Author: Β. Πολυδούρης

Title: Τι είναι τα διανύσματα

Creator: HDML

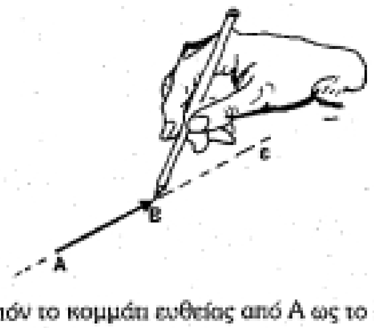
Τί είναι τα διανύσματα

Β. Πολυδούρης

Η λέξη "διάνυσμα" παράγεται από το ρήμα διανύω, που σημαίνει διατρέχω. Επειδή το διατρέχω σημαίνει κίνηση, έτσι και το διάνυσμα φανερώνει κίνηση. Στην κίνηση διακρίνουμε α) το **σώμα** που κινείται και β) το **δρόμο** που πάνω σ' αυτόν κινείται. Αυτόν τον δρόμο που διατρέχει ένα κινούμενο σώμα, η Φυσική τον λέει "τροχιά".

Από τη Γεωμετρία πάλι έχουμε μάθει για τις **γραμμές** και για τα είδη των γραμμών· ευθεία, καμπύλη, τεθλασμένη. Όμως οι γραμμές δεν είναι παρά "τροχιές". Είναι αδύνατο να χαράξουμε μια γραμμή, αν η μύτη του μολυβιού ή άλλου μυτερού οργάνου δεν διατρέξει μια διαδρομή πάνω σε χαρτί ή σε άλλη κατάλληλη επιφάνεια και κατά τη διαδρομή της η μύτη να αφήνει **ένα ορατό ίχνος**. Κάθε λοιπόν γραμμή είναι και μια τροχιά και φυσικά την έχει διατρέξει κάποιο κινούμενο σώμα.

Τώρα αν το κινούμενο σώμα είναι **ένα σημείο** και η τροχιά του σημείου αυτού είναι **ένα κομμάτι ευθεία** (με αρχή και τέλος), τότε το κομμάτι της ευθείας το λέμε **διάνυσμα** (σχ. 1).



Λοιπόν το κομμάτι ευθείας από Α ως το Β του πάνω σχήματος είναι ένα διάνυσμα, αν σκεφτούμε πως κάποια γραφίδα το χάραξε, που ξεκίνησε απ' το σημείο Α, κινήθηκε προς το Β ευθύγραμμα και σταμάτησε στο σημείο Β. Συμβολικά το διάνυσμα αυτό το παρουσιάζουμε έτσι:

$$\overrightarrow{AB}$$

Το σύμβολο αυτό έχει τούτο το νόημα: Το σημείο Α είναι η **αρχή** του διανύσματος. Το σημείο Β είναι το **τέλος** του διανύσματος. Η κατεύθυνση από Α προς Β (όπως δείχνει το βέλος), είναι η **φορά** του διανύσματος. Η ευθεία (ε) (με τις τελείες) που πάνω της βρίσκεται το διάνυσμα, είναι ο **φορέας** του διανύσματος. Ακόμα, η απόσταση απ' το Α ως το Β, που τη συμβολίζουμε (ΑΒ), λέγεται **μέτρο** του διανύσματος και είναι ένας θετικός αριθμός (δηλ. ο αριθμός που φανερώνει την απόσταση από Α ως Β).

Έτσι, τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα ενός διανύσματος είναι πέντε, δηλαδή η **αρχή**, το **τέλος**, ο **φορέας**, η **φορά** και το **μέτρο**.

Παρατήρηση.
Την ιδέα του διανύσματος, τα Μαθηματικά την παρέλαβαν από τη Φυσική. Όπως ξέρουμε, η Φυσική μελετά την κίνηση καθώς και την αιτία της κίνησης, που λέγεται δύναμη. Η δύναμη λοιπόν είναι ένα μέγεθος που παριστάνεται μ' ένα διάνυσμα, και αυτό γιατί τα γνωρίσματα της δύναμης (σημείο εφαρμογής, διεύθυνση, φορά, μέτρο), είναι τα ίδια με τα γνωρίσματα του διανύσματος. Ώστε το διάνυσμα δεν είναι κάτι **αυθαίρετο** αλλά είναι μια ιδέα που τη συναντούμε σε πολλά φυσικά μεγέθη, όπως η δύναμη, η ταχύτητα κ.ά.

Πότε δυο διανύσματα είναι ίσα και πότε αντίθετα.

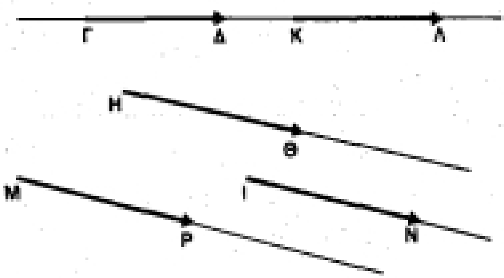
Δυο διανύσματα (ή και περισσότερα) για να είναι **ίσα** θα πρέπει:

α) Να έχουν **ίσα μέτρα**.

β) Να βρίσκονται στον **ίδιο φορέα** ή σε παράλληλους φορείς (παράλληλες ευθείες).

γ) Να έχουν την **ίδια φορά** (δηλαδή να είναι ομόρροπα).

Έτσι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{K\Lambda}$ είναι ίσα, γιατί $(\Gamma\Delta) = (K\Lambda) = 2cm$ (σχ. 2), βρίσκονται στον ίδιο φορέα (ε) και έχουν την ίδιαν φορά (είναι ομόρροπα). Ακόμα $\overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{MP}$ (σχ. 3), γιατί $(H\Theta) = (IN) = (MP) = 2{,}5cm$, βρίσκονται σε παράλληλους φορείς (παράλληλες ευθείες) και έχουν την ίδια φορά (είναι ομόρροπα).



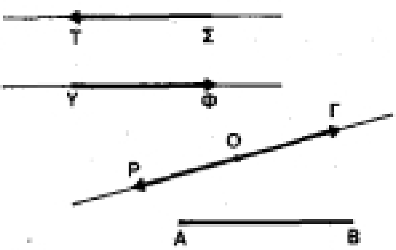
Η ισότητα των διανυσμάτων μας χρησιμεύει σε τούτο· ότι ένα διάνυσμα μπορούμε να το μετακινήσουμε σε μια άλλη ορισμένη θέση και στη νέα θέση, **να είναι ίσο** με το διάνυσμα της αρχικής θέσης. Ώστε, η ισότητα των διανυσμάτων επιτρέπει την αντικατάσταση ενός διανύσματος με ένα άλλο ίσο προς το πρώτο. Όπως ακριβώς ένας αριθμός μπορεί να αντικατασταθεί με κάποιον άλλον ίσον προς αυτόν (ή με αριθμητική παράσταση ίση προς τον αρχικό αριθμό).

Τώρα, δυο διανύσματα για να είναι **αντίθετα,** θα πρέπει:

α) Να έχουν **ίσα μέτρα**.

β) Να βρίσκονται στον **ίδιο φορέα** ή σε παράλληλους φορείς.

γ) Να έχουν την **αντίθετη φορά** (δηλαδή να είναι αντίρροπα).



Έτσι, τα διανύσματα $\overrightarrow{ΟΠ}$ και $\overrightarrow{ΟΡ}$ (σχ. 4) είναι αντίθετα, γιατί (ΟΠ) = (ΟΡ) = 2,2 cm, βρίσκονται στον ίδιο φορέα (η) και έχουν αντίθετες φορές (είναι αντίρροπα). Ακόμα, τα διανύσματα $\overrightarrow{ΣΤ}$ και ΥΦ είναι αντίθετα, γιατί

(ΣΤ) = (ΥΦ) = ,16 cm,

βρίσκονται σε παράλληλους φορείς και έχουν αντίθετες φορές (είναι αντίρροπα). Θα πρέπει να πούμε ότι, ανάμεσα στα σημεία Α και Β και στο ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει, μπορούμε να σκεφτούμε δυο αντίθετα διανύσματα, τα $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΒΑ}$ (σχ. 4). Αυτό είναι φανερό γιατί (ΑΒ) = (ΒΑ), βρίσκονται στον ίδιο φορέα και είναι αντίρροπα.

Τα αντίθετα διανύσματα μας θυμίζουν τους αντίθετους αριθμούς, γιατί όπως θα δούμε πιο κάτω, έχουν άθροισμα **μηδέν** [0]. Δηλαδή:

$$\overrightarrow{ΟΠ} + \overrightarrow{ΟΡ} = 0, \qquad \overrightarrow{ΣΤ} + \overrightarrow{ΥΦ} = 0,$$

$$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΑ} = 0 \qquad \text{(i)}$$

Αλλά η πρόσθεση μας οδηγεί στην αφαίρεση. Αν στην τελευταία ισότητα (i) μεταφέρουμε το $\overrightarrow{ΒΑ}$ στο δεύτερο μέλος, θα έχουμε:

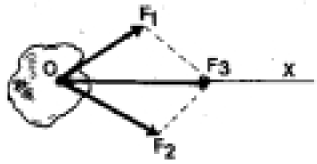
$$\overrightarrow{ΑΒ} = -\overrightarrow{ΒΑ} \qquad \text{(ii)}$$

Η ισότητα όμως (ii) μας φανερώνει **τι σημαίνει** αρνητικό διάνυσμα. Αρνητικό διάνυσμα είναι αυτό που έχει τα ίδια άκρα, αλλά είναι αντίρροπο. Δηλαδή:

$$-\overrightarrow{ΒΑ} = \overrightarrow{ΑΒ}.$$

Η πρόσθεση των διανυσμάτων

Από τη Φυσική μαθαίνουμε πως, όταν δυο δυνάμεις F_1 και F_2 ενεργούν στο ίδιο σημείο Ο ενός σώματος (σχ. 5) τότε το σώμα θα κινηθεί πάνω στην ευθεία



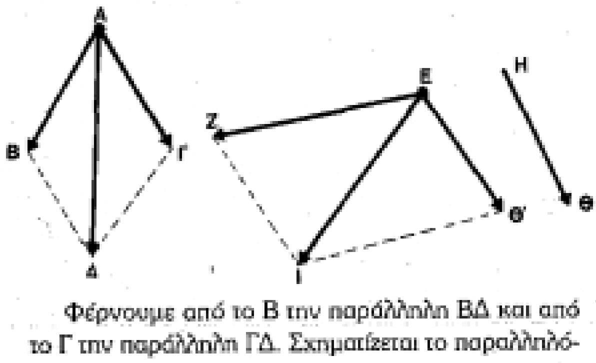
ΟΧ και με φορά από το Ο προς το Χ. Αν όμως, αντί των δυνάμεων F_1 και F_2, ενεργούσε στο σημείο Ο μόνον η δύναμη F_3 (που είναι διαγώνιος του παραλληλογράμμου), θα είχαμε το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή την ίδια κίνηση πάνω στην ευθεία ΟΧ και με φορά από το Ο προς το Χ. Αυτό το πείραμα της Φυσικής μας φανερώνει ότι, η σύνθεση των δυνάμεων F_1 και F_2 μπορεί να αντικατασταθεί από τη δύναμη F_3. Αυτή η αντικατάσταση μας θυμίζει την πρόσθεση των αριθμών, όπου δυο προσθετέοι, π.χ. 5 + 8 μπορούν ν' αντικατασταθούν από το άθροισμα τους 13. Έτσι λοιπόν, **τη σύνθεση των δυνάμεων** τη συμβολίζουμε με την πρόσθεση, δηλαδή:

$$F_1 + F_2 = F_3$$

Φυσικά, **δεν πρόκειται για την πρόσθεση** της Αριθμητικής, αλλά για ένα φυσικό φαινόμενο, που λέγεται "σύνθεση δυνάμεων".

Τη δύναμη F_3 που συνθέτει τις δυνάμεις F_1 και F_2 την λέμε "**συνισταμένη**" των δυο αυτών δυνάμεων. Την περιγραφή που κάναμε πιο πάνω για τη σύνθεση των δυνάμεων, τη λέμε "**κανόνα του παραλληλογράμμου**", και τούτο γιατί η συνισταμένη είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου.

Ερχόμαστε τώρα στην πρόσθεση των διανυσμάτων. Για να προσθέσουμε δυο διανύσματα, π.χ. τα $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}$ (σχ. 6), που έχουν κοινή αρχή Α, ακολουθούμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.



Φέρνουμε από το Β την παράλληλη ΒΔ και από το Γ την παράλληλη ΓΔ. Σχηματίζεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, καθώς και η διαγώνιος που περνάει από την κοινή αρχή Α, δηλ. η ΑΔ. Το άθροισμα λοιπόν των διανυσμάτων θα είναι:

$$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΑΔ} \qquad \text{(α)}$$

Εδώ μιλάμε για πρόσθεση και για άθροισμα διανυσμάτων, όμως αυτή η πρόσθεση και αυτό το άθροισμα, **δεν έχουν** το νόημα της πρόσθεσης και του αθροίσματος των αριθμών. Η πρόσθεση διανυσμάτων και το άθροισμα διανυσμάτων, έχουν το νόημα της σύνθεσης δυνάμεων και της συνισταμένης δυνάμεων. Γι αυτό άλλωστε η πρόσθεση διανυσμάτων ακολουθεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Στην περίπτωση τώρα που τα δοσμένα διανύσματα δεν έχουν κοινή αρχή, όπως τα $\overrightarrow{ΕΖ}$ και $\overrightarrow{ΗΘ}$ (σχ. 6), τότε από το σημείο Ε φέρνουμε ένα νέο διάνυσμα $\overrightarrow{ΕΘ'}$ ίσο προς το $\overrightarrow{ΗΘ}$ και λέμε:

$$\overrightarrow{ΕΖ} + \overrightarrow{ΗΘ} = \overrightarrow{ΕΖ} + \overrightarrow{ΕΘ'} = \overrightarrow{ΕΙ} \qquad (β)$$

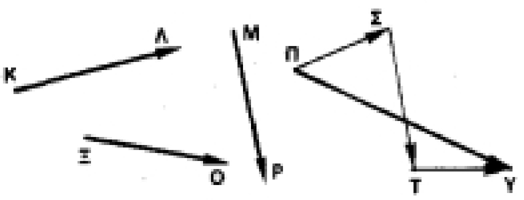
Δηλαδή αντικαταστήσαμε το $\overrightarrow{ΗΘ}$ με το $\overrightarrow{ΕΘ'}$ και μετά χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Για την πρόσθεση διανυσμάτων, μπορούμε να εργαστούμε και με έναν άλλο κανόνα, που όμως στηρίζεται στον κανόνα του παραλληλογράμμου. Στο παραλ/μο ΑΒΓΔ (σχ. 6) παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΒΔ}$ και αν στην ισότητα (α) αντικαταστήσουμε το $\overrightarrow{ΑΓ}$ με το ίσον του $\overrightarrow{ΒΔ}$, ξέρουμε ότι η ισότητα δεν μεταβάλλεται, δηλαδή:

$$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΔ} = \overrightarrow{ΑΔ} \qquad (γ)$$

Έτσι όμως τα διανύσματα έγιναν διαδοχικά, και το τέλος Β του πρώτου έγινε η αρχή του δεύτερου διανύσματος. Ακόμα παρατηρούμε ότι, το άθροισμα ΑΔ έχει αρχή, την αρχή του πρώτου έγινε η αρχή του δεύτερου διανύσματος. Απεδώ προκύπτει ένας δεύτερος κανόνας πρόσθεσης διανυσμάτων, δηλ. **Για να προσθέσουμε δυο ή περισσότερα διανύσματα, τα κάνουμε διαδοχικά. Το άθροισμα τους είναι το διάνυσμα που έχει αρχή, την αρχή του πρώτου και τέλος, το τέλος του τελευταίου διανύσματος.**

Ας πούμε λοιπόν πως έχουμε να προσθέσουμε τρία διανύσματα, π.χ. $\overrightarrow{ΚΛ}$, $\overrightarrow{ΜΡ}$, $\overrightarrow{ΞΟ}$, που είναι τυχόντα και δεν βρίσκονται πάνω στο ίδιο επίπεδο (σχ. 7). Από ένα σημείο Π φέρνουμε διανύσματα $\overrightarrow{ΠΣ} = \overrightarrow{ΚΛ}$. Απ' το τέλος του Σ του νέου διανύσματος φέρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{ΣΤ} = \overrightarrow{ΜΡ}$.

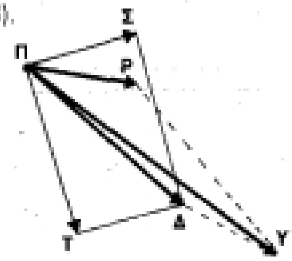


Απ' το τέλος Τ του δεύτερου διανύσματος φέρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{ΤΥ} = \overrightarrow{ΞΟ}$. Και τώρα εργαζόμαστε έτσι:

$$\overrightarrow{ΚΛ} + \overrightarrow{ΜΡ} + \overrightarrow{ΞΟ} =$$
$$= \overrightarrow{ΠΣ} + \overrightarrow{ΣΤ} + \overrightarrow{ΤΥ} = \overrightarrow{ΠΥ} \qquad (δ)$$

Βρήκαμε λοιπόν πως, το άθροισμα των δοσμένων τριών διανυσμάτων είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{ΠΥ}$.

Για την πρόσθεση των τριών (ή περισσοτέρων) διανυσμάτων θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Πάλι θα βρίσκαμε άθροισμα $\overrightarrow{ΠΥ}$ ή κάποιο άλλο διάνυσμα ίσο προς αυτό. Δηλαδή: Θα φτιάξουμε παραλληλόγραμμο με πλευρές $\overrightarrow{ΚΛ}$ και $\overrightarrow{ΜΡ}$, θα βρούμε τη διαγώνιο και μετά θα φτιάξουμε νέο παραλληλόγραμμο με τη διαγώνιο και το διάνυσμα $\overrightarrow{ΞΟ}$. Η διαγώνιος του δεύτερου παραλληλογράμμου θα είναι το άθροισμα των τριών διανυσμάτων (σχ. 8).

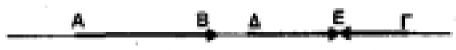


$$\overrightarrow{ΚΛ} + \overrightarrow{ΜΡ} = \overrightarrow{ΠΣ} + \overrightarrow{ΠΤ} = \overrightarrow{ΠΔ}$$

και
$$\overrightarrow{ΚΛ} + \overrightarrow{ΜΡ} + \overrightarrow{ΞΟ} =$$
$$= \overrightarrow{ΠΔ} + \overrightarrow{ΠΡ} = \overrightarrow{ΠΥ} \qquad (ε)$$

Μένει ακόμα να μελετήσουμε την περίπτωση πρόσθεσης διανυσμάτων πάνω στον ίδιο φορέα ή σε παράλληλους φορείς. Σ' αυτή την περίπτωση εφαρμόζουμε τον κανόνα των διαδοχικών διανυσμάτων, γιατί δεν είναι δυνατό να κατασκευάσουμε παραλληλόγραμμο.

1) Όταν τα διανύσματα βρίσκονται πάνω στον ίδιο φορέα, τα κάνουμε διαδοχικά, όπως δείχνει το (σχ. 9), και βρίσκουμε το άθροισμα.



$$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΕ} = \overrightarrow{ΓΕ}$$

(επειδή κατασκευάσαμε $\overrightarrow{ΔΕ} = \overrightarrow{ΑΒ}$).

2) Όταν τα διανύσματα είναι αντίθετα, τότε το άθροισμά τους είναι μηδέν [0]. Έτσι:

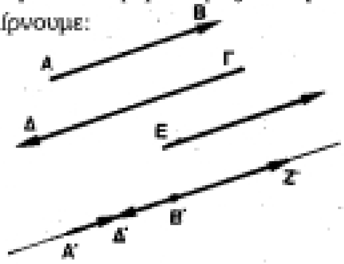
$$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΑ} = \overrightarrow{ΑΑ} = 0$$

και
$$\overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} = \overrightarrow{ΓΓ} = 0$$

Δηλαδή ένα διάνυσμα που **έχει αρχή και τέλος το ίδιο σημείο, είναι μηδέν**, επειδή το μέτρο = Ο, ούτε φορέας υπάρχει, ούτε και φορά υπάρχει.

Όταν τα διανύσματα βρίσκονται σε παράλληλους φορείς, τα φέρνουμε στον ίδιο φορέα και μετά βρίσκουμε το άθροισμα, με τον ίδιο τρόπο που εργαστήκαμε προηγούμενα (σχ. 10).

Επάνω σε παράλληλο φορέα προς τα παράλληλα διανύσματα παίρνουμε:



$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'Z'} = \overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{Z'\Delta'} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ώστε:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'Z'} + \overrightarrow{Z'\Delta'} = \overrightarrow{A'\Delta'}$$

Η σειρά που θα πάρουμε τους προσθετέους $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{EZ}$ δεν έχει σημασία. Όπως και να τους πάρουμε, το άθροισμα θα είναι το $\overrightarrow{A'\Delta'}$ ή κάποιο άλλο ίσο προς αυτό το διάνυσμα.

Η Αφαίρεση των διανυσμάτων

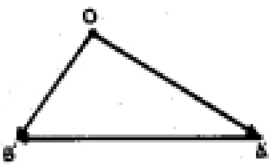
Όπως ξέρουμε απ' την Αριθμητική, η αφαίρεση αριθμών στηρίζεται στην πρόσθεση αριθμών. Έτσι, απ' την πρόσθεση

$$14 = 8 + 6$$

εύκολα βρίσκουμε την αφαίρεση

$$14 - 8 = 6$$

Με την ίδια μέθοδο σκέψης μπορούμε, απ' την πρόσθεση διανυσμάτων που μάθαμε, να οδηγηθούμε στην αφαίρεση διανυσμάτων. Ας κοιτάξουμε την πρόσθεση διανυσμάτων του (σχ. 11).



$$\overrightarrow{O\Sigma} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{E\Sigma} \qquad (\sigma\tau)$$

Στην ισότητα αυτή, αν τον πρόσθετο $\overrightarrow{OE}$ τον μεταφέρουμε στο πρώτο μέλος με αντίθετο πρόσημο, θα βρούμε την ισότητα:

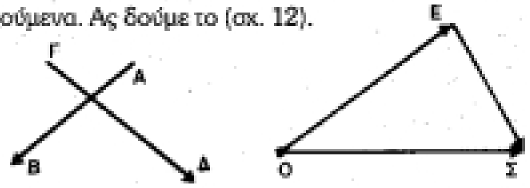
$$\overrightarrow{O\Sigma} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{E\Sigma} \qquad (z)$$

Η ισότητα (z) μας μαθαίνει την αφαίρεση των διανυσμάτων, φτάνει να την κοιτάξουμε με προσοχή. Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

1) Τα διανύσματα που βρίσκονται στη θέση του μειωτέου και του αφαιρετέου έχουν **κοινή αρχή**, το σημείο Ο.

2) Η διαφορά, δηλαδή το διάνυσμα $\overrightarrow{E\Sigma}$, έχει αρχή το τέλος του αφαιρετέου και τέλος Σ, το τέλος του μειωτέου.

Ώστε, για να αφαιρέσουμε δυο τυχόντα διανύσματα τα μετακινούμε κατάλληλα, ώστε ν' αποκτήσουν "κοινή αρχή" και μετά σχεδιάζουμε το διάνυσμα της διαφοράς, όπως το περιγράψαμε προηγούμενα. Ας δούμε το (σχ. 12).



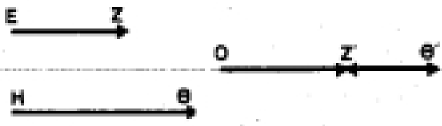
Θέλουμε να βρούμε τη διαφορά $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Από ένα σημείο Ο στην τύχη φέρνουμε διανύσματα $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{AB}$ καθώς και $\overrightarrow{O\Delta'} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Προχωρούμε:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{O\Delta'} = \overrightarrow{\Delta'B'}$$

Η ζητούμενη διαφορά διανυσμάτων είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta'B'}$.

Ο πιο πάνω κανόνας για τη διαφορά διανυσμάτων ισχύει και όταν τα διανύσματα βρίσκονται στον ίδιο φορέα ή σε παράλληλους φορείς. Ας δούμε το (σχ. 13).



Θέλουμε να βρούμε τη διαφορά $\overrightarrow{EZ} - \overrightarrow{H\Theta}$. Από ένα σημείο Ο φέρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OZ'} = \overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{O\Theta'} = \overrightarrow{H\Theta}$. Προχωρούμε στην αφαίρεση:

$$\overrightarrow{EZ} - \overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{OZ'} - \overrightarrow{O\Theta'} = \overrightarrow{\Theta'Z'}$$

Η διαφορά που ζητούμε είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{\Theta'Z'}$.

Πολλαπλασιασμός διανύσματος με προσημασμένο αριθμό.

Εδώ θα εργαστούμε όπως ακριβώς εργαζόμαστε με τον πολλαπλασιασμό δυο προσημασμένων αριθμών.

- **Παράδειγμα με θετικό πολλαπλασιαστή.**

$$(-5) \times (+3) = (-5) \times [+1 + 1 + 1] =$$
$$+ (-5) + (-5) + (-5) = -15.$$

δηλαδή αντικαθιστούμε τις απόλυτες μονάδες του πολλαπλασιαστή, με ολόκληρο τον προσημασμένο πολλαπλασιαστέο.

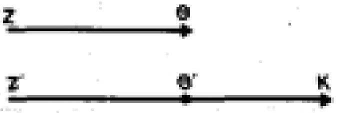
- **Παράδειγμα με αρνητικό πολλαπλασιαστή**

$$(-5) \times (-3) = (-5) \times [-1 -1 -1] =$$
$$-(-5) -(-5) -(-5) = +5 +5 +5 = +15.$$

Με άλλα λόγια: Κατά τον πολλαπλασιασμό αντικαθιστούμε τις απόλυτες μονάδες του πολλαπλασιαστή (τα "1" χωρίς πρόσημο), με ολόκληρο τον προσημασμένο πολλαπλασιαστέο και τέλος κάνουμε την πρόσθεση. (Βλέπε "Ευκλείδης α" 4ο τεύχος, Μάρτης – Απρίλης 1986, "Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί").

Περνάμε τώρα στον πολλαπλασιασμό του διανύσματος επί προσημασμένο αριθμό.

1) Όταν ο πολ/τής είναι θετικός ακέραιος (σχ. 14).

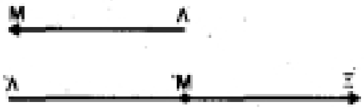


$$\overrightarrow{Z\Theta} \times (+3) = \overrightarrow{Z\Theta} \times [+1 +1 +1] =$$
$$= +\overrightarrow{Z\Theta} + Z\Theta + \overrightarrow{Z\Theta} =$$
$$= +\overrightarrow{Z'\Theta'} + \overrightarrow{Z'\Theta'} + \overrightarrow{Z'\Theta'} = \overrightarrow{Z'K}$$

Δηλαδή: $+3 \times \overrightarrow{Z\Theta} = \overrightarrow{Z'K}$

(Επειδή το διάνυσμα $\overrightarrow{Z'\Theta'}$ το κατασκευάσαμε ίσο προς $\overrightarrow{Z\Theta}$).

2) Όταν ο πολλαπλασιαστής είναι αρνητικός ακέραιος (σχ. 15).



$$\overrightarrow{\Lambda M} \times (-3) = \overrightarrow{\Lambda M} \times [-1 -1 -1] =$$
$$= -\overrightarrow{\Lambda M} - \overrightarrow{\Lambda M} - \overrightarrow{\Lambda M} =$$
$$= +\overrightarrow{\Lambda' M'} + \overrightarrow{\Lambda' M'} + \overrightarrow{\Lambda' M'} = \overrightarrow{\Lambda'\Xi}$$

Δηλαδή: $-3 \times \overrightarrow{\Lambda M} = \overrightarrow{\Lambda'\Xi}$

(Επειδή το διάνυσμα $\overrightarrow{\Lambda' M'}$ το κατασκευάσαμε αντίθετο προς το $\overrightarrow{\Lambda M}$, άρα $-\overrightarrow{\Lambda M} = +\overrightarrow{\Lambda' M'}$).

Ασκήσεις που προτείνουμε

Γ_{59} Ας πάρουμε δύο διανύσματα στην τύχη, αλλά σε διαφορετικούς φορείς, και ας βρούμε το άθροισμα τους και με τους δυο τρόπους που εκθέσαμε (τους δυο κανόνες αθροίσματος διανυσμάτων). Συγκρίνοντας τα δυο αθροίσματα **τί παρατηρείτε;**

Γ_{60} Ας πάρουμε δυο διανύσματα στην τύχη, αλλά σε διαφορετικούς φορείς και ας βρούμε τη διαφορά του πρώτου από το δεύτερο, καθώς και τη διαφορά του δεύτερου απ' το πρώτο. Συγκρίνοντας τις δυο αυτές διαφορές **τί παρατηρείτε;**

Γ_{61} Ας πάρουμε τρία διανύσματα στην τύχη σε διαφορετικούς φορείς, που να βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα. Μπορούμε να βρούμε το άθροισμα τριών διανυσμάτων όπως αυτά;

Γ_{62} Τρία διανύσματα του ίδιου επιπέδου, ας πούμε τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$. Πώς θα εργαστούμε για να βρούμε τη διαφορά $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) - \vec{\gamma}$;

Γ_{63} Κατά την αφαίρεση, όταν το μέτρο του μειωτέου διανύσματος είναι μικρότερο από το μέτρο του αφαιρετέου διανύσματος, μπορεί να γίνει η αφαίρεση των διανυσμάτων;

Γ_{64} Όταν δυο διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, τότε είναι λογικό η διαφορά των μέτρων να είναι μηδέν (0). Όμως, η διανυσματική διαφορά είναι κι αυτή μηδέν; Μελετήστε την περίπτωση.