς δίνει ἕνα στερεότυπο τρόπο ἀποδείξεως τῶν ἀντιστρόφων σέ ὅλες τίς περιπτώσεις πού συντρέχουν οἱ προϋποθέσεις πού ἀναφέραμε, ἀλλά μᾶς παρέχουν συγχρόνως ἕνα ἁπλό κριτήριο, τό ὁποῖον μᾶς ἐπιτρέπει νά συμπεράνωμε ἀμέσως τήν ἀλήθειά τους ἐκ τῶν προτέρων, χωρίς νά ἔχωμε ἀνάγκη νά κάμωμε ἀπόδειξη καί μάλιστα ἰδιαίτερη γιά κάθε μία χωριστά. Γιατί αὐτή ἡ ἀπόδειξη δέν θά ἦταν τίποτε ἄλλο ἀπό μιά πιστή ἐπανάληψη τοῦ παραπάνω συλλογισμοῦ μέ τήν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή, πού ἐφαρμόσαμε στή γενική περίπτωση.

Τό κριτήριο αὐτό συνίσταται στήν πλήρωση τῶν προϋποθέσεων (α) καί (β).

Παράδειγμα 1.

Ἐάν α καί β εἶναι δύο πλευρές ἑνός τριγώνου καί A,B οἱ ἀπέναντι τους γωνίες ἀντιστοίχως, θά ἔχωμε τίς ἑξῆς προτάσεις:

$$\begin{array}{lll} (1) & \alpha=\beta \rightarrow A=B & \\ (2) & \alpha>\beta \quad A>B & (\Sigma) \\ (3) & \alpha<\beta \quad A<B & \end{array}$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι οἱ συνθῆκες

$$\alpha = \beta,\ \alpha > \beta,\ \alpha < \beta$$

καθώς καί οἱ

$$A = B,\ A > B,\ A < B$$

εἶναι ὅλες ὅσες ἠμποροῦν νά ὑπάρξουν μεταξύ τῶν πλευρῶν α,β καί τῶν γωνιῶν A,B τοῦ τριγώνου.

Ἠμποροῦμε λοιπόν νά συμπεράνωμε ἀμέσως τήν ἀλήθεια τῶν ἀντιστρόφων:

$$\begin{array}{lll} (1') & A=B \rightarrow \alpha=\beta & \\ (2') & A>B \rightarrow \alpha>\beta & (\Sigma') \\ (3') & A<B \rightarrow \alpha<\beta & \end{array}$$

Ἐάν θέλωμε ν'ἀποδείξωμε μιά ἀπό αὐτές, π.χ. τήν (3') , δέν ἔχομε παρά ν'ἀκολουθήσωμε ἀκριβῶς τά βήματα τοῦ γενικοῦ συλλογισμοῦ πού ἐφαρμόσαμε στή γενική περίπτωση.

Ἐάν ἡ (3') δέν ἦτο ἀληθής, θά ἦτο ἀληθής ἡ ἀντιφατική της:

$$\begin{array}{rl} A<B \rightarrow & \alpha \text{ ὄχι} < \beta \\ \text{ἄρα ἤ} & \alpha = \beta \\ \text{ἤ} & \alpha > \beta \end{array}$$

Ἄν εἶναι α=β θά ἦτο κατά τήν (1) καί A=B, πρᾶγμα ἄτοπο γιατί ὑποθέσαμε A<B. Ἀποκλείεται λοιπόν α=β.

Ἄν εἶναι α>β θά ἦτο, κατά τήν (2), καί A>B, πρᾶγμα ἄτοπο, γιατί ὑποθέσαμε A<B. Ἀποκλείεται λοιπόν καί α>β.

Ἄρα εἶναι α<β.

Παράδειγμα 2:

Ἐάν τ καί τ' εἶναι τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου καί χ,χ' οἱ ἀντίστοιχες χορδές, τότε ἀληθεύουν οἱ ἑξῆς προτάσεις:

$$\begin{array}{lll} (1) & \tau=\tau' \rightarrow \chi=\chi' & \\ (2) & \tau>\tau' \rightarrow \chi>\chi' & (\Sigma) \\ (3) & \tau<\tau' \rightarrow \chi<\chi' & \end{array}$$

Γιά τούς ἴδιους λόγους, πού ἐξηγήσαμε στό παραπάνω παράδειγμα, ἠμποροῦμε νά συμπεράνωμεν ἀμέσως τήν ἀλήθεια καί τῶν ἀντιστρόφων:

$$\begin{array}{lll} (1') & \chi=\chi' \rightarrow \tau=\tau' & \\ (2') & \chi>\chi' \rightarrow \tau>\tau' & (\Sigma') \\ (3') & \chi<\chi' \rightarrow \tau<\tau' & \end{array}$$

Παράδειγμα 3.

Μιά εὐθεῖα ε καί μία περιφέρεια Π, πού εὑρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο ἠμποροῦν νά λάβουν μεταξύ τους τίς ἑξῆς δυνατές θέσεις:

Ἡ εὐθεῖα ε ἐφάπτεται τῆς περιφερείας Π
" ε τέμνει τήν περιφέρειαν Π
" ε δέν τέμνει " Π

Σέ κάθε σχετική θέση τῆς εὐθεῖας καί τῆς περιφερείας ἀντιστοιχεῖ μιά ἰδιαίτερη σχέση μεταξύ τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς περιφερείας καί τῆς ἀποστάσεως α τοῦ κέντρου της ἀπό τήν εὐθεῖαν ε. Ἰσχύουν δέ ὅπως ξαίρομε τά ἑξῆς θεωρήματα:

1) Ἐάν ἡ εὐθεῖα ε ἐφάπτεται τῆς περιφερείας Π, θά εἶναι:

$$\alpha = \rho$$

2) Ἐάν ἡ εὐθεία τέμνει τήν περιφέρειαν Π, θά εἶναι:

$$\alpha < \rho$$

3) Ἐάν ἡ εὐθεῖα εἶναι ἐκτός τῆς περιφερείας (δέν τήν τέμνει

$$\alpha > \rho$$

Ἐπειδή οἱ ὑποθέσεις περιλαμβάνουν ὅλες τίς δυνατές περιπτώσεις, τά δέ συμπεράσματα εἶναι ἐπίσης ὅλα διάφορα, ἀνεξάρτητα ἀλλήλων, συμπεραίνομεν ὅτι ἰσχύουν καί οἱ ἀντίστροφες προτάσεις:

1) Ἐάν εἶναι α = ρ, ἡ εὐθεῖα ε, ἐφάπτεται τῆς περιφερείας Π.

2) Ἐάν εἶναι α < ρ, ἡ εὐθεῖα ε τέμνει τήν περιφέρειαν Π.

3) Ἐάν εἶναι α > ρ, ἡ εὐθεῖα ε δέν τέμνει τήν περιφέρειαν Π.

Παράδειγμα 4.

Δύο περιφέρειες στό ἐπίπεδο, ὅπως καί δύο σφαῖρες στό χῶρο, δέν εἶναι δυνατό νά ἔχουν ἄλλες σχετικές θέσεις μεταξύ τους πλήν τῶν ἀκολούθων πέντε, γιά κάθε μία τῶν ὁποίων ἰσχύει ἕνα θεώρημα πού ἐκφράζει τή σχέση μεταξύ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων καί τῶν ἀκτίνων τῶν δύο περιφερειῶν (ἤ σφαιρῶν).

1) Ἐάν δύο περιφέρειες εἶναι ἐκτός ἀλλήλων, τότε ἡ ἀπόσταση τῶν κέντρων εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων:

$$ΚΛ > ρ+ρ'$$

2) Ἐάν δύο περιφέρειες ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐξωτερικῶς, ἡ ἀπόσταση τῶν κέντρων ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων:

$$ΚΛ = ρ+ρ'$$

3) Ἐάν δύο περιφέρειες τέμνωνται, τότε ἡ ἀπόσταση τῶν κέντρων περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ ἀθροίσματος καί τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων (ὑποτίθεται ρ>ρ'):

$$ρ+ρ' > ΚΛ > ρ-ρ'$$

4) Ἐάν δύο περιφέρειες ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐσωτερικῶς, τότε ἡ ἀπόσταση τῶν κέντρων ἰσοῦται πρός τή διαφορά τῶν ἀκτίνων:

$$ΚΛ = ρ-ρ'$$

5) Ἐάν δύο περιφέρειες εἶναι ἐσωτερικές ἡ μία τῆς ἄλ-

λης, τότε ἡ ἀπόσταση τῶν κέντρων εἶναι μικρότερη ἀπό τή διαφορά τῶν ἀκτίνων:

$$ΚΛ < ρ-ρ'$$

Ἀπό τίς προτάσεις αὐτές λαμβάνομε τίς ἑξῆς ἀντίστροφες: δύο περιφέρειες εἶναι:

(1')	ἐκτός ἀλλήλων	ἄν	$ΚΛ > ρ + ρ'$
(2')	ἐφαπτόμενες ἐκτός	ἄν	$ΚΛ = ρ + ρ'$
(3')	τεμνόμενες	ἄν	$ρ+ρ' > ΚΛ > ρ - ρ'$
(4')	ἐφαπτόμενες ἐντός	ἄν	$ΚΛ = ρ - ρ'$
(5')	ἐντός ἀλλήλων	ἄν	$ΚΛ < ρ - ρ'$