

Author: Donald Knuth

Title: Θεωρία και πράξη.

Abstract: Το άρθρο αυτό αναφέρεται στη σχέση θεωρίας και πράξης με αναφορές στους αρχαίους φιλοσόφους, καθώς και στη δημιουργία software.

Creator: HDML

ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΗ

Μετάφραση: Ν. Κασσιμάτης

Donald Knuth*
Καθηγητής: Stanford University

Το ότι βρίσκομαι σήμερα σ' αυτό το βήμα και κάνω αυτή τη διάλεξη, αποτελεί πολύ μεγάλη τιμή για μένα. Αρκετούς από τους τελευταίους μήνες τους πέρασα εξασκούμενος, με βότσαλα στο στόμα μου, ελπίζοντας να καταφέρω να δώσω μια διάλεξη που θα ταίριαζε σ' αυτήν την περίπτωση.

Ακούγομαι από όλους; Κάθε Αμερικανός που επισκέπτεται την Ελλάδα ξέρει ότι αυτό το αμφιθέατρο έχει τέλεια ακουστική. Όταν λοιπόν προετοιμάζα την ομιλία μου άρχισα να διερωτώμαι κατά πόσον στην ακουστική ισχύει η συμμετρική ιδιότητα. Αν δηλαδή ο Α ακούει τον Β τέλεια, αυτό σημαίνει ότι ο Β ακούει τέλεια τον Α; Αν αυτό ήταν αλήθεια, ένα χειροκρότημα ή ένα γέλιο του ακροατηρίου ενδεχομένως θα αποτελούσε έναν ήχο που θα ήταν μοιραίος για τα τύμπανα του ομιλητού. Έτσι αποφάσισα να παρακάμψω αυτό το σκόπελο, και αντ' αυτού να ετοιμάσω ένα-δύο πιο φαιδρά θέματα, έτσι ώστε, υπό την προϋπόθεση ότι θα γελάτε όταν πρέπει, να είμαι σίγουρος ότι κάποιος τουλάχιστον παρακολουθούν.

Το θέμα μου είναι "Θεωρία και Πράξη" και η ομιλία θα είναι εν μέρει αυτοβιογραφική, καθώς θέλω να ελπίζω ότι κάποιες από τις πιο πρόσφατες εμπειρίες μου όσον αφορά στην ανάμειξη της θεωρίας και της πράξης ίσως αποδειχθούν πολύτιμες σε πολλούς από σας.

Τι μεγάλη συγκίνηση προκαλεί η αίσθηση ότι βρίσκεται κανείς στην Ελλάδα, την πατρίδα της Θεωρίας! Η ανθρωπότητα οφείλει ένα τεράστιο χρέος στους ανθρώπους που πρώτοι ξε-

* Σημ. Σ.Ε. Ο καθηγητής D. Knuth είναι ένας από τους διασημότερους παγκόσμιους ειδικούς της θεωρίας των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών. Το άρθρο αυτό είναι η οποία έδωσε στο συνέδριο της European Asrap έγινε στο Ναύπλιο τον Ιούλιο 1985. Ειδικά αυτή η ομιλία έγινε στο Αρχαίο Θέατρο της Επιδαύρου. Η Σ.Ε. ευχαριστεί θερμά τον καθηγητή Knuth για την άδεια να δημοσιευθεί το άρθρο του στην Μ.Ε. και τον Δρ. Κασσιμάτη για την μετάφραση.

πέρασαν τις πρακτικές ανάγκες της καθημερινής ζωής για να ταξιδέψουν στο βασίλειο της αφηρημένης σκέψης. Οι επαναστατικές ιδέες της Ελληνικής φιλοσοφίας — ότι μερικά πράγματα ήταν δυνατό να αποδειχθούν με αυστηρότητα, ότι υποθέσεις και κανόνες στηριγμένοι στη διαίσθηση και την καθημερινή εμπειρία μπορούσαν να γενικευθούν και να δοθούν με μια εντελώς σαφή διατύπωση, ότι ιδανικά θεωρητικά μοντέλα είχαν τη δυνατότητα να ξεπεράσουν κατά πολύ και να ενοποιήσουν συγκεκριμένα φυσικά μοντέλα — όλα αυτά τα δείγματα μιας σπάνιας διορατικότητας, είχαν απίστευτα βαθιά επίδραση σ' όλες τις μορφές πολιτισμού, ειδικά στην επιστήμη και ειδικώτερα στην επιστήμη των υπολογιστών. Για να αποδώσουμε τον πρέποντα φόρο τιμής, θα έπρεπε ν' αλλάξουμε τα αρχικά του οργανισμού που υποστηρίζει τα ετήσια συνέδριά μας. Ο Ευρωπαϊκός Σύνδεσμος της Επιστήμης των Υπολογιστών (European Association for Theoretical Computer Science) θα έπρεπε αντί για "EATCS" να μετονομασθεί "EAΘCS".

Διερωτηθήκατε ποτέ από που προέρχεται η λέξη "Θεωρία"; Η πρώτη μου σκέψη ήταν ότι ενδεχομένως συνδεότανε ετυμολογικά με τη λέξη "Θεός", ίσως — έτσι τουλάχιστον νόμιζα — εξαιτίας της αφοσίωσης που έδειχναν προς τις Θεωρίες του οι πρώτοι μαθηταί του Πυθαγόρα. Αν όμως ήξερα, λίγο περισσότερα πράγματα γύρω από την Ελληνική γλώσσα, δε θα είχα κάνει αυτήν την υπόθεση, μια και το "ο" στη θεολογία είναι όμικρον ενώ το "ο" στη θεωρία είναι ωμέγα. Η λέξη "θεωρία" έχει λοιπόν την ίδια ρίζα με τη λέξη "θέατρο" — πράγμα που κάνει ακόμα πιο πετυχημένη την επιλογή αυτού του χώρου για την αποψινή μας συνάντηση. Σύμφωνα με τα λεξικά που συμβουλεύτηκα η βασική λέξη "Θέα", οδήγησε στο "Θέατρο" και στον "Θεωρό" όπως επίσης και στο "Θεώρημα". (Κάτι που βλέπουμε, που παρατηρούμε, ένα αντικείμενο μελέτης).

Και τώρα ας δούμε τι μπορούμε να πούμε για τη λέξη "πράξη". Είναι μία ακόμα Ελληνική λέξη, μάλιστα μια ακόμα Θεατρική λέξη: "Πράξη" σημαίνει "παράσταση". Έτσι μπορεί κανείς να δει πως οι δύο αυτές βασικές λέξεις ξεχωρίζουν σαφώς τις έννοιες της θεωρίας και της πράξης: Οι "Θεωρητικοί" κάθονται στις κερκίδες και παρακολουθούν, ενώ οι "πρακτικοί" βρίσκονται απάνω στην σκηνή και μάλιστα εν δράσει. Το λεξικό μου απεκάλυψε ακόμα ότι η λέξη "πρακτικός" έχει την έννοια του "δραστήριου" και του "δυνατού". Έτσι μπορεί

να ισχυρισθεί κανείς ότι η θεωρία είναι για την πράξη ότι η αυστηρότητα είναι για τη δύναμη.

Η αξία της αφηρημένης θεωρίας για τους αρχαίους Έλληνες φαίνεται καθαρά σε μια σκηνή από ένα έργο που ασφαλώς έχει παιχθεί πολλές φορές σ' αυτό το θέατρο. Στίς "Όρνιθες" του Αριστοφάνη βρίσκουμε μια γλαφυρή εμφάνιση του αστρονόμου Μέτωνος, ο οποίος εμφανίζεται επί σκηνής φορτωμένος με κανόνες και διαβήτες και υποστηρίζει ότι μπορεί να ττραγωνίσει τον κύκλο! Σε ποιο άλλο μέρος του κόσμου θα μπορούσε ένας συγγραφέας ακόμα και να σκεφθεί να συμπεριλάβει στο έργο του μια τέτοια σκηνή;

Θα ήθελα να πιστεύω ότι ένας από αυτούς που παρακολούθησαν το έργο αυτό του Αριστοφάνη, και μάλιστα μέσα σ' αυτό το ίδιο θέατρο, ήταν ο μαθητής του Πλάτωνα, Εύδοξος. Ο Εύδοξος θεωρείται ο επινοητής του Αλγόριθμου του Ευκλείδη, της πιο παλιάς μη τεκμηριωμένης υπολογιστικής τεχνικής — μιας εκπληκτικής μεθόδου που και σήμερα ακόμα δεν έχει χάσει τίποτα από την αξία της. Παρ' όλο που οι ιστορικές αποδείξεις είναι ελάχιστες και κατακερματισμένες, θεωρώ πάρα πολύ πιθανό ότι ο Εύδοξος είχε μια βαθειά γνώση των συνεχών κλασμάτων, ακόμα και στην περίπτωση των αρρήτων αριθμών. Και είμαι πεπεισμένος ότι είναι προφανές πως ο Εύδοξος ήταν πολύ καλύτερος Μαθηματικός από κάθε άλλον που γεννήθηκε πριν απ' αυτόν. Από παλιά είχα τη σφοδρή επιθυμία να έρθω για ένα προσκύνημα στην Ελλάδα, ώστε να μπορέσω να βρεθώ σε μερικά από τα μέρη όπου πέρασε τη ζωή του. Για μένα ο Εύδοξος είναι ο προ-πρό-προπαππούς της Αλγοριθμικής ανάλυσης.

Αλλά ας δούμε τι έχουν να πουν οι ίδιοι οι μεγάλοι Έλληνες φιλόσοφοι για τη θεωρία και την πράξη. Να ένα ενδιαφέρον απόσπασμα από τα "πολιτικά"^[2] του Αριστοτέλη: "Πολλά ελέχθησαν όσον αφορά τη Θεωρία της απόκτησης του Πλούτου. Τώρα θα προχωρήσουμε στο πρακτικό μέρος. Και ο Αριστοτέλης συνεχίζει και μας διηγείται μια ιστορία για τον Θαλή τον Μιλήσιο, που ήταν ο πρώτος Μαθηματικός στον κόσμο, υπό την έννοια ότι πολλά θεωρήματα έχουν αποδοθεί σ' αυτόν.^[4] (Θεωρήματα όπως π.χ. "αι παρά την βάση γωνία ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσαι" και "η γωνία η βαίνουσα επί ημπεριφερείας έχει άνοιγμα μιας ορθής"). Ο Αριστοτέλης μας λέει ότι για τον Θαλή το πρωταρχικό ερώτημα δεν ήταν "Τι γνωρίζουμε;" αλλά "Πως το γνωρίζουμε;" Ο Θαλής όμως, όπως λέγεται, χρησιμοποιούσε τις γνώσεις του και για πρα-

κτικούς σκοπούς: Προβλέποντας, με βάση επιστημονικές παρατηρήσεις, ότι η παραγωγή ελαιοκάρπου θα ήταν εξαιρετικά υψηλή κάποια χρονιά, φρόντισε να αποκτήσει μονοπωλιακά την εκμετάλλευση όλων των ελαιοτριβείων, και έτσι αργότερα να κερδίσει πολλά χρήματα, μια και είχε τη δυνατότητα να καθορίζει εκείνος τις τιμές.

Υπάρχουν μερικά ακόμα πράγματα σ' αυτήν την ιστορία. Ο Αριστοτέλης μας λέει ότι ο σκοπός του Θαλή δεν ήταν να γίνει πλούσιος, ήθελε μόνο να αποδείξει ότι ένας φιλόσοφος μπορούσε εύκολα να γίνει πλούσιος, αρκεί να αποφάσιζε να γίνει πλούσιος. Υπήρχαν διάφοροι, βλέπετε, που τον κορόιδευαν και του έλεγαν: "Αφού είσαι τόσο έξυπνος γιατί δεν είσαι πλούσιος;". Στο μεγαλύτερο μέρος της μετέπειτα κλασικής Ελληνικής περιόδου, το πνευματικό ιδεώδες ήταν η γνώση για τη γνώση και όχι για τις χρήσεις ή τις εφαρμογές της.

Ο Πλάτωνας αγαπούσε τα διδακτικά δέντρα (Binary Tree)* και έλεγε [9] ότι "μπορούμε σε πολύ γενικές γραμμές να χωρίσουμε τις επιστήμες σε δύο κατηγορίες, στις "πρακτικές" και στις "γνωστικές". Όπως φαίνεται την τέχνη των αριθμητικών υπολογισμών την συμπεριλάμβανε στις γνωστικές επιστήμες, μόνο και μόνο επειδή ένας θεωρητικός θα μπορούσε κατ' αρχήν να ελέγξει έναν υπολογισμό και όχι γιατί θα έκανε τον κόπο να ασχοληθεί με τον τρόπο που γίνεται αυτός ο υπολογισμός. Ο Αριστοτέλης συνέχισε αυτήν την παράδοση της οργάνωσης της γνώσης σε ιεραρχίες, τοποθετώντας κάποιο είδος επιστήμης πριν από κάποιο άλλο σ' αυτήν την ιεραρχία. Συχνά π.χ. τόνιζε ότι η Γεωμετρία εφαρμόζεται στην οπτική, και η οπτική με τη σειρά της στη θεωρία του ουράνιου τόξου.

Χωρίς αμφιβολία οι αντιλήψεις αυτές ήταν πολύτιμες στον καιρό τους, αλλά να που ο Αρχιμήδης, περίπου 100 χρόνια αργότερα, διατύπωσε πολύ ενδιαφέρουσες καινούργιες ιδέες, όταν τόνισε ότι η σωστή δομή δεδομένων (Data Structure) για τη γνώση είναι αρκετά πιο περίπλοκη από ένα δέντρο. Ο Αρχιμήδης βρήκε ότι μετά την εφαρμογή της Θεωρητικής γνώσης του σε πρακτικά προβλήματα, έφτανε σε καινούριες θεωρήσεις που οδηγούσαν σε ουσιαστικά καλύτερες Θεωρίες. Π.χ. καταπίσθηκε με το πρόβλημα του σχεδιασμού των σκαριών των πλοίων, έτσι ώστε αυτά να έχουν μεγαλύτερη ευστάθεια, και αυτό τον οδήγησε στην περίφημη "Μέθοδο" στην

* Σ.Μ. Ένα είδος Γραφήματος

οποία αποδεικνύει εκπληκτικά πράγματα για τα κέντρα βάρους των στερεών, και έτσι έγινε πρόδρομος πολλών τεχνικών του σύγχρονου λογισμού. Ο Alfred Rényi, σε ένα φανταστικό διάλογο [10], που θα μπορούσε να είχε γίνει το 300 π.Χ., βάζει στο στόμα του Αρχιμήδη τα παρακάτω λόγια: “Ο Οδυσσεάς χρησιμοποίησε το Δούρειο Ίππο για να μπει απαρτήρητος, αυτός και μερικοί ακόμα Έλληνες στρατιώτες, μέσα στην Τροία. Εγώ χρησιμοποίησα τις μηχανές μου για να περάσω αθόρυβα μια ιδέα στον τρόπο σκέψης του Ελληνικού κόσμου, την ιδέα ότι τα Μαθηματικά — όχι μόνο τα στοιχειώδη αλλά ακόμα και τα πιο λεπτά και περίπλοκα μέρη τους — μπορούν να εφαρμοσθούν με επιτυχία για πρακτικούς σκοπούς... Αντίστροφα, το ενδιαφέρον για τις εφαρμογές μπορεί να βοηθήσει στην καθαρή Μαθηματική έρευνα...”

Ο Απολλώνιος, σύγχρονος του Αρχιμήδη, έγραψε ένα δοκίμιο με τίτλο “Quick Delivesy” που δυστυχώς έχει χαθεί, στο οποίο, όπως αναφέρεται, ασχολείτο με το πρόβλημα της εύρεσης ικανοποιητικών μεθόδων υπολογισμού [3]. Λέγεται ότι, με την εφαρμογή νέων υπολογιστικών μεθόδων, είχε καταφέρει να υπολογίσει το π με μία προσέγγιση που η ακρίβειά της ήταν χωρίς προηγούμενο. Τα παραδείγματα αυτά, καθώς και πολλά άλλα που θα μπορούσαν να δοθούν, υπογραμμίζουν την αλήθεια του αποφθέγματος του Charles Hutton “Για να ξέρεις μια τέχνη, η Θεωρία είναι αρκετή. Για να την παίζεις όμως στα δάχτυλα, είναι απαραίτητη και η θεωρία και η πράξη” [5].

Ενώ προετοιμάζα αυτήν την ομιλία, έτυχε να συναντήσω τον Alan Perlis που παίζει στα δάχτυλα την τέχνη της δημιουργίας επιγραμμάτων. Όταν έμαθε ότι επρόκειτο να μιλήσω στην Επίδαυρο, επέμεινε ότι έπρεπε να διαβιβάσω στον καθ’ ένα από σας το παρακάτω μήνυμα: **“Αλίμονο, ο άνθρωπος κερδίζει την αθανασία μόνο μετά τον θάνατό του!”** Όταν του ζήτησα κάτι σοφό σχετικά με το θέμα μου “Θεωρία και πράξη” εκείνος μου είπε: “Η αλήθεια δεν είναι που την βρίσκεις, αλλά που την χρησιμοποιείς”.

Θα ’θελα ακόμα εδώ να αναφέρω τα περίφημα λόγια του John von Neumann πάνω σ’ αυτό το θέμα. Αφού τόνισε ότι πιστεύει ακράδαντα πως οι πιο ευτυχησμένες εμπνεύσεις στα μοντέρνα Μαθηματικά ξεκινάνε έξω απ’ τα Μαθηματικά, απ’ τις επιστήμες, υπεγράμμισε ότι και το αντίστροφο είναι επίσης σωστό. “Αν απομακρύνουμε πολύ ένα Μαθηματικό θέμα από την εμπειρική του πηγή, ή αν εφαρμόσουμε απάνω του ξανά

και ξανά τη διαδικασία της αφαίρεσης, είναι βέβαιον ότι το θέμα κινδυνεύει να εκφυλισθεί... Αν φθάσουμε σ' αυτό το στάδιο, κατά τη γνώμη μου, η μόνη θεραπεία είναι η αναζωογονητική επιστροφή στην πηγή”.

Τέλος πάντων, είναι προφανές ότι πολλοί άνθρωποι και μάλιστα πολύ πιο σοφοί από μένα έχουν πει κατά καιρούς πολύ ενδιαφέροντα πράγματα γύρω από τη σχέση της θεωρίας και της πράξης. Γιατί λοιπόν εγώ θα έπρεπε να τολμήσω να σκεφθώ ότι θα μπορούσα να δώσω μια διάλεξη πάνω σ' ένα θέμα που ήδη έχει καλυφθεί με τόση επιτυχία; Τι θα μπορούσα ενδεχομένως να προσθέσω στα σχόλια, όλων αυτών των μεγάλων ανθρώπων που δημιούργησαν μια παράδοση μέσα στην οποία — και αισθάνομαι περήφανος γι' αυτό — κινούμαι κι εγώ και παίζω έναν, έστω και μικρό ρόλο; Δύο είναι οι κύριοι λόγοι για τους οποίους αποφάσισα ότι το θέμα μου γι' απόψε θα 'πρεπε να είναι “Θεωρία και πράξη”. Πρώτα-πρώτα γιατί η επιστήμη των υπολογιστών φαίνεται ότι είναι η επιστήμη εκείνη όπου η θεωρία και η πράξη συνδέονται πιο στενά παρά σε οποιοδήποτε άλλο κλάδο, εξ αιτίας της φύσεως αυτών καθ' εαυτών των υπολογιστικών μηχανών. Και έπειτα γιατί η τωρινή μου κατάσταση μου δίνει μια ασυνήθιστη ευκαιρία να σκεφθώ πάνω σ' αυτή τη σχέση, λόγω του κάπως περίεργου είδους έρευνας με το οποίο ασχολήθηκα τα τελευταία χρόνια και που αυτόν τον καιρό πλησιάζει στο τέλος του.

Τα τελευταία λοιπόν χρόνια ασχολήθηκα εντατικά με πρακτικές εξελίξεις στο software. Αυτό ήταν μια στροφή στα προσωπικά μου ενδιαφέροντα. Το πρόγραμμα του software όπου να 'ναι τελειώνει κι εγώ ξαναγυρνάω στη δουλειά που έκανα στο μεγαλύτερο μέρος της ζωής μου, δηλαδή στο γράψιμο. Θα γράψω για “τέχνη του προγραμματισμού του υπολογιστή”. Είναι συνεπώς φυσικό να καθίσω για λίγο, να σκεφθώ τι έμαθα απ' αυτή μου την Οδύσσεια στον πραγματικό κόσμο της δημιουργίας Software.

Το πιο σπουδαίο πράγμα που έμαθα εκεί ήταν ότι το Software είναι δύσκολο και χρονοβόρο. Από δω και στο εξής θα εκτιμώ πολύ περισσότερο κάθε πετυχημένο εργαλείο Software που θα συναντώ. Το αρχικό μου σχέδιο ήταν να ασχοληθώ ένα χρόνο με αλγορίθμους για την τυπογραφία. Αλλά αυτό συνέβη το 1977 κι έτσι μπορεί να δει κανείς ότι χρειάστηκαν περισσότερα από οκτώ χρόνια για να τελειώσει αυτή η δουλειά. Παρ' όλο αυτά, αν η υγεία μου εξακολουθήσει να είναι

καλή, νομίζω πως θα αποδειχθεί ότι αυτά τα οκτώ χρόνια δεν πήγαν χαμένα γιατί θα έχουν βελτιώσει τις ικανότητές μου τόσο, ώστε να καταφέρω να καλύψω αυτό το χρόνο μέσα στα προσεχή δέκα έως δώδεκα χρόνια. Αλλά ακόμα πιο πολύ, αυτά τα χρόνια δεν πήγαν σίγουρα χαμένα, γιατί με βοήθησαν να μάθω ένα σωρό πράγματα που θα "τροφοδοτήσουν" τη θεωρητική δουλειά που θα κάνω στο μέλλον.

Η δημιουργία software όχι μόνο παίρνει πολύ χρόνο, αλλά είναι και πολύ πιο δύσκολη απ' ό,τι αρχικά νόμιζα. Γιατί; Πιστεύω πως η κύρια αιτία είναι ότι όταν κανένας δουλεύει σ' ένα μεγάλο υπολογιστικό πρόγραμμα χρειάζεται να έχει τεταμένη την προσοχή του πολύ περισσότερο χρόνο παρ' ό,τι όταν κάνει κάποια άλλη πνευματική εργασία. Πρέπει να έχει κανείς στο μυαλό του πάρα πολλές τεχνικές πληροφορίες ταυτοχρόνως και όλες αυτές θα πρέπει να είναι έτοιμες να ανασυρθούν ανά πάσα στιγμή και χωρίς καμιά χρονοτριβή από εκεί, αν χρειασθεί. Με τρόπο ανακάλυψα ότι δεν μπορούσα να γράψω μεγάλα προγράμματα και να κάνω ταυτόχρονα και τη διδακτική μου δουλειά. Δεν μπορούσα να υπηρετώ δυο κυρίους, ούτε ένοιωθα ωραία αν τα προγράμματά μου έμεναν πίσω, με αποτέλεσμα, απρόθυμα, να παίρνω από καιρού εις καιρόν άδειες απ' το Πανεπιστήμιο. Υπ' αυτήν την έννοια πιστεύω ότι η συγγραφή προγραμμάτων είναι δουλειά με πολύ περισσότερες απαιτήσεις από τη συγγραφή βιβλίων.

Άλλος ένας λόγος για τον οποίον η συγγραφή προγραμμάτων είναι δυσκολότερη από την συγγραφή βιβλίων και ερευνητών εργασιών, είναι ότι ο προγραμματισμός απαιτεί ένα σημαντικό υψηλότερο επίπεδο ακρίβειας. Τα γραφόμενα δεν πρέπει απλά να είναι κατανοητά από κάποιον άλλον άνθρωπο, πρέπει να είναι κατανοητά από έναν υπολογιστή. Για παράδειγμα σας αναφέρω ότι έγραψα ολόκληρο τον Compiles για την TEX* και προσπάθησα πολλές φορές να τον προσαρμόσω σε μια μηχανή. Είχα στα χέρια μου ένα κείμενο περίπου 500 σελίδων που περιλάμβανε το πρόγραμμα και μια όχι πολύ τυπική απόδειξη της ορθότητάς του. Είχα την εντύπωση ότι αυτό το κείμενο ήταν λίγο-πολύ παρόμοιο με την πρώτη απόδειξη των Fet και Thomson [4] του θεωρήματος, ότι όλες οι απλές ομάδες περιττής τάξης είναι κυκλικές. Το πρόγραμμά μου ήταν πάνω-κάτω το ίδιο λεπτομερές και εκτε-

* Σ.Μ. Είναι ένα πρόγραμμα στοιχειοθέτησης και εκτύπωσης κειμένων, που δημιούργησε ο D. Knuth.

ταμένο όσο κι εκείνη η απόδειξη. Αν είχα υποβάλει το πρόγραμμα αυτό σε ανθρώπους referees για έλεγχο, αυτοί πιθανότατα θα είχαν βρει μερικές ατέλειες που εύκολα θα διορθωνότουσαν, και κατόπιν θα ήμουν ελεύθερος να δημοσιεύσω το πρόγραμμά μου σαν απόδειξη του ότι υπάρχει Compiler για την TEX. Αλλά φυσικά ο υπολογιστής ήταν πολύ πιο αυστηρός κριτής από οποιονδήποτε άνθρωπο referee. Έτσι χρειάστηκε να ασχοληθώ εντατικά άλλους πέντε μήνες για να μπορέσει κάποια στιγμή το πρόγραμμα να αρχίσει να τρέχει αρκετά ικανοποιητικά, ώστε να μπορώ να λέω ότι έκανε ότι έπρεπε να κάνει.

** Ενώ δούλευα πάνω σ' αυτά τα προγράμματα, ο Θεωρητικός μου νους δεν εφησύχαζε. (Αυτό τουλάχιστον πιστεύω εγώ, δεν ξέρω τι μπορεί να λένε οι άλλοι!). Συναρπαστικά καινούρια προβλήματα εμφανιζόντουσαν ανά πάσαν στιγμή. Π.χ., ενώ εργαζόμουν πάνω στον καινούριο compiler για την METAFONT, έκαναν την εμφάνισή τους περισσότερα από δώδεκα πολύ ενδιαφέροντα υποπροβλήματα. Έμαθα, π.χ. τον καταπληκτικό αλγόριθμο των Morrison και Moter [9], για το Πυθαγόρειο άθροισμα ($\sqrt{x^2 + y^2}$) και αυτό με οδήγησε, με φυσικό τρόπο, στην επινόηση ενός νέου τρόπου υπολογισμού του γεωμετρικού μέσου δύο σταθερών αριθμών (\sqrt{xy}) με χρήση μόνο single precision αριθμητικής. Ανέπτυξα ελαφρώς βελτιωμένους ψηφιακούς αλγορίθμους για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κι αυτή η εμπειρία οδήγησε σε μια εντελώς νέα ψηφιακή μέθοδο σχεδιασμού παραμετρικών spline καμπύλων του Bézier. Κατασκεύασα ένα νέο είδος γλώσσας προγραμματισμού που προσπαθεί να κάνει για τα macros ό τι η SIMULA έκανε για τις (διαδικασίες) procedures. Ακόμα επεξέτεινα τον λύτη της "dynamic on-Line" γραμμικής εξίσωσης, του παλαιού συστήματος της METAFONT, έτσι ώστε να είναι δυνατόν να απαλειφθούν ή να εισαχθούν εξισώσεις, ενώ βρίσκονται στη μέση της διαδικασίας της λύσης τους. Ο μαθητής μου John Hobby ανακάλυψε τρεις σημαντικές νέες μεθόδους για computer graphics: One to choose angles at a designer's Knot points one to choose appropriate cubic splines when adjacent angles are given, and one to draw curves that have

** Σ.Μ. Στο κείμενο του καθηγητή Knuth, που και που, υπάρχουν ειδικοί τεχνικοί όροι, που ίσως να μην είναι γνωστοί σε όλους. Αυτό δεν πρέπει να πτοήσει τον αναγνώστη. Εκείνο που μπορεί να κάνει είναι να αγνοήσει αυτά τα κομμάτια, και το συνολικό νόημα δεν πρόκειται να χαθεί.

nearly uniform thicknesses on a discrete vaster. Ο αλγόριθμος αυτός του Hobby, για τη χάραξη καμπύλων, εκπλήσσει ιδιαίτερα, καθώς στηρίζεται σε ένα όμορφο παιχνίδι ανάμεσα στη γεωμετρία και την αριθμοθεωρία. Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί θα τον εκτιμούσαν ιδιαίτερα. Επί τη ευκαιρία, σας αναφέρω ότι αυτή η δουλειά του Hobby στηρίχθηκε στη θεωρία συνέλιξης των Guibay, Rawnsaw και Dtolfi [5], η οποία είναι μια σημαντική συμβολή στα καθαρά μαθηματικά και της οποίας η ιδέα ξεπήδησε από την πρώτη μορφή της METAFONT πριν μερικά χρόνια.

Θα ήθελα πάντως, αντί να μεταθέσω την ανακοίνωση όλων των λεπτομερειών σε κάποια μελλοντική δημοσίευση, να συζητήσω εδώ μαζί σας δύο από τα ενδιαφέροντα υποπροβλήματα που εμφανίστηκαν ενώ δούλευα στις METAFONT*** τη χρονιά που πέρασε. Το πρώτο είναι ένα συνδυαστικό πρόβλημα για το οποίο έχω μια μέθοδο που στην πράξη δουλεύει ικανοποιητικά, αλλά που υποπτεύομαι ότι κάποιος από σας είναι δυνατόν να βρει έναν τρόπο να μειώσει το χρόνο που χρειάζεται για τη δυσμενέστερη περίπτωση. Το πρόβλημα είναι το εξής: Δίδονται n ακέραιοι x_1, x_2, \dots, x_n και ένας αριθμός $m < n$ και ζητείται να ευρεθούν m ακέραιοι y_1, y_2, \dots, y_m που κάνουν την απόσταση των x από τα y ελάχιστη. Πιο αναλυτικά, κάθε x_i θα πρέπει να απέχει από κάποιο y_i απόσταση ίση ή μικρότερη από ένα συγκεκριμένο d , και πρέπει να διαλέξουμε τα y έτσι ώστε από το d να γίνει όσο το δυνατόν μικρότερο. Π.χ. αν x_1, x_2, \dots, x_n , είναι οι περιττοί αριθμοί $1, 3, 5, \dots, 2m - 1$ και αν $m = \frac{1}{2}n$, τότε η καλύτερη λύση είναι να διαλέξουμε για y τα $2, 6, 10$ κλπ. Τότε κάθε x απέχει από κάποιο y απόσταση ίση με 1 . Δεν θα σας πω απόψε τον τρόπο με τον οποίο πέτυχα να λύσω αυτό το πρόβλημα, αλλά θα ήμουν ευτυχής αν έβλεπα αργότερα τις ιδέες σας.

Το άλλο υποπρόβλημα που θα σας πω αναφέρεται στις ελλείψεις, και το συζητώ απόψε για διάφορους λόγους. Κατ' αρχήν όλοι ξέρουμε ότι οι κωνικές τομές ήταν από τα πιο αγαπημένα θέματα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, από τον Μεναίχμενο μέχρι τον Απολλώνιο. Έτσι θέλω να τιμήσω αυτήν την παράδοση, δείχνοντας ταυτόχρονα με ποιο τρόπο καινούριες εφαρμογές μπορούν να οδηγήσουν σε ευχάριστες

* Metafont είναι ένα άλλο πρόγραμμα που δημιούργησε ο Knuth, που σχετίζεται με την δημιουργία τυπογραφικών συμβόλων.

νέες θεωρήσεις παλαιών θεωριών, ακόμα κι όταν αυτές οι θεωρίες έχουν ζήσει περισσότερα από 2000 χρόνια. Έπειτα θα ήθελα να προσπαθήσω να σας εξηγήσω γιατί αυτή η μικρή μου ιδέα μ' ευχαρίστησε τόσο πολύ όταν τη συνέλαβα, παρ' όλο που είμαι σίγουρος ότι δεν είναι στην ουσία καμιά μεγάλη συμβολή ούτε στη θεωρία ούτε στην πράξη.

Το πρόβλημα απλά έχει ως εξής: Κάποιος που χρησιμοποιεί METAFONT μπορεί να προσδιορίσει έναν τυχαίο ομοπαράλληλο μετασχηματισμό προσδιορίζοντας τις εικόνες των τριών σημείων $(0,0)$, $(1,0)$ και $(0,1)$. Υποτίθεται ότι η METAFONT στη συνέχεια θα υπολογίσει την εικόνα του μοναδιαίου κύκλου μέσω αυτού του ομοπαράλληλου μετασχηματισμού. Φυσικά η εικόνα θα είναι μια έλλειψη της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε το κέντρο βάρους, το μεγάλο και το μικρό άξονα και τη γωνία κλίσεως ως προς το σύστημα των συντεταγμένων.

Τέλος πάντων, αυτό δεν είναι και τόσο καινούριο πρόβλημα, αλλά υπήρχε κάτι το καινούριο όταν το αντιμετώπισα. Δηλαδή, είχα ήδη προσαρμόσει όλη την υπόλοιπη METAFONT, και ήθελα να λύσω αυτό το πρόβλημα της έλλειψης με τον απλούστερο τρόπο, που θα βασιζότανε σε ήδη υπάρχουσες υπορουτίνες. Η METAFONT είναι ένα πρόγραμμα που μεταφέρεται πολύ εύκολα, και γι αυτό, σκόπιμα, είχα αποφύγει να χρησιμοποιήσω πράγματα που εξαρτώνται απ' το είδος της μηχανής, (όπως π.χ. floating-point numbers). Είχα προσαρμόσει τα πάντα fro, scratch, χρησιμοποιώντας scaled integers, έτσι ώστε όλοι οι υπολογιστάι να δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Οι ήδη υπάρχουσες υπορουτίνες αποτελούσαν ένα ταιριαστό σύνολο και δεν ήθελα να προσθέσω κάτι τί τελείως διαφορετικό ή εκτός κλίματος, μόνο και μόνο για να λύσω αυτό το ειδικό πρόβλημα της έλλειψης. Ήθελα να μείνει ο κώδικας της METAFONT κομψός.

Τώρα θα σας περιγράψω τη λύση αυτού του προβλήματος ελπίζοντας ότι έχετε ανεπτυγμένη την ικανότητα να συλλαμβάνετε τύπους που ακούτε αλλά δεν τους βλέπετε. Προφανώς το πρόβλημα ανάγεται στην περίπτωση όπου η αρχή είναι σταθερή, κι έτσι μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής: Δίδοντας δύο ζεύγη πραγματικών αριθμών (p, q) και (r, s) . Να ευρεθούν άξονες (a, b) και γωνίες (θ, ϕ) έτσι ώστε να υπάρχει κάποια περίπλοκη τριγωνομετρική σχέση τεσσάρων διαστάσεων μεταξύ των παραμέτρων, τέτοια ώστε οι παρακάτω δύο ομοπαράλληλοι μετασχηματισμοί να είναι ισοδύνα-

μοι: Ο ένας μετασχηματισμός πηγαίνει το $(0, 0)$ στο $(0, 0)$ το $(1, 0)$ στο (p, q) και το $(0, 1)$ στο (r, s) . Ο άλλος αποτελείται από μια στροφή κατά γωνία ϕ , που ακολουθείται από πολλαπλασιασμό των συντεταγμένων x και y με a και b αντίστοιχα, και τέλος από στροφή κατά γωνία θ . Αυτό σημαίνει ότι ο μοναδιαίος κύκλος μετασχηματίζεται σε μια έλλειψη με ημιάξονες (a, b) που έχουν στραφεί κατά γωνία θ . Τελικά αποδεικνύεται ότι οι τιμές των $a - b$ και $\theta + \phi$ ισούνται με

$$\sqrt{(p - s)^2 + (q + r)^2}$$

και τόξεφ $(p + s, q + r)$ αντίστοιχα, και των $a + b, \theta + \phi$ με

$$\sqrt{(p + s)^2 + (q - r)^2}$$

και τόξεφ $(p + s, q - r)$ αντίστοιχα. Η METAFONT είχε ήδη έτοιμες υπορουτίνες για το Πυθαγόρειο άθροισμα και το τόξεφ, κι έτσι ήταν πολύ εύκολο να λύσει τις τέσσερις ταυτόχρονες μη γραμμικές εξισώσεις, χωρίς να χρειασθεί κανένα άλλο βασικό εργαλείο.

Ελπίζω μερικοί από σας να αντιλαμβάνονται γιατί αυτή η μικρή μου ανακάλυψη με έκανε τόσο χαρούμενο. Μου αρέσει να έχω προγράμματα που τα κομμάτια τους συνεργάζονται αρμονικά. Ο ποιητής Edna St. Vincent Millay έγραψε κάποτε ότι "μόνο ο Ευκλείδης κοίταζε γυμνή την ομορφιά". Εγώ νομίζω ότι μπορεί να υπάρξει άφθονη ακατέργαστη ομορφιά και σε εγκόσμια πρακτικά πράγματα όπως π.χ. τα προγράμματα των υπολογιστών.

Είναι φυσιολογικό λοιπόν μετά από όλες αυτές τις εμπειρίες μου των τελευταίων χρόνων να αισθάνομαι την ανάγκη να συστήσω κάτι τι με θέρμη στα μέλη της ΕΑΘCS: Ειλικρινά πιστεύω ότι όλοι σας θα οφεληθείτε αν αφιερώσετε περισσότερο χρόνο σε πρακτικά προβλήματα. Ειδικά τώρα που οι παράλληλοι υπολογισμοί αρχίζουν να γίνονται πραγματικά εφικτοί, είναι η πιο κατάλληλη στιγμή να δοκιμάσουμε τις αφηρημένες θεωρητικές μας ιδέες.

Φυσικά αντιλαμβάνομαι ότι η βελτίωση του software απαιτεί πολύ χρόνο. Ίσως τα νεαρότερα μέλη του ακροατηρίου θα έκαναν καλλύτερα να περιμένουν πρώτα να αποκτήσουν μερικές περγαμηνές, και έπειτα να "πέσουν με τα μούτρα" στον προγραμματισμό! Εκείνο που υποστηρίζω πάντως, είναι ότι ο καλύτερος τρόπος για να περάσει ένας θεωρητικός την άδειά του, ή ακόμα και τον καιρό ανάμεσα στις άδειές του, είναι να δουλέψει εντατικά στις εφαρμογές.

Η κ. Μερκούρη μας υπενθύμισε ότι σ' αυτό το θέμα υπάρχει μια σημαντική ηθική διάσταση που πρέπει να αναφερθεί. Δεν αποσκοπούν όλες οι εφαρμογές των υπολογιστικών μηχανών στην παγκόσμια ευτυχία, και φυσικά κι εγώ δεν θέλω να παρακινήσω κανέναν να γράφει προγράμματα για πράγματα που ο ίδιος δεν είναι πεπεισμένος ότι είναι χρήσιμα. Ούτε πρέπει να γράψετε προγράμματα αν δεν σας αρέσει η πρακτική δουλειά. Προς Θεού, συγκεντρωθείτε σ' αυτό που σας αρέσει να κάνετε, γιατί αυτό είναι που θα κάνετε και με περισσότερη επιτυχία. Αλλά πρέπει να τονίσω ότι ποτέ κανείς δεν πρέπει να αισθάνεται ντροπή αν έχει μια κρυφή αγάπη για τη συγγραφή προγραμμάτων που δουλεύουν στην πράξη. Αντίθετα, όλοι μας πρέπει να εκτιμάμε τέτοια επιτεύγματα, και να ενθαρρύνουμε τις πρακτικές προσπάθειες τόσο των συνεργατών μας και των μαθητών μας, όσο και τις δικές μας.

Ίσως στην πραγματικότητα να υπάρχει και κάποια υστεροβουλία στη σύστασή μου να εγκαταλείψετε όλοι την καθαρή θεωρία για μερικά χρόνια, και να ασχοληθείτε με το software. Χρειάζομαι απελπιστικά χρόνο για να προλάβω να ενημερωθώ σ' αυτά που εν τω μεταξύ έχουν γραφτεί, και εύχομαι να μειωθεί ο ρυθμός αποστολής εργασιών στα περιοδικά, ώστε να έχω κάποια πιθανότητα να τελειώσω τα βιβλία μου.

Από την άλλη μεριά, δεν είναι αλήθεια ότι η πρακτική δουλειά συνεπάγεται μείωση του αριθμού των δημοσιεύσεων. Τελευταία μάλιστα υποστήριξα την άποψη ότι τα προγράμματα των υπολογιστών ανήκουν στη Μαθηματική φιλολογία και ελπίζω να δω περισσότερες δημοσιεύσεις με πλήρεις, λειτουργικούς αλγόριθμους. Τα πρόγραμμά μου για την TEX και την METAFONT δημοσιεύονται αυτόν τον καιρό κι εγώ προσωπικά να κατατάσσω ανάμεσα στα πιο σημαντικά επιτεύγματα της ζωής μου.

Έτσι σαν συμπέρασμα για το τέλος έχω να πω: Ας μη συγχέουμε το μεγάλο Όμικρον (O) με το μεγάλο Ωμέγα (Ω) θεοποιώντας τη Θεωρία. Καλύτερα ας εφαρμόσουμε ότι κυρήσσουμε. Αυτό, όχι μόνο θα δώσει στον κόσμο καλύτερες εφαρμογές, αλλά τελικά να δώσει στον κόσμο και καλύτερη θεωρία.

REFERENCES

- [1] Archimedes, *Method*, ed. by Thomas L. Heath (Cambridge Univ. Press, 1912).

- [2] Aristotle, *Politica*, translated by Benjamin Jowett (Oxford, 1985), I.11.
- [3] Carl B. Boyer, *A History of Mathematics* (New York: Wiley, 1986), p. 158.
- [4] Walter Feit and John G. Thompson, "Solvability of groups of odd order," *Pacific J. Math* **13** 2(1963), 775-1029.
- [5] Leo Guibas, Lyle Ramshaw, and Jorge Stolfi, "A kinetic framework for computational geometry", *Proc. 24th Annual Symposium on the Theory of Computing* (1983), 100-111.
- [6] Charles Hutton, *A Mathematical and Philosophical Dictionary* **2** (London, 1795), 585.
- [7] Donald E. Knuth, "Literate programming", *The Computers Journal* **27** (1984), 97-111.
- [8] Donald E. Knuth, *Computers and Typesetting*, 3 vols. (Reading, Mass: Addison Wesley, 1986.)
- [9] Donald Morrison and Cleve Morel, "Replacing square roots by Pythagorean sums", *IBM J. Research and Development* **27** (1983), 577-581.
- [10] Plato, *Politicus*, edited by J. Burnet (Oxford, 1900-1907), 258 e.
- [11] Alfréd Rényi, *Dialógusok a matematikáról* Budapest: Akadémiai Kiadó, 1965? *Dialogues on Mathematics* (San Francisco: Holden-Day, 1967).
- [12] Edna St. Vincent Millay, *Collected Sonnets* (New York: Harper, 1941), p. 45.
- [13] John von Neumann, "The Mathematician", in Robert B. Heywood, ed., *The Works of the Mind* (Univ. of Press, 1947), 1980-196.