Author: Δ. Δ. Καραγεώργου

Title: Μια άλυσος του Markov για εκπαιδευτικό Προγραμματισμό.

Abstract: Στο άρθρο αυτό γίνεται ανάλυση του μοντέλου μιας Μαρκοβιανής Αλύσου καθώς και εφαρμογές αυτής στο εκπαιδευτικό σύστημα.

Creator: HDML

ΜΙΑ ΑΛΥΣΟΣ ΤΟΥ MARKOV ΓΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

Ὑπό

Δ.Α. Καραγεώργου (Ph.D)-Γυμνασιάρχη Παθηματικοῦ.

I. Στιχαστικές διαδικασίες

Οἱ ἀνθρώπινες κοινότητες συχνά ταξινομοῦνται σέ τάξεις μέ βάση τά εἰσοδήματα τῶν μελῶν τους, τό ἐπάγγελμα,τήν κοινωνική θέση, τόν τόπο διαμονῆς τους κτλ. Μέλη τῶν κοινοτήτων αὐτῶν μετακινοῦνται μέ τήν πάροδο τοῦ χρόνου ἀπό τή μιά τάξη στήν ἄλλη. π.χ. ἐνῶ οἱ γονεῖς εἶναι στήν τάξη Χ,τά παιδιά τους δέν ἀκολουθοῦν πάντοτε τό ἐπάγγελμά τους καί ἔτσι μετά ἀπό λίγα χρόνια θά ἀνήκουν στήν τάξη Ψ.

Ἀπό τούς μαθητές πού φοιτοῦν σήμερα στήν πρώτη τάξη τοῦ Γυμνασίου ἕνα ποσοστό θά τελειώσει τό πανεπιστήμιο μετά ἀπό t χρόνια, ἕνα ἄλλο ποσοστό θά ἀσχοληθεῖ μέ γεωργικές δουλειές κτλ. Εἶναι φανερό ὅτι δέν μποροῦμε νά ποῦμε μέ βεβαιότητα πόσοι ἀκριβῶς ἀπό τούς μαθητές αὐτούς θά βρίσκονται σέ κάθε ἐπάγγελμα μετά ἀπό μερικά χρόνια.

Ἕνα ἀκόμη σπουδαῖο παράδειγμα εἶναι ἡ μετακίνηση τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ στήν ἐργατική τάξη τῶν βιομηχανιῶν. Κι' ἐδῶ δέν μποροῦμε νά προβλέψουμε μέ βεβαιότητα τό ποσοστό πού θά μετακινηθεῖ κατά τήν προσεχή δεκαετία.

Ἡ ἐνυπάρχουσα ἀβεβαιότητα στή συμπεριφορά τῶν ἀτόμων σ'αὐτές τίς περιπτώσεις σημαίνει ὅτι ἡ μελλοντική ἐξέλιξη τῆς κινητικότητας δέν μπορεῖ νά προβλεφθεῖ μέ βεβαιότητα,ἀλ-

λά μόνο πιθανοτικά. Δηλαδή έκεῖνο πού μποροῦμε νά κάνουμε εἶναι νά ἐπισυνάψουμε πιθανότητες μετακινήσεως σέ κάθε τάξη ἤ στάδιο. Ἔτσι οἱ διαδικασίες τῆς κινητικότητας τῶν ἀτόμων ὀνομάστηκαν στοχαστικές. Μέ ἁπλά λόγια μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἡ θεωρία τῶν στοχαστικῶν διαδικασιῶν (stochastic processes) ἀσχολεῖται μέ συστήματα, τά ὁποῖα ἐξελίσσονται μέ τό χρόνο (εἶναι συνάρτηση τοῦ χρόνου) σύμφωνα πάντα μέ τούς νόμους τῶν πιθανοτήτων. Τονίζουμε ὅτι ἡ θεωρία αὐτή ἀναπτύχθηκε γιά τή μελέτη φυσικῶν καί βιολογικῶν φαινομένων πολύ πρίν ἐφαρμοσθεῖ γιά τή μελέτη κοινωνικῶν προβλημάτων.

Οἱ λόγοι γιά τούς ὁποίους παρουσιάστηκε μεγάλη καθυστέρηση νά ἐφαρμοσθεῖ ἡ θεωρία τῶν στοχαστικῶν διαδικασιῶν στίς κοινωνικές ἐπιστῆμες εἶναι πολλοί.

Ἕνας ἀπό αὐτούς εἶναι ἡ ἔλλειψη ἱκανῶν ἀνθρώπων μέ ἐκπαίδευση καί ἐνδιαφέροντα στή θεωρία τῶν στοχαστικῶν διαδικασιῶν καί μέ εἰδίκευση στόν τομέα τῶν κοινωνικῶν ἐπιστημῶν. Ἄλλη βασική αἰτία εἶναι ὅτι πολλά ἀπό τά κοινωνικά προβλήματα, στά ὁποῖα χρειάζονται μετρήσεις, παραμένουν ἄλυτα καί χωρίς μετρήσεις, ὁπότε δέν ὑπάρχει δυνατότητα νά χρησιμοποιηθοῦν τεχνικές τῶν μαθηματικῶν. Παρά τίς δυσκολίες αὐτές καταπληκτή πρόοδος ἔχει γίνει καί στόν τομέα αὐτό κατά τά τελευταῖα δεκαπέντε χρόνια.

2. Ἅλυσοι τοῦ Markov (Markov chains)

Ἀπό τά προηγούμενα βγαίνει ἀβίαστα τό συμπέρασμα ὅτι ἡ κατασκευή ἑνός μαθηματικοῦ μοντέλου (ἡ δημιουργία ἐξισώσεων) γιά τήν περιγραφή ἑνός κοινωνικοῦ προβλήματος θά γίνει ἔτσι, ὥστε νά περιέχει τυχαῖες μεταβλητές, δηλαδή θά εἶναι στοχαστικό μοντέλο.

Ἡ πιό ἁπλή μορφή στοχαστικοῦ μοντέλου εἶναι ἐκείνη στήν ὁποία παίρνουμε σάν προϋπόθεση ὅτι ἡ ἀλλαγή τάξεως ἑνός ἀτόμου ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τήν παρούσα τάξη του καί ὄχι ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις ἀπό τίς ὁποῖες ἔχει περάσει. Ἄν ἀκόμη ἡ μετακίνηση αὐτή μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι γίνεται σέ συγκεκριμένα χρονικά σημεῖα, τότε τό μοντέλο θά εἶναι ἕνα ἁπλό μοντέ-

λο Μαρκοβιανῆς ἁλύσου. Ἡ μαθηματική διατύπωση μιᾶς ἁλύσου τοῦ Markov εἶναι ἡ ἀκόλουθη:

Ἅλυσος τοῦ Markov εἶναι μία ἀκολουθία $x_0, x_1, \ldots, x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots$ διακεκριμένων τυχαίων μεταβλητῶν μέ τήν ἰδιότητα ὅτι ἡ ὑπό συνθήκη κατανομή τῆς $x_{\nu+1}$, ὅταν δίνονται οἱ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τήν τιμή τῆς x_ν, ἀλλά ὄχι καί ἀπό τίς τιμές τῶν $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+1}$, δηλαδή:

$$\text{Prob}(x_{\nu+1} = k \mid x_0 = h, \ldots, x_\nu = j) = \text{Prob}(x_{\nu+1} = k \mid x_\nu = j).$$

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἐρευνοῦμε ἕνα φυσικό ἤ κοινωνικό σύστημα, τό ὁποῖο ἐξελίσεται σέ πεπερασμένο ἀριθμό καταστάσεων καί τό ὁποῖο μπορεῖ νά ἀλλάξει τήν κατάστασή του μόνο σέ συγκεκριμένα χρονικά σημεῖα. Σημειώνουμε τίς καταστάσεις μέ τούς ἀκέραιους ἀριθμούς $1,2,3,\ldots,\nu$ καί τά χρονικά σημεῖα μέ $0,1,2,\ldots$ καί ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει μία σταθερή πιθανότητα, P_{ij}, μέ τήν ὁποία ἕνα σύστημα πού βρίσκεται στήν κατάσταση i κατά τή χρονική στιγμή t θά μετακινηθεῖ στήν κατάσταση j κατά τή χρονική στιγμή $t+1$. Τέτοιες πιθανότητες ὁρίζονται γιά ὅλα τά ζεύγη (i,j) καί παρουσιάζονται σέ ἕνα $\nu \times \nu$ πίνακα πού θά λέγεται στά παρακάτω πίνακας μεταβάσεως (Transition matrix) καί εἶναι:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11}, & P_{12}, \ldots, & P_{1\nu} \\ P_{21}, & P_{22}, \ldots, & P_{2\nu} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot, \ldots, & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \ldots & \cdot \\ P_{\nu 1}, & P_{\nu 2}, \ldots, & P_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Στήν πιό ἁπλή περίπτωση πού μελετᾶμε ὑποθέτουμε ὅτι ὁ πίνακας P εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου. Τά στοιχεῖα $P_{ij} \geq 0$ καί $\sum_{j=1}^{\nu} P_{ij} = 1$, ἐπειδή P_{ij} εἶναι πιθανότητες καί ἕνα ἄτομο πού βρίσκεται στήν κατάσταση i κατά τή χρονική στιγμή t πρέπει νά εἶναι ὁπωσδήποτε σέ μία ἀπό τίς ἐπιτρεπτές καταστάσεις κατά τή χρονική στιγμή $t+1$.

Μία ἅλυσος τοῦ Markov εἶναι ἀπορροφητική ἄν ἔχει τουλάχιστο μία ἀπορροφητική κατάσταση (στήν ὁποία ὅταν βρεθεῖ

ένα άτομο δέν τήν έγκαταλείπει ποτέ) καί άπό κάθε κατάσταση είναι δυνατή ή μετάβαση σέ μιά άπορροφητική κατάση,άλλά είναι άδύνατο νά γίνει ή άντίθετη μετάβαση.

Άν ύπάρχουν E άπορροφητικές καί S όχι άπορροφητικές καταστάσεις, ό πίνακας P θά παίρνει τήν άκόλουθη μορφή

$$P = \begin{bmatrix} I_E & O \\ R & Q_S \end{bmatrix}$$

Όπου I_E είναι ένας E×E ταυτοτικός πίνακας, O είναι ένας E×S μηδενικός πίνακας, R είναι ένας S×E πίνακας καί Q_S είναι ένας S×S πίνακας.Ό πίνακας R δίνει τίς πιθανότητες γιά μεταβάσεις άπό όχι-άπορροφητικές σέ άπορροφητικές καταστάσεις καί ό Q_S δίνει τίς πιθανότητες γιά μετακινήσεις μεταξύ τῶν όχι άπορροφητικῶν καταστάσεων π.χ. μποροῦμε νά άριθμήσουμε γιά καταστάσεις τίς τάξεις τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου,τίς τάξεις τοῦ Γυμνασίου, τῶν Λυκείων, τῶν Άνωτάτων καί Άνωτέρων Σχολῶν κτλ. καί γιά χρονικά σημεῖα τήν 31.7. κάθε χρόνου.Έτσι ένας μαθητής πού είναι έφέτος στήν Γ' Λυκείου θά είναι τόν έπόμενο χρόνο στό α' έτος τοῦ Πανεπιστημίου ή σέ κάποια Άνώτερη σχολή ή θά έργάζεται ή...ή θά πεθάνει (άπορροφητική κατάσταση)κτλ.

Στά παρακάτω θά προσπαθήσουμε νά συνοψίσουμε τίς προσπάθειες πού έκαμαν πολλοί έπιστήμονες γιά νά έξηγήσουν τίς ροές τῶν άνθρώπων διά μέσου τοῦ έκπαιδευτικοῦ συστήματος χρησιμοποιώντας Μαρκοβιανά μοντέλα. Στό τέλος θά διατυπώσουμε καί θά έπιλύσουμε μερικά προβλήματα, τά όποῖα κατά τή γνώμη μας, μποροῦν νά βοηθήσουν στόν έκπαιδευτικό προγραμματισμό.

3. Έφαρμογές Μαρκοβιανῆς άλύσου στό Έκπαιδευτικό σύστημα

Άπό τούς σπουδαιότερους Έπιστήμονες πού κατασκεύασαν Μαρκοβιανά μοντέλα γιά νά έξηγήσουν έκπαιδευτικές, χρησιμοποιώντας διαφορετικές προϋποθέσεις ό καθένας είναι ό Gani (1963), ό Stone (1965), οί Clough καί McReynolds (1966), ό Thonstad (1969), οί Armitage, Smith καί Alper (1969), ό Marshall (1973) κ.ά.Όλα τά μοντέλα αύτά έχουν κοινή βασική Μαθηματική δομή έκείνη τῶν Young καί Almond (1961).Ό Thon -

stad μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἔκαμε τήν πιό ἐκτεταμένη χρήση τῶν στοχαστικῶν διαδικασιῶν γιά τήν Ἐκπαιδευτικό προγραμ - ματισμό.

Πρίν προχωρήσουμε εἶναι ἀναγκαῖο νά τονίσουμε ὅτι κανένας δέν κατόρθωσε νά κατασκευάσει ἕνα μοντέλο, γιά νά ἐξηγήσει ὅλες τίς λειτουργίες ἑνός ἐκπαιδευτικοῦ συστήματος. Ὁ λόγος εἶναι ἁπλός. Τό ἐκπαιδευτικό σύστημα εἶναι ἕνα τερά - στιο σύστημα μέ πολλούς ἐσωτερικούς καί ἐξωτερικούς ἐπηρεασμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι δύσκολο, ἄν ὄχι ἀδύνατο, νά προσδιοριστοῦν ποσοτικά γιά μιά ἀρκετά μεγάλη χρονική περίοδο,ὥστε νά μπορέσουμε νά ὑπολογίσουμε τούς συντελεστές πού εἶναι ἀπαραίτητοι Μαρκοβιανό μοντέλο. Τέτοια μοντέλα ὅμως χρησιμοποιήθηκαν μέ μεγάλη ἐπιτυχία σέ ὁρισμένους τομεῖς τοῦ ἐκπαιδευτικοῦ συστήματος π.χ. γιά τή μελέτη τῆς ροῆς τῶν ἐκπαι - δευτικῶν καί τῶν μαθητῶν διά μέσου τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ συστήματος.

Γιά τούς Ἐκπαιδευτικούς ὑπάρχουν σέ κάθε χώρα, λίγα ἤ πολλά, στατιστικά στοιχεῖα ἀπό ἀρκετά χρόνια. Στά στοιχεῖα αὐτά παρουσιάζονται οἱ ἐκπαιδευτικοί μέ τό βαθμό τους, τήν ἡλικία τους, τά χρόνια ὑπηρεσίας τους κτλ. Χρησιμοποιώντας τά στοιχεῖα αὐτά μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τούς συντελεστές πού εἶναι ἀπαραίτητοι γιά τήν κατασκευή ἑνός Μαρκοβιανοῦ μοντέλου.Ἀφοῦ κατασκευάσουμε τό μοντέλο αὐτό, τότε μέ τή βοήθεια τοῦ μαθηματικοῦ λογισμοῦ (καί κυρίως τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν) μποροῦμε νά προβλέψουμε πιθανοτικά τή μελλοντική κατάσταση τῶν Ἐκπαιδευτικῶν.

Γιά τούς μαθητές πάλι ὑπάρχουν στατιστικά στοιχεῖα γιά ἀρκετά χρόνια, πού δείχνουν τό πλῆθος τῶν μαθητῶν σέ κάθε τάξη, τό πλῆθος πού προχωρεῖ ἀπό μιά τάξη στήν ἄλλη κάθε χρόνο κτλ. Ἔτσι κι'ἐδῶ μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα ἁπλό Μαρκοβιανό μοντέλο πού νά μᾶς βοηθήσει νά προβλέψουμε, πιθανοτικά πάντοτε, τόν ἀριθμό τῶν μαθητῶν πού θά μᾶς παρακολουθήσουν στίς τάξεις τῶν διαφόρων Ἐκπαιδευτικῶν τομέων,θά ἐγκαταλείψουν τό σύστημα ἤ θά ἀποφοιτήσουν μέ κάποιο ἐπίπεδο ἐκπαιδεύσεως. Τό πλῆθος τῶν μαθητῶν πού μετακινεῖται μέσα στό ἐκπαιδευτικό σύστημα πρός τή μιά ἤ τήν ἄλλη κατεύθυν-

ση έπηρεάζεται άπό πολλούς παράγοντες. Μερικοί άπό αύτούς εί-ναι: Ή χωρητικότητα τῶν σχολείων καί ή πολιτική τῆς είσαγω-γῆς σ'αύτά, ή πνευματική ίκανότητα τῶν παιδιῶν, ή χορήγηση ὑποτροφιῶν, ή ποιότητα τῆς διδασκαλίας κτλ.

Τονίζουμε μέ ἔμφαση ὅτι γιά τήν κατασκευή ἑνός μαθημα-τικοῦ μοντέλου βασικό ρόλο παίζουν τά στοιχεῖα πού ἔχουμε.Γι' αὐτό ή ἀπόφαση γιά συγκέντρωση στατιστικῶν στοιχείων θά πρέ-πει νά παίρνεται μετά άπό σοβαρή Ἐπιστημονική ἀνάλυση τῶν προβλημάτων πού θέλουμε νά σπουδάσουμε μελοντικά καί ὄχι, ὅ-πως στή χώρα μας, άπό κάποιο ὑπάλληλο ἑνός γραφείου.

Ἄς δοῦμε τώρα πώς θά κατασκευάσουμε ἕνα πίνακα P, πού νά περιέχει ὅλες τίς μετακινήσεις, οἱ ὁποῖες γίνονται στό ἐκπαι-δευτικό σύστημα.Στά ἑπόμενα οἱ δεῖκτες h καί k παριστάνουν κάθε ζεῦγος σχολικῶν δραστηριοτήτων, e παριστάνει κάθε τελι-κό ἐπίπεδο ἐκπαιδεύσεως, S εἶναι οἱ σχολικές δραστηριότητες καί E εἶναι κατηγορίες πού παρουσιάζουν τελικά ἐπίπεδα ἐκπαι-δεύσεως. Στό ἐκπαιδευτικό σύστημα ὅταν χρησιμοποιοῦμε τή λέ-ξη "ἔτος" ἐννοοῦμε τό σχολικό ἔτος. Ἡ θνησιμότητα κατά τή διάρκεια τοῦ σχολείου μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς τελική κατάσταση καί νά συμπεριληφθεῖ μέσα σέ μιά άπό τίς E κατηγορίες.

Ἔτσι ὁρίζουμε τά παρακάτω ποσοστά μεταβάσεως(Transition ratios).

q_{hk} = Τό ποσοστό τῶν μαθητῶν πού βρίσκονται στή δραστη-ριότητα h κατά τό ἔτος t καί οἱ ὁποῖοι θά εἶναι στή δραστηριότητα k τό ἑπόμενο ἔτος (h,k=1,2,...,S)

r_{he} = Τό ποσοστό τῶν μαθητῶν πού βρίσκονται στή δραστη-ριότητα h κατά τό ἔτος t καί οἱ ὁποῖοι θά φύγουν άπό τό σύστημα στό τέλος τοῦ χρόνου μέ ἐπίπεδο ἐκ-παιδεύσεως e (h=1,2,...,S καί e=1,2,...,E).

Ἄν θεωρήσουμε τά q_{hk} καί r_{he} σάν πιθανότητες μποροῦμε νά ἔχουμε ἕνα στοχαστικό μοντέλο, τό ὁποῖο θά εἶναι μία άπορ-ροφητική ἅλυσος τοῦ Markov. Σέ ἀντίθετη περίπτωση θά ἔχουμε ἕνα προσδιοριστικό μοντέλο. Τά παρακάτω ἀποτελέσματα ἀντιστοι-χοῦν μέ παρόμοια ἀποτελέσματα γιά ἀναμενόμενες τιμές στή στο-χαστική περίπτωση (βλέπε W. Feller, 1957 ἤ J.C. Kemeny).

Τονίζουμε ὅτι τά ποσοστά μεταβάσεως γιά τούς μαθητές,σέ

μιά δοσμένη σχολική δραστηριότητα, ὑποτίθενται ὅτι εἶναι ὁμοιόμορφα, δηλαδή δέ μᾶς ἐνδιαφέρει ἄν ὅλοι οἱ μαθητές ἔφθασαν στή δραστηριότητα αὐτή ἀκολουθώντας τόν ἴδιο ἤ διαφορετικούς δρόμους κατά τά προηγούμενα χρόνια. Μέ τούς ἀνωτέρω συμβολισμούς ἔχουμε τούς παρακάτω πίνακες μεταβάσεως:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{1S} \\ q_{21}, q_{22}, \ldots, q_{2S} \\ \cdot \quad ,\cdot\cdot \quad , \ldots, \cdot \\ q_{S1}, q_{S2}, \ldots, q_{SS} \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad R = \begin{bmatrix} r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1E} \\ r_{21}, r_{22}, \ldots, r_{2E} \\ \cdot \quad ,\cdot\cdot \quad , \ldots, \cdot \\ r_{S1}, r_{S2}, \ldots, r_{SE} \end{bmatrix}$$

Ὁ πίνακας Q περιέχει τά ποσοστά μεταβάσεως μεταξύ τῶν σχολικῶν δραστηριοτήτων. Τά διαγώνια στοιχεῖα $q_{11}, q_{22}, \ldots, q_{SS}$ εἶναι τά ποσοστά ἐπαναλήψεως, δηλαδή q_{ii} εἶναι τό ποσοστό τῶν μαθητῶν σέ κάποια σχολική δραστηριότητα i, πού θά εἶναι στήν ἴδια δραστηριότητα τόν ἐπόμενο χρόνο.

Ὁ πίνακας R περιέχει τά ποσοστά τῶν μαθητῶν οἱ ὁποῖοι ἀποχωροῦν ἀπό κάθε σχολική δραστηριότητα.

Κανονικά σέ κάθε στήλη τοῦ πίνακα R θά ἔπρεπε νά ὑπάρχει ἕνα μή μηδενικό στοιχεῖο, ἄν τά ἄτομα πού ἔχουν τό ἴδιο τελικό ἐπίπεδο ἐκπαιδεύσεως εἶχαν ἀποφοιτήσει ἀπό τήν ἴδια σχολική δραστηριότητα. Στήν πραγματικότητα ὅμως δέν συμβαίνει αὐτό. Μιά αἰτία εἶναι ὅτι μερικοί μαθητές, σπουδαστές κτλ., πού συμπλήρωσαν μέ ἐπιτυχία ἕνα ἐπίπεδο ἐκπαιδεύσεως, συχνά προσπαθοῦν γιά ἕνα ἤ περισσότερα ἀκόμη χρόνια γιά νά ἐπιτύχουν ἀνώτερο ἐπίπεδο ἐκπαιδεύσεως, ἀλλά δέν τό κατορθώνουν καί ἔτσι παραμένουν στό προηγούμενο ἐπίπεδο ἐκπαιδεύσεως. Ἀκόμη τονίζουμε ὅτι πολλοί δρόμοι διά μέσου τοῦ ἐκπαιδευτικοῦ συστήματος ὁδηγοῦν στό ἴδιο τελικό ἐπίπεδο ἐκπαιδεύσεως.

Γι' αὐτό κάθε στήλη τοῦ πίνακα R περιέχει μερικά θετικά στοιχεῖα. Ἐπίσης κάθε γραμμή τοῦ πίνακα R δύναται νά περιέχει μερικά θετικά στοιχεῖα, ἀφοῦ ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι δυνατό νά ἔχουμε μεταβάσεις ἀπό μία σχολική δραστηριότητα σέ διαφορετικά τελικά ἐπίπεδα ἐκπαιδεύσεως. Ἄν κάποιος εἶναι σέ μιά ἀπό τίς E κατηγορίες ὑποθέτουμε ὅτι δέ μετακινεῖται ποτέ ἀπό αὐτή. Ἡ ὑπόθεση αὐτή μπορεῖ νά τροποποιηθεῖ, ἄν εἰ -

σάγουμε πιθανότητες γιά έπιστροφή σέ κάποιους τύπους σχολικῆς δραστηριότητας (έκπαίδευση ένηλίκων, μετεκπαίδευση κτλ.) Τό άθροισμα τῶν στοιχείων τῶν άντιστοίχων σειρῶν στούς πίνακες Q καί R εἶναι μονάδα, γιατί ἕνα άτομο δύναται νά άκολουθήσει μία άπό τίς S σχολικές δραστηριότητες ἤ νά έγκαταλείψει τό σχολεῖο μεταπηδώντας σέ μιά άπό τίς E τελικές κατηγορίες έκπαιδεύσεως (συμπεριλαμβανομένης τοῦ θανάτου). Δηλαδή:

$$\sum_{s=1}^{S} q_{hs} + \sum_{e=1}^{E} r_{he} = 1, \quad h=1,2,3,\ldots,S$$

Τώρα μποροῦμε νά διατυπώσουμε μερικά προβλήματα καί νά δόσουμε καί τίς άντίστοιχες άπαντήσεις.

4. Προβλήματα

Πρόβλημα 1ο. Ποιό εἶναι τό ποσοστό τῶν σπουδαστῶν πού βρίσκονται τώρα στή δραστηριότητα h καί οἱ ὁποῖοι θά εἶναι στή δραστηριότητα k μετά άπό τ χρόνια;

Γιά νά άπαντήσουμε στό πρόβλημα αὐτό δίνουμε πρῶτα τούς παρακάτω ὁρισμούς:

$q_{hk}^{(\tau)}$ = Τό ποσοστό τῶν άτόμων πού βρίσκονται τώρα στή δραστηριότητα h καί τά ὁποῖα θά εἶναι στή δραστηριότητα k μετά τ χρόνια ($\tau=0,1,2,\ldots$, $h,k=1,2,3,\ldots,S$).

$q_{hk}^{(0)}$ = 1 ἄν h=k καί μηδέν σέ κάθε ἄλλη περίπτωση.

$q_{hk}^{(1)} = q_{hk}$.

Άποδεικνύεται ὅτι:

$$q_{hk}^{(2)} = \sum_{s=1}^{S} q_{hs}q_{sk} \text{ καί } q_{hk}^{(3)} = \sum_{s=1}^{S} q_{hs}^{(2)} \cdot q_{sk}$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἰσχύει ὁ άκόλουθος έπαναληπτικός τύπος:

$$q_{hk}^{(\tau)} = \sum_{s=1}^{S} q_{hs}^{(\tau-1)} \cdot q_{sk}$$

Σημειώνουμε ὅτι $q_{hk}^{(2)}$ εἶναι τό (h,k) στοιχεῖο τοῦ πίνακα Q^2. Χρησιμοποιώντας τόν προηγούμενο ἐπαναληπτικό τύπο βρίσκουμε ὅτι $q_{hk}^{(\tau)}$ εἶναι τό (h,k) στοιχεῖο τοῦ πίνακα Q^τ. Ἔτσι ἔχουμε τό ἀκόλουθο συμπέρασμα: Τό (h,k) στοιχεῖο τοῦ πίνακα μεταβάσεως Q εἰς τήν τ δύναμη δίνει τό ποσοστό τῶν μαθητῶν, πού εἰσέρχονται στή δραστηριότητα h, καί οἱ ὁποῖοι τ χρόνια ἀργότερα θά εἶναι στή δραστηριότητα k.

Ὁ Thonstad (1969) ἔχει βεβαιώσει μέ τούς ἐμπειρικούς του ὑπολογισμούς ὅτι οἱ μεγάλες δυνάμεις τοῦ πίνακα Q (τ=20 ἤ 25) εἶναι κοντά στό μηδενικό πίνακα. Αὐτό συμφωνεῖ καί μέ τήν πραγματικότητα. π.χ. τό ποσοστό τῶν μαθητῶν πού εἶναι σήμερα στήν πρώτη τάξη τοῦ Γυμνασίου καί θά βρίσκεται μετά ἀπό 20 χρόνια στή Γ' τάξη Λυκείου εἶναι μηδέν.

Εἶναι δυνατόν νά μᾶς χρειασθεῖ τό ποσοστό τῶν μαθητῶν πού βρίσκονται σήμερα στή δραστηριότητα h καί οἱ ὁποῖοι τ χρόνια ἀργότερα θά βρίσκονται σέ κάποια ἀπό τίς S δραστηριότητες. Τό ποσοστό αὐτό ὀνομάζεται "ποσοστό παραμονῆς" (retention ratio) καί τό συμβολίζουμε μέ $q_h^{(\tau)}$.

Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι:

$$q_h^{(\tau)} = \sum_{k=1}^{S} q_{hk}^{(\tau)} \quad (h=1,2,\ldots,S)$$

δηλαδή εἶναι τό ἄθροισμα τῆς h σειρᾶς τοῦ πίνακα Q^τ.

Πρόβλημα 2ο. Ποιός εἶναι ὁ μέσος χρόνος πού θά παραμείνουν στή δραστηριότητα k ἐκεῖνοι πού εἰσέρχονται στή δραστηριότητα h;

Τό μέσο χρόνο, τόν ὁποῖο σπαταλοῦν στή δραστηριότητα k τά ἄτομα πού εἰσέρχονται στή δραστηριότητα h, τόν συμβολίζουμε W_{hk} καί τόν ὑπολογίζουμε ὡς ἑξῆς:

Στόν πρῶτο χρόνο σπαταλοῦν ἕνα ἀκριβῶς χρόνο, ἄν h=k καί μηδέν χρόνια σέ κάθε ἄλλη περίπτωση. Στό δεύτερο χρόνο $q_{hk}^{(1)}$ χρόνια σπαταλοῦν, στόν τρίτο $q_{hk}^{(2)}$ κτλ. Ἔτσι ἔχουμε τό τύπο:

$$W_{hk} = q_{hk}^{(0)} + q_{hk}^{(1)} + q_{hk}^{(2)} + \ldots, \quad h,k = 1,2,\ldots,S$$

Από τή θεωρία πινάκων γνωρίζουμε ότι:

"Αν $q_{hk} \geq 0$ καί $\sum_{k} q_{hk} < 1$, $h,k=1,2,\ldots,S$

τότε ὁ πίνακας $(I-Q)^{-1}$ ὑπάρχει, εἶναι ὄχι ἀρνητικός καί ἡ δυναμοσειρά τῶν πινάκων $I+Q+Q^2+\ldots$ συγκλίνει στόν πίνακα $W = (I-Q)^{-1}$.

Μέ τίς προϋποθέσεις αὐτές ἀποδεικνύεται ὅτι τό $\sum q_{hk}^{(\tau)}$ σχηματίζει μία συγκλίνουσα σειρά καί ὅτι τό W_{hk} εἶναι τό(h,k) στοιχεῖο τοῦ πίνακα W.

"Ετσι ἔχουμε τό συμπέρασμα: Τό στοιχεῖο (h,k) τοῦ πίνακα W μᾶς δίνει τό μέσο χρόνο πού θά παραμείνουν στή δραστηριότητα k ἐκεῖνοι πού εἰσέρχονται τώρα στή δραστηριότητα h.

Πρόβλημα 3ο. Ποιός εἶναι ὁ μέσος ἀριθμός τῶν ἐτῶν πού χρειάζονται νά τελειώσουν τό σχολεῖο ἐκεῖνοι πού εἰσέρχονται στή δραστηριότητα h;

Συμβολίζοντας τήν περίοδο αὐτή μέ W_h εἶναι εὔκολο νά ἀποδείξουμε ὅτι:

$$W_h = \sum_{k=1}^{S} W_{hk} \quad , \quad h=1,2,\ldots,S$$

δηλαδή εἶναι τό ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῆς h σειρᾶς τοῦ πίνακα $W=(I-Q)^{-1}$.

Πρόβλημα 4ο. Ποιό εἶναι τό ποσοστό τῶν ἀτόμων, πού εἰσέρχονται στή δραστηριότητα h, καί τά ὁποῖα, τ χρόνια ἀργότερα θά ἔχουν ἀποφοιτήσει μέ ἐπίπεδο ἐκπαιδεύσεως e;

Συμβολίζουμε αὐτό τό ποσοστό μέ $r_{he}^{(\tau)}$ καί θά τό λέμε "ποσοστό ἀποφοιτήσεως σέ ὁρισμένο χρόνο". Γιά νά ὑπολογίσουμε τό ποσοστό αὐτό μποροῦμε νά σκεφτοῦμε ὡς ἑξῆς: Παίρνουμε τά ποσοστά πού παραμένουν σέ κάθε σχολική δραστηριότητα τ-1 χρόνια ἀπό τώρα καί πέρα καί ἔπειτα πολλαπλασιάζουμε τά ποσοστά αὐτά μέ τά ἀντίστοιχα ποσοστά ἀποφοιτήσεως.

Δηλαδή $r_{he}^{(\tau)} = \sum_{S=1}^{S} q_{hS}^{(\tau-1)} . r_{Se}$, $\tau=1,2,\ldots$; $h=1,2,\ldots,S$; $e=1,2,\ldots,E$.

Μέ ἄλλα λόγια $r_{he}^{(\tau)}$ εἶναι τό στοιχεῖο (h,e) τοῦ πίνακα

$R^{(\tau)} = Q^{(\tau-1)}.R$. Αν $\tau=1$, τότε έχουμε αποφοίτηση στό τέλος τοῦ τρέχοντα σχολικοῦ χρόνου.

Πρόβλημα 5ο. Τί ποσοστό μαθητῶν ἀπό αὐτούς πού εἰσέρχονται στή δραστηριότητα h θά ἔχουν συμπληρώσει ἐπίπεδο ἐκπαιδεύσεως e σέ διάρκεια x χρόνων;

Αὐτό βρίσκεται ἀθροίζοντας τά μεγέθη $r_{he}^{(\tau)}$ δηλαδή $\sum_{\tau=1}^{x} r_{he}^{(\tau)}$. Τό ἄθροισμα αὐτό εἶναι τό στοιχεῖο (h,e) τοῦ πίνακα $\sum_{\tau=1}^{x} R^{(\tau)}$.

Πρόβλημα 6ο. Ποιό εἶναι τό ποσοστό τῶν μαθητῶν τῆς δραστηριότητας h, οἱ ὁποῖοι ἀργά ἤ γρήγορα θά ἀποφοιτήσουν μέ ἐπίπεδο ἐκπαιδεύσεως e;

Συμβολίζουμε τό ποσοστό αὐτό μέ $r_{he}^{\text{ὁλικό}}$. Εἶναι φανερό ὅτι γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ $r_{he}^{\text{ὁλικό}}$ ἀρκεῖ νά προσθέσουμε τά $r_{he}^{(\tau)}$, δηλαδή εἶναι

$$r_{he}^{\text{ὁλικό}} = \sum_{\tau=1}^{\infty} r_{he}^{(\tau)} = \sum_{S=1}^{S} \left(\sum_{\tau=1}^{\infty} q_{hS}^{(\tau-1)} \right) r_{Se}$$

ἤ χρησιμοποιώντας W_{hk} μποροῦμε νά γράψουμε:

$$r_{he}^{\text{ὁλικό}} = \sum_{S=1}^{S} W_{hS} r_{Se}$$

Δηλαδή $r_{he}^{\text{ὁλικό}}$ εἶναι τό στοιχεῖο (h,e) τοῦ πίνακα

$$R^{\text{ὁλικό}} = W.R = (I-Q)^{-1}.R$$

Εἶναι εὐνόητο ὅτι τά παραπάνω θεωρητικά ἀποτελέσματα μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά πρακτικούς σκοπούς ἄν ὅλα τά ποσοστά (πιθανότητες) μετακινήσεως εἶναι γνωστά. Χρειαζόμαστε δηλαδή νά ἔχουμε στατιστικά στοιχεῖα ἀναλυτικά γιά ἀρκετά χρόνια ὥστε μέ ἀκρίβεια νά ὑπολογίσουμε τά ποσοστά αὐτά.

Ὑπάρχουν ἀρκετοί ἐπιστήμονες πού ὑποστηρίζουν ὅτι δέν εἶναι δυνατόν νά ἔχουμε ἀξιόπιστα ἀποτελέσματα ἀπό τήν ἐφαρμογή τοῦ παραπάνω μοντέλου τῆς ἁλύσου τοῦ Markov στό ἐκπαιδευτικό σύστημα. Ἐμεῖς πιστεύουμε ὅτι εἶναι προτιμότερο νά

έχουμε ένα μοντέλο, πού νά περιγράφει τήν όλη λειτουργία τοῦ έκπαιδευτικοῦ συστήματος καί νά μᾶς δίνει έστω καί κάποια προσεγγιστικά άποτελέσματα, παρά νά μή έχουμε καθόλου μοντέλο δηλ. Έπιστημονική μελέτη τοῦ Έκπαιδευτικοῦ συστήματος. Τά Μαρκοβιανά μοντέλα άποδείχτηκαν χρησιμότατα γιά τή μελέτη τῆς ροῆς τοῦ προσωπικοῦ μιᾶς βιομηχανίας καθώς καί σέ άλλους τομεῖς τῶν κοινωνικῶν έπιστημῶν πού έφαρμόστηκαν πρᾶγμα πού τά έχει καθιερώσει σάν βασικά μοντέλα γιά τή μελέτη καί κοινωνικῶν φαινομένων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Armitage, P., Smith, C., and Alper, P. (1969) "Decision Models for Educational planning", Allen Lane and Penguin Press.

2. Bartholomew, D.J. (1973). "Stochastic Models for Social Processes", John Wiley and Sons, London.

3. Clough, D.J. and McReynolds, W.P. (1966). "State transition Model of an educational system incorporating a constraint theory of Supply and Demand, Ontario J. of Educational Research, Vol. 19,1.

4. Feller, W. (1968). "An introduction to probability theory and its application". 3rd ed., vol. 1, John Wiley, New York.

5. Gani, J. (1963), "Formulae for projecting enrolments and degrees awarded in Universities, JRSSA, 126, 400-409.

6. Kemeny, J.G. and Snell, J.L. (1960)."Finite Markov chains", D. Van Nostrand Company.

7. McClean, S.I. and Karageorgos, D.L.(1978). "An age Stratified Manpower Moled applied to the educational system", The statistician, vol. 28, No 1.

8. Thonstad, T. (1969). "Education and Manpower: Theoretical models and Empirical applications", Oliver and Boyd, London.

9. Young, A. and Almond, G. (1961). "Predicting distributions of Staff", Comp. J.3, 246-250.