Author: Γιάννης Χ.Θωμαΐδης

Title: Ιστορική Αναδρομή στους Μιγαδικούς Αριθμούς.

Abstract: Στο άρθρο αυτό γίνεται προσπάθεια να σκιαγραφηθεί το ιστορικό της επινόησης των μιγαδικών αριθμών μέχρι την αυστηρή θεμελίωση τους από τον Hamilton, καθώς επίσης να ερμηνευτεί η ανάγκη που οδήγησε τον άνθρωπο να τους επινοήσει.

Creator: HDML

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Ὑπό

Γιάννη Χ. Θωμαΐδη

Στό ἄρθρο αὐτό θά προσπαθήσουμε νά σκιαγραφήσουμε τό ἱστορικό τῆς ἐπινόησης τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μέχρι τήν ἀύστηρή θεμελίωση τους ἀπό τόν Hamilton, καθώς ἐπίσης καί νά ἑρμηνεύσουμε τήν ἀνάγκη πού ὁδήγησε τόν ἄνθρωπο νά τούς ἐπινοήσει.

Ἀρκετά συχνά, ὅταν πρόκειται νά διδάξουμε μιγαδικούς ἀριθμούς, γιά νά τούς εἰσάγουμε θεωροῦμε τήν δευτεροβάθμεα ἐξίσωση $x^2+1=0$, ἡ ὁποία δέν ἔχει πραγματική ρίζα. Τότε λέμε : "ἐπειδή θέλουμε κάθε ἐξίσωση β΄ βαθμοῦ νά ἔχει λύση, ὀνομά - ζουμε ±i τίς δύο ρίζες της...". Ἔτσι σάν λόγο ἐπινόησης τῶν μιγαδικῶν παρουσιάζουμε τήν ἐπιθυμία τοῦ ἀνθρώπου νά ἔχει λύ- ση κάθε δευτεροβάθμια ἐξίσωση. Ἡ προηγούμενη ἑρμηνεία, παι - δαγωγικά πολύ ἐξυπηρετική, εἶναι ἐλλιπής, διότι ἡ ἐπιθυμία τοῦ νά ἔχει λύση κάθε δευτεροβάθμια ἐξίσωση δέν δημιουργήθη- κε ἀπό μόνη της οὔτε ὑπῆρχε ἀπό τήν ἀρχή, ἀλλά προξενήθηκε μέ φυσιολογικό τρόπο ἀπό κάποια αἰτία, τήν ὁποία καί θά προ- σπαθήσουμε νά παρουσιάσουμε.

Τόσο οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ὅσο καί οἱ ἀρχαῖοι Ἰνδοί γνώ- ριζαν τή γεωμετρική λύση ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ. Στά βι- βλία "Liber Abacci" γραμμένο ἀπό τόν Fibonacci (1202) καί "Summa" γραμμένο ἀπό τόν Luca Pacioli (1494) ἀναφέρεται ὅτι

ὁ Ἄραβας Al Khowarizmi (820 μ.Χ.) ἔλυνε δευτεροβάθμιες ἐξισώσεις μέ τή μέθοδο συμπλήρωσης τοῦ τετραγώνου, δηλαδή οὐσιαστικά μέ τή σημερινή μέθοδο. Σ'αὐτά τά βιβλία, ὅσες ἐξισώσεις ἀπαιτοῦσαν ἐξαγωγή τετραγωνικῆς ρίζας ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ὅπως ἡ $x^2+1=0$, ἐθεωροῦντο ἀδύνατες, χωρίς νά ἐκφράζεται καθόλου ἡ ἐπιθυμία νά ἔχουν κι αὐτές λύση.

Πρόβλημα, ἀπό τή μή ὕπαρξη ριζῶν μερικῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, παρουσιάστηκε μέ τήν ἀνακάλυψη τῆς μεθόδου λύσης τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, λίγο μετά τό 1500 μ.Χ. καί ἱστορικά εἶναι ἔτσι πού γεννήθηκε ἡ ἐπιθυμία ἤ καλύτερα ἡ ἀνάγκη νά ἔχουν λύση ὅλες οἱ δευτεροβάθμιες ἐξισώσεις.

Λεπτομέρειες σχετικά μέ τό ἱστορικό τῆς λύσης τριτοβαθμίων καί τεταρτοβαθμίων ἐξισώσεων, ξεφεύγουν ἀπό τό σκοπό αὐτοῦ τοῦ ἄρθρου*. Γεγονός εἶναι ὅτι ἡ μέθοδος τῆς λύσης τῆς $x^3=px+q$ περιγράφεται στό βιβλίο τοῦ Ἰταλοῦ Cardano "Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus" (Μεγάλης τέχνης ἤ περί ἀλγεβρικῶν μεθόδων βιβλίο ἕνα) πού ἐκδόθηκε το 1545. Αὐτή ἡ μέθοδος, πού στήν πραγματικότητα εἶχε βρεθεῖ ἀπό τόν dal Ferro καί ἀνεξάρτητα ἀπό τόν Tartaglia, συνίσταται στή θεώρηση τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} u+v &= q \\ u.v &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{aligned} \qquad (1)$$

ὁπότε μιά ρίζα τῆς $x^3=px+q$ εἶναι ἡ $\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$. Τό σύστημα (1) ἰσοδυναμεῖ προφανῶς μέ τήν ἐξίσωση

$$z^2-qz + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Γιά ὅσα p,q ἡ τελευταία ἐξίσωση ἔχει πραγματικές ρίζες, ἡ λύση τῆς τριτοβαθμίου προχωροῦσε χωρίς πρόβλημα. Σέ ὅσες ὅμως περιπτώσεις ἡ $z^2-qz + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ δέν ἔχει πραγματικές ρίζες ἡ μέθοδος σκάλωνε. Αὐτή εἶναι ἡ λεγόμενη "Casus irreducibillis" (περίπτωση μή ἀναγωγῆς). Ἡ κατάσταση ἤνοιγε ἀκόμα

---

*Ὁ ἐνδιαφερόμενος ἀναγνώστης παραπέμπεται στό ἄρθρο "ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ GALOIS" τοῦ Θ. Ἐξαρχάκου (Μαθ. Ἐκδ. τόμος 20 σ.3-38).

πιό μυστηριώδης ἄν ἡ ἀρχική ἐξίσωση $x^3=px+q$ εἶχε μιά ὀφθαλμοφανῆ πραγματική ρίζα κι ὅμως ἡ $z^2-qz+(\frac{p}{3})^3=0$ ἦταν ἀδύνατη. Παράδειγμα γιά $p=15$ καί $q=4$ ἡ $x^3=15x+4$ ἔχει ὀφθαλμοφανῆ ρίζα τό 4, ὅμως ἀνάγεται στή δευτεροβάθμια $z^2-4z+125=0$ πού εἶναι ἀδύνατη.

Πιστεύουμε ὅτι μπροστά στόν κίνδυνο ἀπόρριψης τῆς μεθόδου ἐπίλυσης τῶν τριτοβαθμίων γεννήθηκε ἡ ἀνάγκη ἐπινόησης ριζῶν γιά τίς ἀδύνατες δευτεροβάθμιες ἐξισώσεις. Δυστυχῶς ὁ ἴδιος ὁ Cardano δέν μπόρεσε νά ἀνατρέψει τήν παράδοση καί νά δεχθεῖ ρίζες ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Ἀνεπιτυχεῖς προσπάθειες του νά ξεδιαλύνει τό μυστήριο περιγράφονται στό βιβλίο του "De regula alisa" (1570). Ἀξιοσημείωτο τόλμημα τοῦ Cardano εἶναι ὅτι ὅταν, ἀντιμετωπίζοντας ἕνα γεωμετρικό πρόβλημα στό κεφάλαιο XXXVII τοῦ βιβλίου του "Artis magane..." ἀνήχθηκε στή ἀδύνατη $(x-5)^2=-15$, γιά νά συνεχίσει τούς ὑπολογισμούς του, θεώρησε τό $\sqrt{-15}$ καί βρῆκε "θεωρητικές" ρίζες τίς $5+\sqrt{-15}$ καί $5-\sqrt{-15}$. Στή συνέχεια ἐφαρμόζοντας τούς γνωστούς κανόνες τῶν πράξεων ἐπαλήθευσε ὅτι

$$(5+\sqrt{-15}).(5-\sqrt{-15}) = 40$$

Αὐτή εἶναι ἡ πρώτη ἐμβρυακῆς μορφῆς ἐμφάνιση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μολονότι ὁ Cardano δέν εἶχε ψυχολογικά τό σθένος νά ὀνομάσει ὑπαρκτές αὐτές τίς λύσεις. Πάντως οἱ ἐρευνές του εἶχαν σάν συνέπεια μιά κίνηση γύρω ἀπό τίς "σοφιστικές" αὐτές παραστάσεις.

Ὁ πρῶτος πού ἔριξε φῶς στό μυστήριο τῆς "casus irredusibillis" ἦταν ὁ Ἰταλός μηχανικός Raffaele Bombelli, ὁ ὁποῖος εἶχε μελετήσει τά ἔργα τῶν Cardano, Tartaglia, Ferrari καί προηγουμένων. Στό μοναδικό ἔργο του, μιά Ἄλγεβρα πού κυκλοφόρησε τό 1572, κατάφερε, χρησιμοποιώντας μερικούς νέους συμβολισμούς καί κανόνες, νά καθορίσει τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων ἀνάμεσα σέ παραστάσεις τῆς μορφῆς $a\pm\sqrt{-\beta}$ ὅπου $\sqrt{-\beta}$ τετραγωνική ρίζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ. Ἀνάμεσα στά παραδείγματα πού ἔδωσε βρίσκεται καί ὅτι

$$3+\sqrt{-16} = (2+\sqrt{-1})^2$$

μέ τή βοήθεια τοῦ ὁποίου βγαίνει

$$(3+\sqrt{-16}).(2+\sqrt{-1}) = 2+\sqrt{-121} = (2+\sqrt{-1})^3$$

δηλαδή

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$$

καί μέ τόν ἴδιο τρόπο

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

Ἐφαρμόζοντας τά ἀποτελέσματα αὐτά στήν ἐξίσωση $x^3=15x+4$ (πού ἀνήκει ὅπως εἴδαμε στή περίπτωση μή ἀναγωγῆς καί γιά τήν ὁποία ἡ μέθοδος Ferro-Tartaglia δίνει τή "λύση"

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

παίρνουμε τήν ρίζα

$$x = 2+\sqrt{-1} + 2-\sqrt{-1} = 4$$

Μέ τήν ἐργασία του αὐτή ὁ Bombelli ὄχι μόνο ἀποκατέστησε τή μέθοδο τῶν Ferro-Tartaglia γιά τήν ἐπίλυση ὅλων τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἀλλά ἔβαλε ἐπίσης τά θεμέλια τοῦ λογισμοῦ μέ μιγαδικούς ἀριθμούς καί δικαιολογημένα θεωρεῖται ὁ δημιουργός τῆς ἀντίστοιχης θεωρίας.

Φυσικά τά ἀποτελέσματα τοῦ Bombelli δέν ἦταν δυνατό νά ξεριζώσουν ἀπό τή μιά μέρα στήν ἄλλη τίς προκαταλήψεις ἀπέναντι στίς "σοφιστικές" παραστάσεις. Ὁ Cardano πληροφορήθηκε γιά τ'ἀποτελέσματα αὐτά σέ μεγάλη ἡλικία (ἦταν 71 χρονῶν ὅταν ἐκδόθηκε τό βιβλίο τοῦ Bombelli) ἀλλά ἀπό γραπτά του ἐκείνης τῆς περιόδου βγαίνει τό συμπέρασμα ὅτι οἱ ἀπορίες του δέν διαλύθηκαν τελείως. Τό ἴδιο ἔγινε καί μέ ἄλλους διακεκριμένους μαθηματικούς τῆς ἐποχῆς, ὅπως τόν Βέλγο Simon Stevin (1548-1620), ὁ ὁποῖος στό βιβλίο του "Arithmetique", πού ἐκδόθηκε τό 1585 ἀδυνατεῖ νά ἐξηγήσει τό μυστήριο τῆς περίπτωσης μή ἀναγωγῆς στίς τριτοβάθμιες ἐξισώσεις (ἄν καί ἀναφέρει στή βιβλιογραφία του τό βιβλίο τοῦ Bombelli).

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι στή διάρκεια τοῦ 16ου αἰῶνα δημιουργεῖται ἡ πρώτη ἐπαφή μέ τούς μιγαδικούς ἀριθμούς, μέσα ἀπό τίς ἐξισώσεις. Καλύπτεται ὅμως μέ βαθύ σκοτάδι κάθετί πού ἐ-

χει σχέση μέ τήν πραγματική τους ὑπόσταση καί δέν μπορεῖ ἐπομένως νά γίνει λόγος γιά τή δημιουργία μιᾶς ἀνεξάρτητης θεωρίας. Ἔτσι τό ξεκαθάρισμα τῆς σημασίας τῶν νέων παραστάσεων ἐξακολουθεῖ νά γίνεται ἀργά, μέσα στά πλαίσια τῆς θεωρίας τῶν ἐξισώσεων.

Τήν τελευταία προωθοῦν σημαντικά μέ τά ἔργα τους, στά τέλη τοῦ 16ου καί τίς ἀρχές τοῦ 17ου αἰῶνα, οἱ Γάλλοι François Viete (1540-1603) καί Albert Girard (1595-1633). Ὁ Girrard στό βιβλίο του "Invention nouvell en l'algebre" (Νέα ἐφεύρεση στήν Ἄλγεβρα), πού ἐκδόθηκε τό 1629, διατυπώνει γιά πρώτη φορά στήν ἱστορία τῆς Ἄλγεβρας, τό θεμελιῶδες θεώρημα: "Κάθε ἐξίσωση ν βαθμοῦ ἔχει ν ρίζες". Καί σημειώνει ὅτι γιά τήν ἰσχύ αὐτοῦ τοῦ κανόνα πρέπει νά θεωρηθοῦν σάν ρίζες καί οἱ λύσεις ἐκεῖνες πού μέχρι τώρα χαρακτηρίζονται ἀδύνατες, ἐννοώντας τίς ἀρνητικές καί μιγαδικές λύσεις.

Μέ τό ἴδιο ζήτημα ἀσχολήθηκε καί ὁ Descartes (1596-1650) στό περίφημο ἔργο του "La Geometrie", πού ἐκδόθηκε τό 1637. Ἐκεῖ ὁ Descartes παραδέχεται ὅτι μιά ἀλγεβρική ἐξίσωση, ἐκτός ἀπό "πραγματικές", εἶναι δυνατό νά ἔχει καί ἄλλες ρίζες τίς ὁποῖες, μή μπορώντας νά ἐντάξει σέ κάποια ἀπό τίς γνωστές κατηγορίες ἀριθμῶν, ὀνόμασε πρός διάκριση "φανταστικές" (imaginaires). Ἡ ὀνομασία αὐτή, πού διατηρεῖται ὡς τίς μέρες μας, δείχνει καθαρά τή στάση τῶν μαθηματικῶν ἀπέναντι στίς "σοφιστικές" παραστάσεις τοῦ Cardano 100 χρόνια μετά τήν πρώτη ἐνοχλητική τους ἐμφάνιση στόν τύπο ἐπίλυσης τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων. Ὅσο ὅμως πλατύτερη γίνεται ἡ ἀποδοχή τους ἀπό τούς μαθηματικούς, τόσο ἐντονότερη προβάλλει ἡ ἀνάγκη μιᾶς βαθύτερης ἑρμηνείας τους.

Ὁ Ἄγγλος John Wallis (1616-1703) ἦταν ἀπό τούς πρώτους πού ἀσχολήθηκαν μέ τό ζήτημα αὐτό καί ἀπό τό 1685, στό ἔργο του "Treatise of Algebra, both Historical and Practical" (Κεφ. 66-68) ὑποστήριξε τή δυνατότητα μιᾶς γεωμετρικῆς ἑρμηνείας τῶν φανταστικῶν παραστάσεων. Δυστυχῶς ὅμως οἱ προσπάθειες του δέν καρποφόρησαν.

Παρόλη τήν ἔλλειψη μιᾶς φυσικῆς ἑρμηνείας τῶν φανταστικῶν, ἡ τελειοποίηση τῶν πράξεων τους συνεχίστηκε μέ τή βοή-

θεια καί τῆς νέας συμβολικῆς γλώσσας πού ἀναπτύχθηκε στήν Ἄλγεβρα, ἀπό τήν ἐποχή τοῦ Viete καί μετά. Ἕνα μικρό δεῖγμα τῆς προόδου παίρνουμε ἀπό τό βιβλίο "Traite d'Algebre" τοῦ Γάλλου Michel Rolle (1652-1719), πού ἐκδόθηκε τό 1690. Ὁ Rolle ἀναφέρει ἐκεῖ ὅτι κάθε νιοστή ρίζα ἔχει ν τιμές (ἄν καί τό ἀποδεικνύει μόνο γιά ν=3), γεγονός πού σημαίνει ὅτι εἶναι πιά δυνατή ἡ ἐκτέλεση πολύπλοκων ἀλγεβρικῶν πράξεων μέ φανταστικές παραστάσεις. Ἀπό τούς πρωτοπόρους σ'αὐτό τόν τομέα εἶναι τήν ἴδια περίοδο (τέλος τοῦ 17ου - ἀρχές τοῦ 18ου αἰῶνα) ὁ Γαλλικῆς καταγωγῆς Ἄγγλος Abraham de Moivre (1667-1754) καί ὁ ἐπίσης Ἄγγλος Roger Cotes (1682-1716). Στό ἔργο του "Miscellanea analytica" (1730), ὁ de Moivre χρησιμοποιεῖ μιά μορφή τοῦ θεωρήματος πού φέρει σήμερα τό ὄνομα του καί ἐκφράζεται ἀπό τή σχέση:

$$(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)^{\nu} = \sigma\upsilon\nu\nu\theta+i\eta\mu\nu\theta$$

Ἐπίσης σέ μιά ἄλλη ἐργασία του τοῦ 1739, βρῆκε τίς νιοστές ρίζες τοῦ "ἀδύνατου διωνύμου" $\alpha+\sqrt{-\beta}$ μέ τή διαδικασία πού χρησιμοποιεῖται καί σήμερα. Ὁ Cotes ἦταν ἀπό τούς πρώτους πού θεώρησαν τή σχέση

$$\ln(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta) = i\theta$$

καί ἔδωσε ἕνα ἰσοδύναμο της σέ ἄρθρο του πού δημοσιεύτηκε τό 1714.

Ἡ παράλληλη δημιουργία τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ ἀπό τούς Newton καί Leibniz στά τέλη τοῦ 17ου αἰῶνα, ἐγκαινίασε γιά τά Μαθηματικά μιά νέα ἐποχή. Γιά νά προωθήσουν τίς νέες ἰδέες, οἱ μαθηματικοί τοῦ 18ου αἰῶνα ἐπανεξετάζουν καί ἀξιοποιοῦν τά ἀποτελέσματα πού συσσώρευσε ἡ ἀλγεβρική, κυρίως, ἔρευνα τίς προηγούμενες ἑκατονταετηρίδες. Μέσα στό κλῖμα αὐτό, οἱ φανταστικοί ἀριθμοί ἀρχίζουν ν'ἀντιμετωπίζονται σάν μιά θεωρία μέ δικούς της κανόνες καί τεχνικές, πού προσφέρεται γιά ἐφαρμογή τόσο στούς παλιούς ὅσο καί τούς νέους κλάδους πού δημιουργοῦνται.

Ὁ Ἰταλός ἱστορικός Gino Loria ἀναφέρει ὅτι ἀνάμεσα στούς πρώτους πού προσπάθησαν νά θέσουν τίς βάσεις μιᾶς θεωρίας τῶν φανταστικῶν, πρέπει νά συμπεριληφθεῖ ὁ Ἰταλός Gu-

lio Carlo Fagnano (1682-1766), τοῦ ὁποίου οἱ σχετικές ἔρευνες περιέχονται σέ ἐργασία πού δημοσίευσε τό 1726.

Τό 1747 δημοσιεύεται ἡ ἐργασία τοῦ Γάλλου Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) μέ τίτλο "Reflexions sur la cause generale de vents" (Σκέψεις πάνω στή γενική αἰτία τῶν ἀνέμων). Ἐκεῖ ὁ d'Alembert παρουσίασε τήν πρώτη - ὄχι ὅμως ὁλοκληρωμένη - ἀπόδειξη τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς Ἄλγεβρας, πού εἶχε διατυπώσει σάν ὑπόθεση ὁ Girard τό 1629. Ἡ διατύπωση τοῦ θεωρήματος ἀπό τόν d'Alembert ἦταν ἡ ἑξῆς: "Ἔστω πολυώνυμο τυχόν: $x^n+ax^{n-1}+...+g$, τέτοιο ὥστε νά μήν ὑπάρχει καμμιά πραγματική ποσότητα ἡ ὁποία τοποθετούμενη στή θέση τοῦ x νά ἐξαλείφει ὅλους τούς ὅρους· λέγω ὅτι ὑπάρχει πάντοτε μιά ποσότητα $p+q\sqrt{-1}$, ἡ ὁποία τοποθετούμενη ἀντί τοῦ x στό πολυώνυμο νά τό καθιστᾶ ἴσο πρός τό μηδέν".

Τήν προηγούμενη διατύπωση τήν παραθέσαμε γιά νά δείξουμε τήν ἄνεση μέ τήν ὁποία γίνεται πλέον ὁ χειρισμός καί ἡ ἐφαρμογή τῶν φανταστικῶν παραστάσεων. Καί αὐτό συμβαίνει ὄχι μόνο στήν Ἄλγεβρα, ἀπό τήν ὁποία εἰσχώρησαν, μέσω τῶν ἐξισώσεων, οἱ μιγαδικοί στήν ἐπιστήμη ἀλλά κυρίως στήν Ἀνάλυση.

Πραγματικά, οἱ δύο κορυφαῖοι μαθηματικοί τοῦ 18ου αἰῶνα, ὁ Ἑλβετός Leonhard Euler (1707-1783) καί ὁ Γαλλοϊταλός Joseph Louis Lagrange (1736-1813) χρησιμοποίησαν εὐρύτατα στά ἔργα τους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς. Τό 1749, σέ μιά ἐργασία του μέ τίτλο "Recherches sur les racines imaginaires des equations" ("Ἐρευνα πάνω στίς φανταστικές ρίζες τῶν ἐξισώσεων) ὁ Euler ἔδωσε τόν ἑπόμενο ὁρισμό: ""Ενα μέγεθος ὀνομάζεται φανταστικό, ἄν δέν εἶναι οὔτε μεγαλύτερο ἀπό τό μηδέν, οὔτε μικρότερο ἀπό τό μηδέν, οὔτε ἴσο μέ τό μηδέν. Εἶναι κάτι τό ἀδύνατο, ὅπως π.χ. τό $\sqrt{-1}$ ἤ γενικά τό $\alpha+\beta\sqrt{-1}$". Ὁ Euler τελειοποίησε σέ μεγάλο βαθμό τίς πράξεις μέ φανταστικές παραστάσεις καί συγκεκριμένα ἔγραψε: "Χωρίς δισταγμό ἰσχυριζόμαστε, ὅτι ὅλα τά γενικά τά φανταστικά μεγέθη, μέ ὁποιοδήποτε τρόπο καί ἄν συνδυαστοῦν, πάντα καταλήγουν στή μορφή $M+N\sqrt{-1}$". Ἔδειξε δηλαδή ὅτι τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι κλειστό ὡς πρός τίς ἀλγεβρικές καί τίς στοιχειώδεις ὑπερβατικές πράξεις.

Τό 1749 δημοσίευσε έπίσης τούς θεμελιώδεις τύπους τῆς Ἀνάλυσης

$$\eta\mu x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}, \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2}, \quad i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

έπιτυγχάνοντας έτσι νά δείξει, μέ τή βοήθεια τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν, τή στενή σχέση πού ὑπάρχει ἀνάμεσα στούς δύο σπουδαίους πραγματικούς ἀριθμούς e καί π. Οἱ δύο πρῶτοι τύποι ἦταν γνωστοί στούς De Moivre καί Cotes, ἀλλά στόν Euler ὀφείλεται ἡ μοντέρνα ἐκθετική τους μορφή. Σ'ἕνα χειρόγραφο του τοῦ 1777 ὁ Euler χρησιμοποίησε γιά πρώτη φορά τό σύμβολο i στή θέση τοῦ $\sqrt{-1}$. Ἔκανε, τέλος, χρήση τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἀκόμα καί στόν ὑπολογισμό ὁρισμένων ὁλοκληρωμάτων.

Ἡ σταθερή διαμόρφωση τῶν φανταστικῶν σέ ἀνεξάρτητη θεωρία, μέ πλῆθος ἐφαρμογῶν στήν Ἄλγεβρα καί τήν Ἀνάλυση, ἐναφέρνει στήν ἐπιφάνεια τό ἄλυτο πρόβλημα τῆς φυσικῆς τους ἑρμηνείας. Τό θέμα ἀπασχολεῖ τούς μαθηματικούς συνέχεια καί τήν ἀβεβαιότητα πού κυριαρχεῖ ἐκφράζει ὁ Leibniz, ὁ ὁποῖος θεωρεῖ τούς φανταστικούς ἀριθμούς σάν ἕνα εἶδος ἀμφίβιου, κάτι μεταξύ ὕπαρξης καί μή ὕπαρξης πού μοιάζει ἀπό αὐτή τήν ἄποψη μέ τό Ἅγιο Πνεῦμα! (σημειώνουμε ἐδῶ ὅτι ὁ Leibniz ἦταν καί θεολόγος...). Ἀπό τά μέσα τοῦ 18ου αἰῶνα ἀρχίζει ἡ δημοσίευση ὁλόκληρης σειρᾶς σχετικῶν ἐργασιῶν οἱ περισσότερες τῶν ὁποίων ἐξετάζουν τή δυνατότητα μιᾶς γεωμετρικῆς παράστασης τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν, χωρίς ὅμως καί νά προσφέρουν μιά ἱκανοποιητική λύση.

Ἀπό τήν ἐποχή τοῦ Newton ἔχει ἀρχίσει ἡ ἀνάπτυξη τοῦ διανυσματικοῦ λογισμοῦ μέ τή διάκριση τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ἀνάλογα μέ τή φορά τῆς κίνησης πάνω σ'αὐτά. Οἱ ἀρνητικοί ἀριθμοί, ἀποδείχνονται ἕνα ἐξαιρετικά πρόσφορο ἐργαλεῖο στή προκειμένη περίπτωση καί ἀρχίζει νά γίνεται λόγος γιά θετικά καί ἀρνητικά εὐθύγραμμα τμήματα. Ἡ ἐφαρμογή αὐτή τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν στή γεωμετρία, γρήγορα φέρνει στό προσκήνιο τούς φανταστικούς καί δημιουργεῖ ἐλπίδες γιά μιά γεωμετρική ἑρμηνεία τους. Συγκεκριμένα, οἱ ἀρνητικές ρίζες, πού εἶναι πηγή τῶν φανταστικῶν, ἐμφανίζονται ὅταν τά προσανατο-

λισμένα τμήματα ἐφαρμόζονται σέ κλασσικά γεωμετρικά ζητήματα, ὅπως π.χ. ἡ κατασκευή τῆς μέσης ἀνάλογης δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.

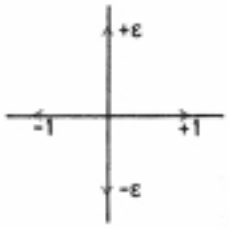
Κάποιες πρῶτες προσπάθειες ἀποβαίνουν στεῖρες ὅπως φαίνεται καθαρά στήν ἐργασία "Von verneinten und unmöglichen wrirzelgrössen" (περί ἀρνητικῶν καί ἀδυνάτων ριζων) πού δημοσιεύτηκε τό 1786 ἀπό τό Γερμανό V.J.G. Karsten.

Τό 1799 δημοσιεύεται ἡ διδακτορική διατριβή τοῦ μεγάλου Γερμανοῦ μαθηματικοῦ Carl Friedrich Gauss (1777-1855), τοῦ ὁποίου ἡ συμβολή στήν ὁριστική διευθέτηση τοῦ ζητήματος τῶν μιγαδικῶν ὑπῆρξε, ἀργότερα, ἀποφασιστική. Στήν διατριβή του ὁ Gauss ἀπόδειξε μέ κάθε αὐστηρότητα, γιά πρώτη φορά, τό θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἄλγεβρας. Ἄν καί σ'αὐτή βρίσκονται τά πρῶτα ἴχνη τῆς γεωμετρικῆς ἑρμηνείας πού ἔδωσε ἀργότερα γιά τούς φανταστικούς ἀριθμούς, εἶναι φανερή ἡ πρόθεση τοῦ Gauss νά ἀποφύγει κάθε ἐπαφή μαζί τους. Αὐτό δείχνει ἄλλωστε καί ὁ μακροσκελής τίτλος τῆς διατριβῆς: "Demonstratio nova Theorematis omnem Functionen algebraicam rationalem integram unius Variablis in Factores reales primi vel secundi Gradus resoliv posse" (Νέα ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος: Κάθε ἀλγεβρική ρητή ἀκέραιη συνάρτηση μιᾶς μεταβλητῆς μπορεῖ ν'ἀναλυθεῖ σέ πραγματικούς παράγοντες πρώτου ἤ δεύτερου βαθμοῦ).

Τήν ἴδια χρονιά δημοσιεύεται καί ἡ πρώτη, οὐσιαστικά, σημαντική ἐργασία πάνω στό θέμα τῆς γεωμετρικῆς παράστασης τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Συγγραφέας της ὑπῆρξε ὁ Νορβηγός χαρτογράφος Gaspar Wessel (1745-1818) καί εἶχε τόν τίτλο "Om Directionens analytiske Betegning". Ἐπειδή τόσο, ὁ συγγραφέας, ὅσο καί ἡ γλῶσσα στήν ὁποία γράφτηκε, ἦταν ἄγνωστοι στόν εὐρύτερο Εὐρωπαϊκό χῶρο ἡ ἐργασία αὐτή δέν βρῆκε τήν ἀνταπόκριση πού τῆς ἄξιζε. Ἐκτιμήθηκε μόνο πολύ ἀργότερα, τό 1897 ὅταν δημοσιεύτηκε μετάφραση της στά Γαλλικά μέ τίτλο "Essai sur la representation analytique de la direction" (Δοκίμιο πάνω στήν ἀναλυτική παράσταση τῆς διευθύνσεως).

Ἡ γεωμετρική παράσταση τῶν μιγαδικῶν δέν ἦταν ὁ βασικός σκοπός τοῦ Wessel. Κυρίως ἔψαχνε γιά μιά ἀναλυτική ἔκφραση πού θά τοῦ ἐπέτρεπε νά ἐκφράσει μέ ἁπλό τρόπο τή διεύ-

θυνση ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος. Γιά τό σκοπό αὐτό εἰσήγαγε στό ἐπίπεδο τέσσερις διαφορετικές μονάδες, τίς +1, -1, +ε , -ε πού ἀντιπροσωπεύουν τίς τέσσερις φορές κατά μῆκος δύο καθέτων μεταξύ τους διευθύνσεων. Ἡ +1 συμβολίζει μιά μονάδα στή μιά διεύθυνση, ἡ +ε μιά μονάδα κάθετη σ'αὐτή, ἡ -1 μιά μονάδα ἀντίθετη της καί ἡ -ε μιά μονάδα ἀντίθετη στήν +ε. Σέ σχέση μέ τήν +1, οἱ ἄλλες μονάδες παρουσιάζουν μιά ἐκτροπή κατά 90^0,180^0 καί 270^0 ἀντίστοιχα. Ἄν, ὑπέθεσε ὁ Wessel, ὁ πολλαπλασιασμός τῶν μονάδων ἀντιστοιχεῖ στήν πρόσθεση τῶν ἐκτροπῶν, θά εἶναι:



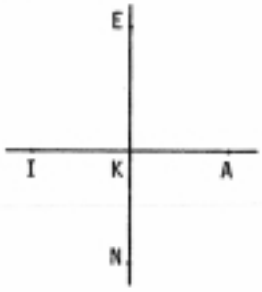
$(+1).(+\varepsilon) = +\varepsilon$, $(-1).(-1) = +1$ καί τελικά, ἐπειδή $(+\varepsilon).(+\varepsilon) = -1$, κατέληξε στό συμπέρασμα ὅτι

$$+\varepsilon = \sqrt{-1}$$

Πέτυχε δηλαδή ὁ Wessel νά δώσει μιά γεωμετρική ἑρμηνεία στή φανταστική μονάδα καθώς καί στή πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὅπως γράψαμε, ἡ ἐργασία αὐτή τοῦ Wessel παρέμεινε ἄγνωστη καί ἔτσι ἡ τιμή τῆς πρωτοπορίας στή γεωμετρική παράσταση τῶν μιγαδικῶν καί τῶν πράξεων τους, ἀποδόθηκε στό Γάλλο Jean Robert Argand (1768,;). Ὁ Argand τό 1806 δημοσίευσε, ἀνώνυμα, τό ἔργο του: "Essai sur une maniere de representer les quantites imaginaires dans les constructions geometriques". (Δοκίμιο πάνω σ'ἕνα τρόπο παράστασης τῶν φανταστικῶν ποσοτήτων μέ γεωμετρικές κατασκευές). Στήν ἐργασία αὐτή ξεκίνησε μέ τήν ἀναζήτηση μιᾶς ποσότητας x πού νά ἐπαληθεύει τήν ἀναλογία: $\frac{+1}{+x} = \frac{+x}{-1}$. Ἡ τελευταία μοιάζει μέ τίς ἀναλογίες $\frac{+1}{+1} = \frac{-1}{-1}$ καί $\frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$ ἀλλά δέν ἐπαληθεύεται ἀπό κανένα θετικό ἤ ἀρνητικό ἀριθμό γιατί προκύπτει $x=\sqrt{-1}$. Ὁ Argand ἄρχισε τότε νά ψάχνει γιά μιά διαφορετική ἑρμηνεία τῆς ποσότητας. Παρατήρησε ὅτι ὅπως τό "φανταστικό" τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἐξαφανίζεται μόλις τούς ἀποδοθεῖ κάποια πραγμα-

τική ἑρμηνεία (νά θεωρηθοῦν π.χ. σάν χρέος ὅταν ἐμφανίζονται σ'ἕνα οἰκονομικό πρόβλημα), ἔτσι καί μιά ἀντίστοιχη ἑρμηνεία τῶν φανταστικῶν, θά ἔλυνε τό πρόβλημα τῆς ζητούμενης ποσότητας. (Οἱ σκέψεις τοῦ Argand στό σημεῖο αὐτό εἶναι παρόμοιες μέ τίς σκέψεις πού ἔκανε ὁ Wallis πάνω στό ἴδιο ζήτημα, πρίν ἀπό 120 χρόνια.). Γιά νά πετύχει τή προηγούμενη ἑρμηνεία, ὁ Argand, κατέφυγε στή βοήθεια τῆς Γεωμετρίας καί γρήγορα ἔφτασε σέ ἀποτελέσματα ἀνάλογα μέ τοῦ Wessel.



Πάνω σέ μιά εὐθεία θεώρησε τά προσανατολισμένα εὐθύγραμμα τμήματα $\overline{KA}$ καί $\overline{KI}$ ὡς ἀντιπροσώπους τῆς θετικῆς καί ἀρνητικῆς μονάδας +1 καί −1, ἀντίστοιχα. Ὕστερα θεώρησε τό κάθετο τμῆμα $\overline{KE}$ ὡς ἀντιπρόσωπο τῆς ποσότητας $+\sqrt{-1}$ καί τό $\overline{KN}$ ὡς ἀντιπρόσωπο τῆς $-\sqrt{-1}$. Μέ τή βοήθεια τῶν προηγούμενων ὁρισμῶν, προσώρησε στή κατασκευή ἄλλων τμημάτων, ὅπως ἡ μέση ἀνάλογη 2 γνωστῶν τμημάτων καί μ'αὐτό τόν τρόπο ἔφτασε στή παράσταση ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\pm\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ (κατασκεύασε δηλαδή τά ἀντίστοιχα προσανατολισμένα τμήματα). Σ'αὐτό τό σημεῖο τόνισε, καί τήν ἀνακρίβεια τῆς ὀνομασίας "φανταστικός" ἀφοῦ οἱ ἀριθμοί αὐτοί ἀντιστοιχοῦν μέ συγκεκριμένα ἀντικείμενα.

Ἡ ἐργασία τοῦ Argand θά ἔμενε τελείως ἄγνωστη, ἄν τό 1813 δέν γινόταν μιά συζήτηση, σχετική μέ τό θέμα, στό μαθηματικό περιοδικό Annales de Mathematiques. Ὁ Argand ἀντιμετώπισε κριτική κυρίως σ'ὅτι ἀφορᾶ τούς (φαινομενικά) αὐθαίρετους ὁρισμούς πού χρησιμοποίησε ὥστε ἡ γεωμετρική παράσταση πού ἔδωσε στούς φανταστικούς νά "ταιριάζει" ἀκριβῶς μέ τίς καθιερωμένες ἀλγεβρικές πράξεις.

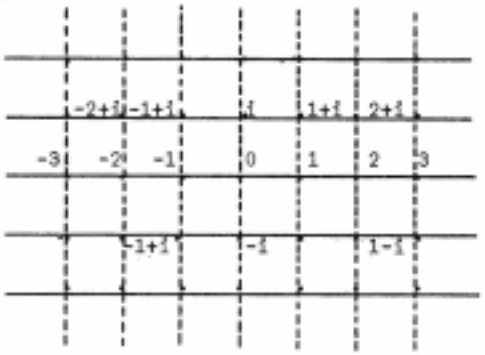
Πάντως οἱ ἰδέες τοῦ Argand δέν εἶχαν μεγάλη ἐξάπλωση καί αὐτό φαίνεται ἀπό τή δημοσίευση ἐκείνη τήν ἐποχή καί ἄλλων ἐργασιῶν σχετικῶν μέ τή γεωμετρική παράσταση τῶν μιγαδικῶν. Τήν ἴδια χρονιά, δηλαδή τό 1806, δημοσιεύεται τό ἄρθρο "Memoire sur les quantites imaginaires" (Μνημόνιο πάνω στίς φανταστικές ποσότητες) τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Bueé πού ζοῦσε

στήν Ἀγγλία. Τό 1828 δημοσιεύεται τό μικρό ἔργο τοῦ Γάλλου C. V. Mourey μέ τίτλο "La vrai theorie des quantites negatives et des quantites pretendues imaginaires" (Ἡ ἀληθινή θεωρία τῶν ἀρνητικῶν ποσοτήτων καί τῶν ποσοτήτων τῶν λεγομένων φανταστικῶν). Ἐπίσης τό 1828, δημοσιεύεται τό βιβλίο τοῦ Ἄγγλου κληρικοῦ John Warren (1796-1852) μέ τίτλο "A treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities" (Πραγματεία πάνω στή γεωμετρική παράσταση τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀρνητικῶν ποσοτήτων). Ὁ Warren μάλιστα ἐπανῆλθε τόν ἐπόμενο χρόνο μέ δύο ἄρθρα γιά νά καταπολεμήσει τίς ἀντιδράσεις πού προκάλεσε τό περιεχόμενο τοῦ βιβλίου του.

Ἡ δημοσίευση σέ μικρό διάστημα τόσων ἐργασιῶν δείχνει ὅτι εἶχαν ὡριμάσει πλέον οἱ καιροί γιά μιά ὁριστική ἑρμηνεία τῆς φύσης τῶν φανταστικῶν παραστάσεων. Στήν καθιέρωση τῆς γεωμετρικῆς παράστασης συντέλεσε ἀποφασιστικά ἡ ἀναγνώριση της ἀπό τόν Gauss, πού μέ τό κῦρος του ἄσκοῦσε μεγάλη ἐπίδραση στούς μαθηματικούς τῆς ἐποχῆς. Τό 1831 ὁ Gauss δημοσιεύσε μιά ἐργασία του γιά τά διτετραγωνικά ὑπόλοιπα, στήν ὁποία παρουσίασε τήν ἔννοια τῶν ἀκέραιων μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἢ ἀκέραιων τοῦ Gauss, ὅπως εἶναι σήμερα γνωστοί. Ἕνα μέρος αὐτῆς τῆς ἐργασίας εἶναι ἀφιερωμένο στήν ἐξήγηση τῆς γεωμετρικῆς παράστασης τῶν μιγαδικῶν.

Ὁ Gauss ἀπόρριψε σάν τελείως λαθεμένη τήν ἄποψη ὅτι οἱ ἔρευνες πού στηρίζονται στήν ἀριθμητική τῶν φανταστικῶν παραστάσεων εἶναι χωρίς περιεχόμενο καί πρότεινε τήν ἀκόλουθη γεωμετρική ἑρμηνεία:

Σέ μία εὐθεία μποροῦμε νά πάρουμε ἴσες ἀποστάσεις, ἀριστερά καί δεξιά ἑνός σημείου καί τά ἄκρα τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν μποροῦν νά συμβολιστοῦν ἀπό τούς ±1, ±2, ... Πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο καί ἀπό τίς δύο μερίες τῆς ἀρχικῆς εὐθείας μποροῦμε νά σχεδιάσουμε παράλληλες πρός αὐτή, μέ τά σημεῖα τους διευθετημένα κατά παρόμοιο τρόπο. Τό ἀρχικό σημεῖο, πού σημειώνεται μέ 0, ἔχει ὡς γειτονικά τά ±1 στήν ἀρχική εὐθεία καί τά ±i στίς παράλληλες. Τά σημεῖα στίς παράλληλες διαιροῦν ὅλο τό ἐπίπεδο σέ τετράγωνα ἴσου ἐμβαδοῦ. Τά σημεῖα αὐτά ἀν-



Τό ἐπίπεδο τοῦ Gauss

τιπροσωπεύουν στήν πραγματικότητα ἀκέραιους μιγαδικούς ἀριθμούς. Ὁ Gauss ὑποστήριξε ὅτι μέ τή παράσταση αὐτή αἰσθητοποιεῖται ἡ ἐκτέλεση τῶν πράξεων μεταξύ μιγαδικῶν ἀριθμῶν, κατά τέτοιο τρόπο ὥστε νά μή μένει τίποτε ἀνεξήγητο. Ἐπειδή ὅμως ἀναγνώριζε τή δυσπιστία τῶν ἄλλων ἀπέναντι στούς φανταστικούς, θεώρησε τό i ὡς μέσο ἀνάλογο μέγεθος τῶν +1 καί -1. Διατήρησε δηλαδή τή γεωμετρική ἀντίληψη τῆς φανταστικῆς μονάδας πού εἶχαν ἀναπτύξει οἱ προηγούμενοι του.

Δέν εἶναι γνωστό σέ ποιά ἔκταση γνώριζε ὁ Gauss τίς προγενέστερες ἐργασίες πάνω στό θέμα τῆς γεωμετρικῆς παράστασης τῶν μιγαδικῶν, ἀλλά ἀπό ἐπιστολές του τοῦ 1811 καί 1823 φαίνεται ὅτι τό ζήτημα τόν ἀπασχολοῦσε συνέχεια.

Τήν ἴδια ἐποχή μέ τή δημοσίευση τῆς ἐργασίας τοῦ Gauss, βρίσκεται σέ ἀνάπτυξη μιά κίνηση γιά τήν ἐπανεξέταση τῶν θεμελίων ὅλης τῆς Ἄλγεβρας. Στά πλαίσια αὐτῆς τῆς κίνησης, στήν ὁποία πρωτοστάτησαν Βρεττανοί κυρίως μαθηματικοί, ἐπιχειρήθηκε μιά διαφορετική προσέγγιση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Τή μεγαλύτερη ἐπίδραση εἶχε τό ἔργο τοῦ Ἰρλανδοῦ William Rowan Hamilton (1805-1865). Ὁ Hamilton, ἐκφράζοντας τίς ἀπόψεις τῆς Βρεττανικῆς σχολῆς, ὑποστήριξε τήν ἀνεξαρτησία τῆς Ἄλγεβρας ἀπό τή Γεωμετρία καί τήν ἀνάγκη ν' ἀναπτυχθεῖ αὐτή σάν ἀνεξάρτητη ἐπιστήμη. Μιά τέτοια ἄποψη δέν τήν ἐξυπηρετοῦσε βέβαια ἡ μέσω τῆς γεωμετρικῆς ἑρμηνείας κατοχύρωση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἀκολουθώντας τό παράδειγμα τοῦ Εὐ-

κλείδη πού θεμελίωσε άξιωματικά τή Γεωμετρία ώς έπιστήμη τοῦ άφηρημένου χώρου, ὁ Hamilton έπιχείρησε τή θεμελίωση τῆς 'Αλγεβρας ὡς έπιστήμης τοῦ άφηρημένου χρόνου. Καί θεώρησε,πολύ σωστά, σάν άπόδειξη όρθότητας τῶν ίδεῶν του, τήν δημιουργία μιᾶς όλοκληρωμένης θεωρίας τῶν άρνητικῶν καί μιγαδικῶν άριθμῶν, άνεξάρητης άπό γεωμετρικές ή άλλες έρμηνεῖες.

'Έτσι τό 1837 εἶδε τό φῶς τῆς δημοσιότητας τό έργο του "Theory of conjugate functions or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time." (Θεωρία τῶν συζυγῶν συναρτήσεων ή άλγεβρικῶν ζευγῶν' μέ ἕνα προκαταρκτικό καί στοιχειῶδες δοκίμιο τῆς άλγεβρας ὡς έπιστήμης τοῦ καθαροῦ χρόνου.) 'Εκεῖ ὁ Hamilton χρησιμοποίησε γιά τήν περιγραφή τῶν μιγαδικῶν διατεταγμένα ζεύγη καί γιά τόν όρισμό τῶν πράξεων τίς άκόλουθες σχέσεις:

$$(b_1,b_2)+(a_1,a_2) = (b_1+a_1,\ b_2+a_2)$$

$$(b_1,b_2)-(a_1,a_2) = (b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

$$(b_1,b_2)\times(a_1,a_2) = (b_1a_2-b_2a_1,\ b_2a_1+b_1a_2)$$

$$\frac{(b_1,b_2)}{(a_1,a_2)} = \left(\frac{b_1a_1+b_2a_2}{a_1^2+a_2^2} ,\ \frac{b_2a_1-b_1a_2}{a_1^2+a_2^2} \right)$$

'Απόδειξε ὕστερα τήν άντιμεταθετικότητα πρόσθεσης καί πολλαπλασιασμοῦ, καθώς καί τήν έπιμεριστικότητα τοῦ πολλα - πλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση. Γιά τούς πραγματικούς άριθμούς χρησιμοποίησε τό συμβολισμό (α,0), άντιστοιχίζοντας σέ κάθε άριθμό ἕνα ζεῦγος καί ἔκανε διάκριση άνάμεσα στά ζεύγη (1,0) καί (0,1), δίνοντας τήν όνομασία "πρωταρχική" καί "δεύτερεύουσα" μονάδα άντίστοιχα. 'Ιδιαίτερα άσχολήθηκε μέ τή πράξη τῆς ὕψωσης ζευγῶν σέ δύναμη καί ἔφτασε στά ἑξῆς άποτελέσματα:

$$(0,1)^{4n-1} = (0,-1) \quad (0,1)^{4n-3} = (0,1) \quad (0,1)^{4n} = (1,0)$$

$$(0,1)^{4n-2} = (-1,0).$$

Γιά τή περίπτωση τῆς $(-1,0)^{\frac{1}{2}}$ βρῆκε τά άποτελέσματα

$$(-1,0)^{\frac{1}{2}} = (0,1) \quad \text{καί} \quad (-1,0)^{\frac{1}{2}} = (0,-1)$$

Είδικά μέ τό πρῶτο, πού μπορεῖ νά γραφτεῖ $\sqrt{(-1,0)}=\sqrt{-1}=(0,1)$, φτάνουμε στήν οὐσία τοῦ ὅλου ζητήματος τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί δικαιώνεται ἀπόλυτα ἡ εἰσαγωγή τῶν διατεταγμέ - νων ζευγῶν ἀπό τόν Hamilton.

Μέ τήν ἐργασία αὐτή πέτυχε οὐσιαστικά ὁ Hamilton τήν κατασκευή ἑνός ἀξιωματικοῦ συστήματος πού περιγράφει ἄριστα τούς μιγαδικούς ἀριθμούς καί περιέχει σάν εἰδική περίπτωση τούς πραγματικούς. Ἔτσι, ἐκτός ἀπό τό γεγονός ὅτι ἔβαλε σέ στέρεες βάσεις τή θεωρία τῶν μιγαδικῶν (κλείνοντας μιά προσπάθεια 300 χρόνων), προώθησε σημαντικά καί τίς, ἀναπτυσσό - μενες ἐκείνη τήν ἐποχή, ἰδέες γιά τή δημιουργία τῆς μοντέρνας Ἄλγεβρας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. C.B. Boyer,"A History of Mathematics"(Wiley New York 1968)
2. H. Gericke.,"Geshichte des Zahlbegriffs"(Bibliographi - sches Institut Mannheim 1970).
3. L. Hogben.,"Mathematics for the Million" (W.W.Norton and Co New York 1943).
4. L. Hovy.,"Origins of modern Algebra"(Noordhoff Interna - tional Publishing Leyden 1973).
5. G. Loria.,Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν (μετάφραση Μ. Κωβαίου) (Ἔκδοση Ε.Μ.Ε. Ἀθήνα 1971).
6. Σ. Παπασταυρίδη.,"ΑΛΓΕΒΡΑ: Μία ἱστορική ἀνασκόπηση"(Μα - θηματική Ἐπιθεωρ.τόμος 12.Ἔκδοση Ε.Μ.Ε.Ἀθήνα 1978).
7. M. Vygodsky.,"Mathematical Handbook" (Mir publishers Mos- cow 1975).
8. H. Wussing-W. Arnold., "Biographien bedeutender Mathema- tiker".(Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1978).