Author: Γ. Πούλος

Title: Φιλοσοφία των Μαθηματικών Το πρόβλημα της αλήθειας και του κριτιρίου της στα Μαθηματικά.

Abstract: Στο άρθρο αυτό προσεγγίζεται μια κάπως άγνωστη πλευρά των Μαθηματικών που στη χώρα μας παραμένει παραμελημένη, Η φιλοσοφία των Μαθηματικών.

Creator: HDML

ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ «ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΚΡΙΤΙΡΙΟΥ ΤΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

Γ. ΠΟΥΛΟΣ

Στο άρθρο αυτό προσεγγίζουμε μια κάπως άγνωστη πλευρά των Μαθηματικών που μέχρι σήμερα στη χώρα μας παρσμένει προκλητικά ανεξερεύνητη και αθεράπευτα παραμελημένη. Είναι ανεπίτρεπτο να στερούνται τα Μαθηματικά τμήματα των Πανεπιστημίων μας, τομέων που να έχουν αποκλειστικά αντικείμενο τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Αποτέλεσμα αυτής της απουσίας είναι το γεγονός η πλειάδα των μαθηματικών να μην γνωρίζει επιστημονικά «τι είναι τα μαθηματικά» και να καλλιεργείται κατ' αυτό το τρόπο ένας πρωτόγονος εμπειρισμός που το πολύ πολύ να στρέψει τις ατομικές και μεμονωμένες αναζητήσεις στα ενδότερα της μαθηματικής επιστήμης. Μέσα στο «Βασίλειο της αναγκαιότητας» δουλεύοντας, παραδίνω αυτές τις γραμμές με όλες τις επιφυλάξεις του μη «ειδικού».

Ο ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

Τι είναι αλήθεια; Είναι αυτονόητο, λέει ο Χέγγελ ότι η μόνη ικανοποιητική απάντηση, στην απαίτηση κάποιου ορισμού, μπορεί να είναι μόνο η έκθεση της ουσίας του ζητήματος. Ενώ ο Ένγκελς στο «Αντί-Ντύρινγκ» γράφει «Εννοείται ότι ο ορισμός μας της ζωής είναι πολύ ανεπαρκής. Όλοι οι ορισμοί έχουν ασήμαντη αξία. Για να αποκτήσουμε μια πραγματικά πλήρη αντίληψη σχετικά με τη ζωή, θα έπρεπε να ακολουθήσουμε όλες τις μορφές της εκδήλωσής της από την κατώτατη ως την ανώτατη» και συνεχίζει «Οι ορισμοί δεν έχουν σημασία για την επιστήμη, γιατί είναι πάντοτε ανεπαρκείς. Ο μόνος πραγματικός ορισμός είναι η ανάπτυξη της ίδιας της ουσίας του ζητήματος, αλλά τότε δεν είναι πλέον ορισμός».

Ωστόσο σε οποιαδήποτε επιστήμη, επομένως και για την αλήθεια πρέπει να σκιαγραφηθεί το περίγραμμα της δηλ. να υποδειχθεί η περιοχή των γεγονότων στα οποία να συγκεντρώσει την προσοχή μας. Στο ζήτημα της αλήθειας, η δυσκολία που αντιμετωπίζει ο θεωρητικός συνίσταται στη κατανόηση του αν συμφωνούν μεταξύ τους. Το σύνολο των ευ-

νοιών, των θεωρητικών κατασκευών και αντιλήψεων ή όχι, και αν στις ιδέες που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος αντιστοιχεί κάποια πραγματικότητα. Επομένως και στα μαθηματικά όταν λέμε αλήθεια πρέπει να εννοούμε τη σχέση των θεωριών (αξιώματα, ορισμοί, θεωρήματα) με την πραγματικότητα.

Στην επιστήμη των μαθηματικών η έννοια της αλήθειας έχει χωριστεί πρώτο, στην «τυπική» αλήθεια που ορίζεται — αν ο τρόπος που συνδέονται οι σκέψεις είναι σωστός, τότε είναι και το σύστημα αληθινό, ανεξάρτητα από το γεγονός αν το συμπέρασμα ανταποκρίνεται ή όχι προς τη πραγματικότητα. Επίσης αρκετοί φιλόσοφοι χρησιμοποιούν στη θέση της «τυπικής αλήθειας» τον όρο «ορθότητα» και ορίζεται σαν η επιστήμη γύρω από τους νόμους και τις μορφές της ορθής νόησης, δηλ. αν λόγου χάρη στη βάση μιας μαθηματικής θεωρίας βρίσκονται τα αξιώματα Α, Β και αν από τα αξιώματα αυτά μέσω κανόνων της λογικής εξαχθεί το θεώρημα Γ, τότε μπορούμε να πούμε ότι αυτή η μαθηματική θεωρία είναι αληθής. Δεύτερο στην «υλική», όταν μια οποιαδήποτε θέση αντιστοιχεί με την πραγματικότητα.

Συχνά στην ιστορία της εξέλιξης των μαθηματικών η αλήθεια των θεωριών συνδέθηκε με την μη αντιφατικότητα κάθε συστήματος αξιωματικά θεμελιωμένου. Ο μαθηματικός απαιτώντας τη μη αντιφατικότητα ενός συστήματος αξιωμάτων απαιτεί την ύπαρξη έστω και ενός τομέα αντικειμένων, για το οποίο οι τύποι του θα έχουν συγκεκριμένο νόημα. Δεν μπορούμε λόγου χάρη να θεωρούμε αληθινό το σύστημα των αξιωμάτων που οδηγεί σε αντιφάσεις του τύπου 1 = 0. Γεννιούνται όμως ερωτήματα του τύπου «τι να κάνουμε όταν δεν γνωρίζουμε εάν το σύστημα των αξιωμάτων είναι αντιφατικό ή όχι; ή ακόμα πως μια εσφαλμένη θεωρία που δεν προσκρούει σε αντιφάσεις, μπορεί να γίνει για το λόγο αυτό λιγώτερο εσφαλμένη;

Η αντίληψη αυτή περί αντιφατικότητας αντιφάσκει σε πολλά γεγονότα της επιστήμης, γιατί αν οι προϋποθέσεις είναι εσφαλμένες τότε σύμφωνα με το νόμο της λογικής και το αποτέλεσμα μπορεί να είναι ψευδές χωρίς να αντιφάσκει με την προϋπόθεση. Η απαίτηση για απουσία αντιφάσεων, μπορούμε να την δούμε μόνο με την έννοια **ότι ο αξιωματικά ορισμένος μηχανισμός πρέπει να μπορεί να δουλεύει.**

Στο σημείο αυτό είναι επιβεβλημένο να κάνουμε μια παρένθεση και να αναφερθούμε στο πως αντιμετωπίζουν γενικώτερα αυτό το θέμα οι φιλόσοφοι. Σχετικά ο Καντ στη λογική του υποστηρίζει πως οι θεμελιώδεις λογικές αρχές και κατηγορίες πρέπει να συμφωνούν μόνο με τον ίδιο τους τον εαυτό. Έτσι που τα κατηγορήματά τους να μην περιέχουν

αντιφάσεις. Είναι φανερό πως ο Καντ είναι υποστηριχτής της αξιωματικής μεθόδου. Μεθόδου όμως που είναι αδύνατο να αποδείξεις οτιδήποτε χωρίς να προσκρούσεις ή να αντιπαραθέσεις ένα αντίθετο σύστημα. Μεθόδου που αργότερα ο Χέγγελ θα την αποκαλέσει — «έκθεση αυτού που σκέπτονταν για τον ίδιο τον εαυτό της». Ωστόσο και οι επόμενοι φιλόσοφοι ασχολήθηκαν με μεγάλη επιμονή για το ίδιο θέμα. Ο Φίχτε και ο Σέλλινγκ υποστήριξαν «Πως κανένα σύστημα δεν μπορεί να ολοκληρωθεί ποτέ, και πάντοτε είναι ανοιχτό στο μέλλον και εκείνο που δεν μπορεί να παγιωθεί με την δημιουργία ενός αιώνια αποκρυσταλλωμένου συστήματος είναι η πραχτική δραστηριότητα. Ένα σύστημα γνώσης είναι αναγκαστικά είτε απλό τέχνασμα και παιχνίδι της σκέψης είτε πρέπει να αγγαλιάζει την πραγματικότητα, όχι με την βοήθεια κάποιας θεωρητικής, αλλά πραχτικής ικανότητας, όχι με την βοήθεια αντιληπτικής, αλλά παραγωγικής ικανότητας που πραγματοποιεί, όχι μέσω της γνώσης αλλά μέσω της δράσης».

Η τάση όμως να υποκαθιστάται η έννοια της αλήθειας της θεωρίας με την έννοια της μη αντιφατικότητας παραμένει ισχυρή. Ο Πουανκαρέ γράφει σχετικά «Τα μαθηματικά δεν εξαρτώνται από την ύπαρξη των υλικών αντικειμένων. Στα μαθηματικά η λέξη «υπάρχει» μπορεί να έχει μόνο ένα νόημα την εξουδετέρωση της αντίφασης». Τα αντικείμενα οι ιδιότητες και οι σχέσεις που εξάγονται από το συγκεκριμένο σύστημα αξιωμάτων θεωρούνται ότι «υπάρχουν» σ' αυτό. Όμως δημιουργείται το πρόβλημα στη συγκεκριμένη αξιωματική θεωρία θα αντιστοιχούν πάντοτε αντικείμενα που θα βρίσκονται στην υλική πραγματικότητα; Αν λόγου χάρη θέσουμε το ερώτημα. Η Γεωμετρία του Ευκλείδη ικανοποιεί τον πραγματικό φυσικό χώρο με τα αξιώματά της; τότε πρέπει να δείξουμε τα φυσικά περιστατικά τα οποία αντιστοιχούν στους όρους «σημείο» «ευθεία» «επίπεδο» κ.α. Έτσι τα αξιώματα μετατρέπονται σε θέσεις της φυσικής οι οποίες χρειάζονται πειραματική απόδειξη και ύστερα από τον έλεγχο αυτό μπορούμε να μιλάμε για την αλήθεια των γνώσεών μας.

Από την άλλη, αν σε μια θεωρία δεν βρεθούν υλικά αντικείμενα που περιγράφονται από αυτήν τότε η θεωρία αυτή θα πρέπει να απορριφθεί; Για το αντίθετο μας πείθουν τα χαρακτηριστικά παραδείγματα των μη Ευκλείδιων γεωμετριών που στην αρχή θεωρήθηκαν καθαρά μαθηματικό παιχνίδι και αργότερα εφαρμόστηκαν στη σύγχρονη φυσική. Η θεωρία των ομάδων που εφαρμόζεται στη Κρυσταλλογραφία, οι φανταστικοί αριθμοί ύστερα από τη λύση που δόθηκε με τον ορισμό του μιγαδικού επιπέδου και που τους μετέτρεψε από «φανταστικούς» σε «πραγματικούς». Άλλωστε είναι συνηθισμένο το γε-

γονός τα μαθηματικά να προπορεύονται μερικές φορές από την τεχνική και τη φυσική. Ύστερα από τις ψηλές αφαιρέσεις τους δημιουργούν πρότυπα για πιθανά αντικείμενα της πραγματικότητας που στην πορεία των επιστημών και της πραχτικής κατά κανόνα βρίσκονται.

Έτσι η κατανόηση των μαθηματικών σαν ιδανικής τεχνικής φωτίζει παραπέρα το ερώτημα για την αλήθεια στα μαθηματικά. Η δυσκολία βρίσκεται εδώ στο ότι τα ιδανικά αντικείμενα των μαθηματικών όχι μόνο δεν συγκρίνονται με την μαθηματική πραγματικότητα αλλά και ούτε έχουν κάποια αρκετά ακριβή εικόνα στην πραγματικότητα. Αρκεί να θυμίσουμε τους άρρητους αριθμούς. Όταν αναφερόμαστε κατά τον αξιωματικό ορισμό οποιουδήποτε αντικειμένου των μαθηματικών σ' ένα σύνολο αντικειμένων «οποιαδήποτε φύσης» αποδεικνύεται σωστό το απόφθεγμα του Russel «ότι τα μαθηματικά είναι ένα δόγμα στο οποίο είναι άγνωστο για πιο πράγμα μιλάμε και αν αυτό που λέμε είναι σωστό».

Η λύση του προβλήματος βρίσκεται ωστόσο απλά στην κατανόηση **του ότι το πρόβλημα δεν υπάρχει.** Τα μαθηματικά φτιάχνουν για τον εαυτό τους μηχανισμούς — και είναι ανόητο να μιλάμε για το αν είναι αυτοί σωστοί ή λάθος — είτε δουλεύει ένας μηχανισμός είτε όχι, και αν δουλεύει τότε είτε είναι παραγωγικός είτε όχι. Η ιδανική τεχνική των μαθηματικών με τους μηχανισμούς τους είναι απλά, **υπάρχει σαν μια ιδιαίτερη μορφή της κοινωνικής πραγματικότητας, και λειτουργεί στη σφαίρα της όχι χειρότερα από την υλική τεχνική.** Το ερώτημα σχετικά με την αλήθεια προκύπτει μόνο κατά την εφαρμογή των μαθηματικών και η απάντηση δεν εξαρτάται πια αποκλειστικά από αυτά, αλλά από το βαθμό στο οποίο είναι σωστή η δοσμένη εφαρμογή.

Φυσικά όσα λέμε απλοποιούν την πραγματική κατάσταση μια και η αλυσίδα των μεταβάσεων προς την τυπική ορθότητα των αφηρημένων μηχανισμών των μαθηματικών περνά από την αλήθεια των παραγόντων πάνω στους οποίους στηρίζονται τα θεμέλια των μαθηματικών. Αντίστοιχα με τον τρόπο που απαντούμε στο ερώτημα σχετικά με την αλήθεια στα μαθηματικά λύνεται και το πρόβλημα των θεμελίων τους. Τα θεμέλια κάθε επιστήμης στηρίζονται στη πραγματικότητα που καθρεφτίζει η επιστήμη αυτή. Η ενότητα του υλικού κόσμου καθορίζει ότι στις περιπτώσεις των πιο διαφορετικών συνθηκών εμφανίζονται ομοειδείς σχέσεις μεταξύ των ποικίλων εκδηλώσεων, των ιδιομορφιών του υλικού αυτού κόσμου. Οι εκδηλώσεις αυτές είναι πηγή φυσικών αντιλήψεων οι οποίες με τη σειρά τους είναι πηγή μαθηματικών θεωριών. Η συγγένεια των σχηματισμών οι οποίοι μελετώνται στις θεωρίες αυ-

τές, είναι ιδιόμορφος αντανάκλαση της ενότητας του υλικού κόσμου στη μαθηματική αφαίρεση. Είναι απόλυτα καθαρό ότι η διερεύνηση και η εξέλιξη των μαθηματικών δεν έχει τέλος και το πρόβλημα της ορθότητας είναι η πρακτική και η παραγωγική τους δραστηριότητα.

Υπεύθυνος Κρίσης: Α. ΤΣΙΑΚΑΤΑΡΑΣ

ΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΜΕΛΛΟΝΤΟΣ

Νίκος Χρηστίδης — Σχολικός Σύμβουλος

1. Εισαγωγή

Ένας από τους βασικούς σκοπούς της εκπαίδευσης είναι η προετοιμασία του σημερινού μαθητή ν' αντιμετωπίσει τις καταστάσεις και τις ανάγκες του αύριο. Έτσι γεννιέται το ερώτημα ποιες θα είναι οι αξίες, οι δυνατότητες, οι δεξιότητες και οι γνώσεις που θα πρέπει ν' αποκτήσουν τα σημερινά παιδιά για να μπορέσουν να ζήσουν στον κόσμο του αύριο;

Οι γνώμες των μελλοντολόγων στα θέματα αυτά δεν είναι απόλυτες ούτε και σύμφωνες μεταξύ τους. Όμως σ' αυτό που συμφωνούν οι περισσότεροι είναι ότι πρέπει να εξεταστούν οι σημαντικότεροι από τους σημερινούς παράγοντες, που θα επιδράσουν στη διαμόρφωση της μελλοντικής κοινωνίας. Ο προσδιορισμός των παραγόντων αυτών θα βοηθήσει στη σκιαγράφηση του αυριανού κόσμου και θα προσδιορίσει το περιεχόμενο της διδασκαλίας που θα περιληφθεί στο Αναλυτικό Πρόγραμμα (ΑΠ), με στόχο την οικοδόμηση ελευθέρων, υπευθύνων, δημιουργικών και ευτυχισμένων πολιτών στην κοινωνία του αύριο.

2. Παράγοντες που θα διαμορφώσουν τη μελλοντική κοινωνία

Πρώτα απ' όλα ο ρόλος που θα παίξει το σχολείο στο μέλλον θα εξαρτηθεί πολύ από το είδος των αξιών που θα