Author: Τζανάκης Ν.

Title: Η βασική θεωρία των συνεχών κλασμάτων και μερικές εφαρμογές της.

Abstract: Σ᾽ αυτό το άρθρο δίνεται η βασική θεωρία που αναφέρεται στα συνεχή κλάσματα και δίνονται ορισμένες σημαντικές εφαρμογές της.

γοποίηση των ικανοτήτων και εμπλουτισμό των εμπειριών του.

Έτσι σε αντικατάσταση της συμβατικής και παραδοσιακής εκπαίδευσης, προτείνεται η «δυναμική εκπαίδευση» που θα είναι ανοιχτή στα ποικίλα ερεθίσματα και εμπειρίες μάθησης, και στην οποία ο δάσκαλος δεν θα είναι το εκτελεστικό όργανο, αλλά ο πνευματικός ηγέτης, που θα αυτομορφώνεται συνεχώς και θα κάνει προσιτές τις εκπαιδευτικές ευκαιρίες σε όλα τα άτομα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Φλουρή Γ.: Αναλυτικά Προγράμματα για μια νέα εποχή στην εκπαίδευση (1983).
2. Νούτσου Χ.: Προγράμματα Μέσης Εκπαίδευσης και κοινωνικός έλεγχος (1931-1973).
3. Νούτσου Μ.: Διδακτικοί στόχοι και Αναλυτικό Πρόγραμμα (1983).
4. Πρακτικά της ΟΛΜΕ: Α΄ Εκπαιδευτικό συνέδριο Καθηγητών Μέσης Εκπαίδευσης (1981).
5. Πρακτικά της ΕΜΕ: 1ο Πανελλήνιο συνέδριο μαθηματικής παιδείας (1984).

Υπεύθυνος κρίσης: Δ. Καραγεώργος

Η ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ

Ν. Τζανάκης

Σ' αυτό το άρθρο δίνομε τη βασική θεωρία, που αναφέρεται στα συνεχή (ή αλυσσωτά) κλάσματα (§ § 1, 2). Στις § 3, 4, 5 δίνομε ορισμένες σημαντικές εφαρμογές αυτής της θεωρίας. Η πολύ ενδιαφέρουσα εφαρμογή των συνεχών κλασμάτων στις δυαδικές τετραγωνικές μορφές με θετική ορίζουσα δεν αναφέρεται σε τούτο το άρθρο, αλλά ο αναγνώστης μπορεί να τη βρει (στα ελληνικά) στο |2|.

1. Πεπερασμένα συνεχή κλάσματα

1.1. Ορισμός. Πεπερασμένο συνεχές κλάσμα είναι μία έκφραση της μορφής

$$\alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \dots + \cfrac{1}{\alpha_\nu}}}$$

όπου οι $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ είναι θετικοί αριθμοί.

Αν οι $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_\nu$ είναι ακέραιοι (πάντοτε όμως οι $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ θετικοί), τότε το πεπερασμένο συνεχές κλάσμα λέγεται απλό.

Οι $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_\nu$ λέγονται μερικά πηλίκα του συνεχούς κλάσματος. Για απλούστευση του συμβολισμού μας, το παραπάνω συνεχές κλάσματος. Για απλούστευση του συμβολισμού μας, το παραπάνω συνεχές κλάσμα θα παριστάνομε συνήθως με $(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_\nu)$, και, όταν αυτό εξυπακούεται, θα παραλείπομε το χαρακτηρισμό «πεπερασμένο», για τα πεπερασμένα συνεχή κλάσματα.

Προφανώς, $(\alpha_0) = \alpha_0$ και

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_\nu) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, (\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_\nu)) \tag{1.1.1}$$

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-2}, \alpha_{\nu-1} + \frac{1}{\alpha_\nu}) \tag{1.1.2}$$

1.2. Πρόταση. Αν τα απλά συνεχή κλάσματα $(a_0, a_1, \dots a_\nu)$ και $(b_0, b_1, \dots b_\mu)$ παριστάνουν τον ίδιο αριθμό και ισχύει μια απ' τις επόμενες συνθήκες.

$$\text{(i) } a_\nu > 1 \text{ και } b_\mu > 1, \qquad \text{(ii) } a_\nu = 1 \text{ και } b_\mu = 1$$

τότε $\nu = \mu$ και $a_i = b_i$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, \nu$.

Απόδειξη: 'Εστω $(a_0, a_1, \dots, a_\nu) = (b_0, b_1, \dots, b_\mu)$, $\nu \leqq \mu$. Αν ισχύει η (i) τότε, λόγω και της (1.1.1.),

$$a_0 + \frac{1}{(a_1, \dots, a_\nu)} = (a_0, a_1, \dots, a_\nu) =$$

$$= (b_0, b_1, \dots b_\mu) = b_0 + \frac{1}{(b_1, \dots, b_\mu)},$$

όπου $(a_1, \ldots, a_\nu) > 1$ και $(b_1, \ldots, b_\mu) > 1$. Άρα το a_0 παριστάνει το ακέραιο μέρος του $(a_0, a_1, \ldots, a_\nu)$ και το

$$\frac{1}{(a_1, \ldots, a_\nu)}$$

το δεκαδικό του μέρος. Το ίδιο και για τα b_0 και

$$\frac{1}{(b_1, \ldots, b_\nu)},$$

οπότε πρέπει $b_0 = a_0$ και $(b_1, \ldots, b_\mu) = (a_1, \ldots, a_\nu)$. Τον ίδιο συλλογισμό κάνομε για τα συνεχή κλάσματα της τελευταίας ισότητας, αποδεικνύοντας $b_1 = a_1$, κ.ό.κ., $b_2 = a_2$, $b_2 = a_2, \ldots, b_{\nu-1} = a_{\nu-1}$. Αν ήταν $\nu > \mu$, τότε θα καταλήγαμε σε μια σχέση της μορφής.

$$a_\nu = (b_\nu, b_{\nu+1}, \ldots, b_\mu) =$$

$$= b_\nu + \frac{1}{(b_{\nu+1}, \ldots, b_\mu)}, \ (b_{\nu+1}, \ldots, b_\mu) > 1,$$

οπότε ο a_ν δεν θα ήταν ακέραιος· άτοπο. Άρα $\nu = \mu$ και $b_\nu = a_\nu$. Έστω τώρα ότι ισχύει η (ii), δηλ. $a_\nu = b_\mu = 1$. Τότε, απ' την

$$(1.1.2), \quad (a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1} + 1) = (a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1}, 1) =$$

$$= (b_0, b_1, \ldots, b_{\mu-1}, 1) = (b_0, b_1, \ldots b_{\mu-1} + 1)$$

και αναγόμαστε στην περίπτωση (i).

1.3. Πόρισμα. Κάθε πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα γράφεται με δύο τρόπους: Με τον ένα τρόπο το τελευταίο μερικό πηλίκο είναι > 1 και με το δεύτερο τρόπο είναι ίσο με 1. Η γραφή, που αντιστοιχεί σε κάθε τρόπο είναι μοναδική.

Απόδειξη: Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι λόγω της (1.1.2), το $(a_0, a_1, \ldots, a_\nu)$ με $a_\nu > 1$ γράφεται και ως $(a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1})$, ενώ το $(b_0, b_1, \ldots b_{\nu-1}, 1)$ γράφεται και ως $(b_0, b_1, \ldots, b_{\nu-2}, b_{\nu-1} + 1)$, και να εφαρμόσουμε την Πρόταση 1.2.

1.4. Ο Ευκλείδιος αλγόριθμος και η γραφή ενός ρητού με τη μορφή απλού συνεχούς κλάσματος

Έστω p/q ρητός, $q > 0$ και υ_ν το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο κατά τη διαδικασία του Ευκλειδίου αλγορίθμου για το ζευγάρι p, q. Έτσι θα έχομε:

$$p = qa_0 + \upsilon_1, \qquad 0 < \upsilon_1 < 1 \qquad \text{ή} \quad \frac{p}{q} = a_0 + \frac{\upsilon_1}{q}$$

$$q = \upsilon_1 a_1 + \upsilon_2, \qquad 0 < \upsilon_2 < \upsilon_1 \qquad \text{ή} \quad \frac{q}{\upsilon_1} = a_1 + \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 a_2 + \upsilon_3, \qquad 0 < \upsilon_3 < \upsilon_2 \qquad \text{ή} \quad \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = a_2 + \frac{\upsilon_3}{\upsilon_2}$$

$$\upsilon_{\nu-2} = \upsilon_{\nu-1}\, a_{\nu-1} + \upsilon_\nu, \quad 0 < \upsilon_\nu < \upsilon_{\nu-1} \quad \text{ή} \ \frac{\upsilon_{\nu-2}}{\upsilon_{\nu-1}} = a_\nu + \frac{\upsilon_\nu}{\upsilon_{\nu-1}}$$

$$\upsilon_{\nu-1} = \upsilon_\nu a_\nu, \qquad\qquad \text{ή} \ \frac{\upsilon_{\nu-1}}{\upsilon_\nu} = a_\nu$$

όπου $a_0 \in \mathbb{Z}$ και $a_1, a_2, \ldots a_\nu \in \mathbb{Z}^*$.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχομε διαδοχικά:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{\upsilon_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{\upsilon_1}{\upsilon}}} =$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\upsilon_3}{\upsilon_2}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_\nu}}}$$

Παράδειγμα. Γράφομε το $\dfrac{-500}{117}$ σε συνεχές κλάσμα. Ο Ευκλείδιος αλγόριθμος παίρνει το παρακάτω σχήμα:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & & & & & & -500 & 117 & \\
 & & & & & 117 & +85 & -5 & \leftarrow a_0 \\
 & & & & 85 & 32 & 1 & & \leftarrow a_1 \\
 & & & 32 & 21 & 2 & & & \leftarrow a_2 \\
 & & 21 & 11 & 1 & & & & \leftarrow a_3 \\
 & 11 & 10 & 1 & & & & & \leftarrow a_4 \\
10 & 1 & 1 & & & & & & \leftarrow a_5 \\
0 & 10 & & & & & & & \leftarrow a_6
\end{array}$$

Έτσι $\dfrac{-500}{117} = (-5, 1, 2, 1, 1, 1, 10) =$ (λόγω της (1.1.1.) $(-5, 1, 2, 1, 1, 1, 9, 1)$.

1.5. Ορισμός. Έστω $(a_0, a_1, \ldots, a_\nu)$ πεπερασμένο συνεχές κλάσμα. Σ' αυτό αντιστοιχούν τα συνεχή κλάσματα.

$$(a_0) = a_0, (a_0, a_1), \ldots, (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), (a_0, a_1, \ldots, a_\nu)$$

τα οποία λέγονται αναγωγήματα του $(a_0, a_1, \ldots, a_\nu)$ τάξης $0, 1, \ldots, \nu - 1, \nu$, αντιστοίχως.

1.6. Θεώρημα. Έστω $(a_0, a_1, \ldots, a_\nu)$ πεπερασμένο συνεχές κλάσμα. Αν τεθεί

$$\begin{aligned} &p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0a_1 + 1, \quad p_k = a_kp_{k-1} + p_{k-2} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{για } k \geqq 2 \quad (1.6.1) \\ &q_0 = 1, q_1 = a_1, \qquad\qquad q_k = a_kq_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}$$

τότε το m τάξης αναγώγημα του $(a_0, a_1, \ldots, a_\nu)$ είναι $\dfrac{p_m}{q_m}$.

Απόδειξη. Για τα αναγωγήματα τάξης 0 και 1 οποιουδήποτε συνεχούς κλάσματος, το θεώρημα προφανώς ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για το k τάξης αναγώγημα οποιουδήποτε συνεχούς κλάσματος.

Παίρνομε τώρα το $k + 1$ τάξης αναγώγημα ενός συνεχούς κλάσματος $(a_1, a_1, \ldots, a_\nu)$ $(k + 1 \leqq \nu)$. Τότε, λόγω της (1.1.2)

$$\left(a_0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\right) = \left(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) \quad (1.6.2)$$

Το τελευταίο όμως είναι k τάξης αναγώγημα κάποιου συνεχούς κλάσματος (π.χ. του εαυτού του), το οποίο έχει τα ίδια p_i και q_i με το $(a_0, a_1, \ldots, a_\nu)$ για $i \leqq k - 1$. Άρα, απ' την επαγωγική υπόθεση,

$$\left(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)q_{k-1} + q_{k-2}}$$

$$= \frac{(a_ka_{k+1}+1)p_{k-1} + a_{k+1}p_{k-2}}{(a_ka_{k+1}+1)q_{k-1} + a_{k+1}q_{k-2}} = \frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}}$$

$$= \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

Έτσι, λόγω της (1.6.2), $(a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$.

Παράδειγμα. Προηγουμένως γράψαμε το $\frac{-500}{117}$ με τη μορφή συνεχούς κλάσματος: $\frac{-500}{117} = (-5, 1, 2, 1, 1, 1, 10)$.

Η εύρεση των διαδοχικών αναγωγημάτων παίρνει το παρακάτω σχήμα:

k	0	1	2	3	4	5	5
a_k	-5	1	2	1	1	1	10
p_k	-5	-4	-13	-17	-30	-47	-500
q_k	1	1	3	4	7	11	117

και τα διαδοχικά αναγωγήματα είναι λοιπόν: $-5/1$, $-4/1$, $-13/3$, $-17/4$, $-30/7$, $-47/11$, $-500/117$.

1.7. Θεώρημα. Με το συμβολισμό του θεωρήματος 1.6, για κάθε $k \geqq 1$ ισχύει

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1} \tag{1.7.1}$$

Ειδικώτερα, αν το συνεχές κλάσμα είναι απλό, τότε για κάθε $\nu \geqq 0$ οι p_ν, q_ν είναι ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους.

Απόδειξη. Επαγωγικά, κάνοντας χρήση των σχέσεων (1.6.1).

1.8. Θεώρημα. Έστω $(a_0, a_1, \dots, a_\nu)$ πεπερασμένο συνεχές κλάσμα και $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ τα διαδοχικά του αναγωγήματα (ειδικώτερα, $\lambda_0 = a_0$ και $\lambda_\nu = (a_0, a_1, \dots, a_\nu)$. Έστω $0 \leqq k < \nu$. Τότε

$$\lambda_k < \lambda_\nu \text{ αν } k \text{ άρτιος}, \quad \lambda_k > \lambda_\nu \text{ αν } k \text{ περιττός}.$$

Απόδειξη. Έστω $k = 2\mu < \nu$. Αν $\mu = 0$, τότε

$$\lambda_\nu = a_0 + \frac{1}{(a_1, \dots, a_n)} > a_0 = \lambda_0$$

και το θεώρημα αληθεύει σ' αυτή την περίπτωση.

Υποθέτομε λοιπόν τώρα ότι $0 < 2\mu < \nu$. Θέτομε

$$a'_{2\mu} = (a_{2\mu}, \ldots, a_\nu),$$

οπότε, λόγω της (1.1.1), $\lambda_\nu = (a_0, \ldots, a_{2\mu-1}, a'_{2\mu})$ και απ' το θεώρημα 1.6,

$$\lambda_\nu = \frac{a'_{2\mu}p_{2\mu-1} + p_{2\mu-2}}{a'_{2\mu}q_{2\mu-1} + q_{2\mu-2}}, \quad \lambda_{2\mu} = \frac{a_{2\mu}p_{2\mu-1} + p_{2\mu-2}}{q_{2\mu}q_{2\mu-1} + q_{2\mu-2}}$$

Τότε, μετά από μερικές πράξεις

$$\lambda_\nu - \lambda_{2\mu} = \frac{(p_{2\mu-1}q_{2\mu-2} - q_{2\mu-1}q_{2\mu-2})\,(a'_{2\mu} - a_{2\mu})}{(a'_{2\mu}q_{2\mu-1} + q_{2\mu-2})\,(a_{2\mu}q_{2\mu-1} + q_{2\mu-2})} \quad (1.8.1)$$

Επειδή $\mu > 0$, είναι $a'_{2\mu}$, $a'_{2\mu} > 0$ και επαγωγικά είναι πολύ εύκολο να δείξει κανείς ότι όλα τα g_k του θεωρήματος 1.6 είναι θετικά. Άρα ο παρονομαστής του κλάσματος στο δεξιό μέλος της (1.8.1) είναι θετικός. Αφ' ετέρου, λόγω του θεωρήματος 1.7, ο αριθμητής του ίδιου κλάσματος ίσος με

$$a'_{2\mu} - a_{2\mu} = \frac{1}{(a_{2\mu+1}, \ldots, a_\nu)} > 0,$$

οπότε $\lambda_\nu > \lambda_{2\mu}$.

Εντελώς ανάλογα εργαζόμαστε για $k = 2\mu + 1$.

1.9. Θεώρημα. Με το συμβολισμό του θεωρήματος 1.6, για κάθε $k \leqq \nu$

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} - \frac{p_k}{q_k} \leqq \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

όπου το = ισχύει μόνο αν $\dfrac{p_\nu}{q_\nu} = \dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$.

Απόδειξη. Όπως στο Θεώρημα 1.8, συμβολίζουμε με λ_k το k τάξης αναγώγημα (= p_k/q_k, απ' το Θεώρημα 1.6). Έχομε,

$$(\lambda_\nu - \lambda_k) - (\lambda_\nu - \lambda_{k+1}) = \lambda_{k+1} - \lambda_k$$

$$= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \text{(λόγω της (1.7.1))}$$

$$= \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}.$$

Απ' το Θεώρημα 1.8, οι $\lambda_\nu - \lambda_k$ και $\lambda_\nu - \lambda_{k+1}$ είναι ετερόσημοι, άρα,

$$|\lambda_\nu - \lambda_k| + |\lambda_\nu - \lambda_{k+1}| = |(\lambda_\nu - \lambda_k) - (\lambda_\nu - \lambda_{k+1})| = \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Κατά συνέπεια, $|\lambda_\nu - \lambda_k| \leqq \dfrac{1}{q_k q_{k+1}}$ και το = ισχύει μόνο αν $\lambda_\nu = \lambda_{k+1}$.

2. Άπειρα συνεχή κλάσματα

2.1. Θεώρημα. Έστω $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ μια ακολουθία ακεραίων αριθμών, με $a_\nu > 0$ για $\nu \geqq 1$. Τότε η ακολουθία $\lambda_\nu = (a_0, \ldots, a_\nu)$ $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Απ' το Θεώρημα 1.8, η υπακολουθία των $\lambda_{2\mu}$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη απ' το λ. Έστω $\lambda = \lim_{\mu\to\infty} \lambda_{2\mu}$. Απ' το Θεώρημα 1.8, επίσης η υπακολουθία των $\lambda_{2\mu+1}$ είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη απ' το λ_0. Έστω $\lambda' = \lim_{\mu\to\infty} \lambda_{2\mu+1}$.

Θα δείξουμε ότι $\lambda = \lambda'$. Γράφομε

$$\lambda - \lambda' = (\lambda - \lambda_{2\mu}) + (\lambda_{2\mu} - \lambda_{2\mu+1}) - (\lambda' - \lambda_{2\mu+1}) \quad (2.1.1)$$

και είναι $\lim_{\mu\to\infty} (\lambda - \lambda_{2\mu}) = 0 = \lim_{\mu\to\infty} (\lambda' - \lambda_{2\mu+1})$, εξ' ορισμού.

Επίσης, απ' το Θεώρημα 1.7, $\lambda_{2\mu} - \lambda_{2\mu+1} = \dfrac{-1}{q_{2\mu} q_{2\mu+1}}$ και απ' τον ορισμό τους (βλ. Θεώρημα 1.6) τα $q_0, q_1, q_2, \ldots$ αποτελούν μια γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων. Άρα

$$\lim (\lambda_{2\mu} - \lambda_{2\mu+1}) = \lim_{\mu\to\infty} \frac{-1}{q_{2\mu} q_{2\mu+1}} = 0,$$

και τώρα απ' την (2.1.1), έπεται ότι $\lambda - \lambda' = 0$.

2.2. Ορισμός. Με το συμβολισμό του Θεωρήματος 2.1, το όριο λ της ακολουθίας των λ_ν συμβολίζεται με

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \ldots}}}$$

ή με $(a_0, a_1, \dots a_\nu, \dots)$ και λέγεται άπειρο (απλό) συνεχές κλάσμα. Λέμε επίσης ότι το συνεχές κλάσμα $(a_0, a_1, \dots a_\nu, \dots)$ συγκλίνει στο λ ή ότι το λ αναπτύσσεται σε συνεχές κλάσμα $(a_0, a_1, \dots, a_\nu, \dots)$. Τα $a_0, a_1, \dots, a_\nu, \dots$ λέγονται μερικά πηλίκα, ενώ για κάθε $\nu \geqq 0$, το απλό, πεπερασμένο συνεχές κλάσμα $(a_0, \dots, a_\nu)$ λέγεται αναγώγημα τάξης ν.

Επειδή το ν τάξης αναγώγημα $(a_0, \dots, a_\nu)$ του άπειρου συνεχούς κλάσματος $(a_0, \dots, a_\nu, \dots)$ μπορεί να θεωρηθεί και ως ν τάξης αναγώγημα του πεπερασμένου συνεχούς κλάσματος $(a_1, \dots, a_\mu)$, για οποιοδήποτε $\mu \geqq \nu$, έπεται ότι τα θεωρήματα 1.6, 1.7, 1.8 και 1.9 ισχύουν και στην περίπτωση που μιλούμε για αναγωγήματα απείρων συνεχών κλασμάτων.

Τα άπειρα συνεχή κλάσματα, που θα συναντήσουμε, θα έχουν πάντα ακέραια μερικά πηλίκα, οπότε θα παραλείπομε το χαρακτηρισμό «απλό».

2.3. Λήμα. Ένα πεπερασμένο απλό κι ένα άπειρο συνεχές κλάσμα δεν μπορεί να είναι ίσα.

Απόδειξη: Έστω $(a_0, a_1, \dots a_\nu, \dots) = \lambda = (b_0, b_1, \dots, b_\mu)$. Όπως συνήθως, ας τεθεί $\lambda_\nu = (a_1, \dots a_\nu)$. Επειδή η ακολουθία των λ_{2k} είναι γνησίως αύξουσα με όριο λ, ενώ η ακολουθία των λ_{2k+1} είναι γνησίως φθίνουσα με το ίδιο όριο, θα έχομε

$$a_0 = \lambda_0 < \lambda < \lambda_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} \leqq a_0 + 1$$

Αυτό σημαίνει ότι ο λ δεν είναι ακέραιος και το ακέραιος μέρος του είναι a_0. Τότε όμως ο $\lambda = b_0 + \dfrac{1}{(b_1, \dots, b_\mu)}$ θα έχει $(b_1, \dots, b_\mu) > 1$, οπότε το ακέραιο μέρος του λ θα είναι b_0.

Κατά συνέπεια $b_0 = a_0$ και τότε

$$\begin{aligned}(b_1, \dots, b_\mu) &= (b_0, b_1, \dots, b_\mu) - a_0 \\ &= \lim_{\nu\to\infty} (a_0, a_1, \dots, a_\nu) - a_0 \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \{(a_0, a_1, \dots, a_\nu) - a_0\} \\ &= \lim_{\nu\to\infty} (a_1, \dots, a_\nu) = (a_1, \dots, a_\nu, \dots).\end{aligned}$$

Απ' τη σχέση $(b_1, \dots, b_\mu) = (a_1, \dots, a_\nu, \dots)$ βρίσκομε με ανάλογο τρόπο $b_1 = a_1$ και $(b_2, ..., b_\mu) = (a_2, ..., a_\nu, ...)$, κ.ό.κ. μέχρις ότου φτάσουμε στη σχέση $b_\mu = (a_\mu, a_{\mu+1}, ...)$. 'Οπως είδαμε όμως στην αρχή της απόδειξης, ένα άπειρο συνεχές κλάσμα δε μπορεί να συγκλίνει σε ακέραιο αριθμό κι έτσι φτάσαμε σε άτοπο.

2.4. Θεώρημα. Κάθε άπειρο συνεχές κλάσμα συγκλίνει σε άρρητο αριθμό. Αν $(a_0, a_1, ..., a_\nu, ...) = (b_0, b_1, ... , b_\nu, ...)$ τότε $b_\nu = a_\nu$ για κάθε $\nu = 0, 1, 2, ...$

Απόδειξη: Στο 1.4 είδαμε ότι κάθε ρητός γράφεται με τη μορφή πεπερασμένου συνεχούς κλάσματος. Αν συνδυαστεί αυτό με το Λήμμα 2.3 δίνει στον πρώτο ισχυρισμό.

Στη συνέχεια, έστω ότι τα άπειρα συνεχή κλάσματα $(a_0, a_1, ... , a_\nu, ...)$ και $(b_0, b_1, ..., b_\nu, ...)$ συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό λ. Σύμφωνα με την αρχή της απόδειξης του Λήμματος 2.3, ο a_0 είναι το ακέραιο μέρος του λ. 'Ομοια, ο b_0 είναι το ακέραιο μέρος του λ. 'Αρα $b_0 = a_0$. Τότε,

$$\begin{aligned}(a_1, ..., a_\nu, ...) &= \lim_{\nu\to\infty} (a_1, ..., a_\nu)\\ &= \lim_{\nu\to\infty} (a_0, a_1, ..., a_\nu) - a_0\\ &= \lim_{x\to\infty} (a_1, ..., a_\nu, ...) - a_0\\ &= (a_0, a_1, ..., a_\nu, ...) - a_0\\ &= (b_0, b_1, ..., b_\nu, ...) - b_0\\ &= \lim_{\nu\to\infty} (b_0, b_1, ..., b_\nu) - b_0\\ &= \lim_{\nu\to\infty} (b_1, ..., b_\nu) = (b_1, ..., b_\nu, ...)\end{aligned}$$

'Ετσι φτάσαμε στην ισότητα $(a_1, ..., a_\nu, ...) = (b_1, ..., b_\nu, ...)$, που είναι όμοια με την αρχική, οπότε συμπεραίνουμε ανάλογα ότι $a_1 = b_1$, κ.ο.κ., επαγωγικά.

2.5. Η γραφή ενός άρρητου αριθμού με τη μορφή άπειρου συνεχούς κλάσματος

'Εστω λ άρρητος αριθμός. Θέτομε

$$\lambda = a_0 + \delta, \quad a_0 = |\lambda|, \quad 0 < \delta < 1$$

(γενικά, $\{x\}$ είναι το ακέραιο μέρος του x).

Τώρα μπορούμε να γράψομε

$$\delta = \frac{1}{x_1},\ x_1 > 1,\ x_1 = a_1 + \delta_1,\ a_1 = |x_1|,\ 0 < \delta_1 < 1.$$

Πάλι θέτομε

$$\delta = \frac{1}{x_2},\ x_2 > 1,\ x_2 = a_2 + \delta_2,\ a_2 = \{x_2\},\ 0 < \delta_2 < 1.$$

Μετά, $\delta_2 = \frac{1}{x_1}$, $x_3 > 1$, κ.ό.κ., οπότε

$$\lambda = a_0 + \frac{1}{x_1} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}}$$

Η παραπάνω διαδικασία είναι ατέρμονη. Πραγματικά, αν σταματούσε, αυτό θα γινόταν μόνο αν κάποιο δ_k ήταν 0, οπότε θα είχαμε μια σχέση της μορφής

$$\lambda = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

΄Ομως το δεξιό μέλος είναι, προφανώς, ρητός αριθμός κι ερχόμαστε σε αντίφαση με την υπόθεση ότι ο λ είναι άρρητος.

2.6. Θεώρημα. Το άπειρο συνεχές κλάσμα $(a_0, a_1, \dots, a_\nu, \dots)$, όπου τα $a_0, a_1, \dots, a_\nu, \dots$ είναι εκείνα τα οποία παίρνομε κατά την ατέρμονη διαδικασία, που περιγράψαμε στο 2.4, συγκλίνει στο λ.

Απόδειξη. Είναι $\lambda = (a_0, a_1, \dots, a_\nu, x_{n+1})$ και απ' το Θεώρημα 1.6,

$$\lambda = \frac{x_{\nu+1}p_\nu + p_{\nu-1}}{x_{\nu+1}q_\nu + q_{\nu-1}},\ (a_0, a_1, \dots, a_\nu) = \frac{p_\nu}{q_\nu}.$$

Τότε,

$$\lambda - \frac{p_\nu}{q_\nu} = \frac{x_{\nu+1}p_\nu + p_{\nu-1}}{x_{\nu+1}q_\nu + q_{\nu-1}} - \frac{p_\nu}{q_\nu} = \text{(λόγω της (1.7.1))}$$

$$= \frac{1}{(x_{\nu+1}q_\nu + q_{\nu-1})q_\nu} < \frac{1}{q_n^2}$$

Όμως η ακολουθία των q_ν είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων, οπότε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\lambda - \frac{p_\nu}{q_\nu}\right) = 0.$

Άρα $\lim\limits_{\nu\to\infty} (a_0, \alpha_1, ..., a_n) = \lambda$ ή, μ' άλλα λόγια

$$\lambda = (a_0, a_1, ..., a_\nu, ...).$$

2.7. Θεώρημα. Κάθε άρρητος αριθμός λ γράφεται μονοσήμαντα με τη μορφή ενός άπειρου συνεχούς κλάσματος $(a_0, a_1, ..., a_\nu, ...)$. Αν τα p_k, q_k $(k = 0, 1, 2,...)$ ορίζονται όπως στο Θεώρημα 1.6, τότε

$$\lambda - \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2} \qquad (2.7.1)$$

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός προκύπτει απ' το συνδυασμό του θεωρήματος 2.5 με το δεύτερο ισχυρισμό του Θεωρήματος 2.4. Για την απόδειξη της (2.6.1) θέτομε, γενικά,

$\lambda_\kappa = \frac{p_k}{q_k}$ (= k τάξης αναγώγημα του $(a_0, a_1, ..., a_\nu,...)$.

Όπως είδαμε και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1, η ακολουθία των $\lambda_{2\mu}$ είναι γνησίως αύξουσα και η ακολουθία των $\lambda_{2\mu+1}$ γνησίως φθίνουσα, με κοινό όριο το λ. Άρα.

$$\lambda_{2\mu} < \lambda \quad \text{και} \quad \lambda_{2\mu+1} > \lambda \quad \text{για κάθε} \quad \mu = 0, 1, 2,... \quad (2.7.2)$$

Τότε οι αριθμοί $\lambda - \frac{p_k}{q_k}$ και $\lambda - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ είναι ετερόσημοι, άρα

$$\lambda - \frac{p_k}{p_k} + \lambda - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \left(\lambda - \frac{p_k}{q_k}\right) - \left(\lambda - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)$$

$$= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = (\text{Θεώρημα } 1.7)\ \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

Κατά συνέπεια, $\lambda - \frac{p_k}{q_k} \leqq \frac{1}{q_k q_{k+1}}$ και το = δεν μπορεί να ισχύει μια και ο λ έχει υποτεθεί άρρητος.

3. Προσέγγιση αρρήτων με ρητούς

3.1. Παράδειγμα. Αναπτύσσομε το $\sqrt{11}$ με συνεχές κλάσμα με τη διαδικασία που περιγράφεται στην αρχή της 2:

$$\sqrt{11} = 3 + (\sqrt{11} - 3), \qquad a_0 = 3$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{11}-3} = \frac{\sqrt{11}+3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{11}-3}{2}, \qquad a_1 = 3$$

$$\frac{1}{\sqrt{11}-3} = \sqrt{11} + 3 = 6\ (\sqrt{11} - 3), \qquad a_2 = 6$$

$$\frac{1}{\sqrt{11}-3} = \ldots \text{ ξαναγυρίζομε στην}$$

Άρα η διαδικασία συνεχίζεται περιοδικά: $a_3 = 3$, $a_4 = 6$, $a_5 = 3$, $a_6 = 6$,... οπότε $\sqrt{13} = (3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, \ldots)$.

Τα αναγωγήματα $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ μέχρι τάξης 6 βρίσκονται παρακάτω:

ν	0	1	2	3	4	5	6
a_ν	3	3	6	3	6	3	6
p_ν	3	10	63	199	1257	3970	25077
q_ν	1	3	19	60	379	1197	7561

Σύμφωνα με τη (2.7.1), $\sqrt{11} - \frac{25077}{7561} < \frac{1}{7561^2} = \frac{1}{57168721}$.

Άρα ο ρητός $\frac{25077}{7561}$ είναι μια προσέγγιση του 11 με σφάλμα

$< \frac{1}{57168721}$.

3.2. Παράδειγμα. Για τον υπολογισμό του $\sqrt[3]{d} = \theta$, όπου d είναι θετικός ακέραιος, όχι τέλειος κύβος, εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Για την απλοποίηση των πράξεων χρειαζόμαστε τον συζυγή ενός αριθμού της μορφής $x + y\theta + x\theta^2$ ($x, y, z \in \psi$), ο οποίος είναι (στα παρακάτω, το $\omega \neq 1$ είναι μια κυβική ρίζα του 1):

$$(x + y\theta\omega + z\theta^2\omega^2)\,(x + y\theta\omega^2 + z\theta^2\omega) =$$

$$= (x^2 - dyz) + (dz^2 - xy)\,\theta + (y^2 - xz)\,\theta^2.$$

Ο $x + y\theta + z\theta^2$ πολ/σιαζόμενος επί το συζυγή του δίνει $x^3 + dy^3 + d^2z^3 - edxyz$. Άρα

$$\frac{1}{x + y\theta + z\theta^2} = \frac{(x^2 - dyz) + (dz^2 - xy)\theta + (y^2 - x^2)\theta^2}{x^3 + dy^3 + d^2z^3 - 3dxyz}$$

Αυτή η σχέση είναι πολύ χρήσιμη, όπως θα φανεί απ' το παρακάτω αριθμητικό παράδειγμα:

Προσεγγιστικός υπολογισμός του $\sqrt[3]{2} = \theta$. Μια πρώτη χονδρική προσέγγιση είναι η $1.25 < \theta < 1.26$. Ακολουθούμε τώρα τη διαδικασία, που περιγράφεται στην αρχή της § 2:

$$\theta = 1 + (\theta - 1), \qquad a_0 = 1$$

$$\frac{1}{\theta - 1} = 1 + \theta + \theta^2 = 3 + (-2 + \theta + \theta^2), \qquad a_1 = 3$$

$$\frac{1}{-2 + \theta + \theta^2} = \frac{2 + 4\theta + 3\theta^2}{10} = 1 + \frac{-8 + 4\theta + 3\theta^2}{10}, \quad a_2 = 1$$

$$\frac{10}{-8 + 4\theta + 3\theta^2} = \frac{4 + 5\theta + 4\theta^2}{3} =$$

$$= 5 + \frac{-11 + 5\theta + 4\theta^2}{3}, \qquad a_3 = 5$$

$$\frac{3}{-11 + 5\theta + 4\theta^2} = \frac{27 + 29\theta + 23\theta^2}{55} =$$

$$= 1 + \frac{-28 + 29\theta + 23\theta^2}{55}, \qquad a_4 = 1$$

$$\frac{55}{-28 + 29\theta + 23\theta^2} = -\ \frac{-10 + 34\theta + 27\theta^2}{62} =$$

$$= 1 + \frac{-72 + 34\theta + 27\theta^2}{62}, \qquad a_5 = 1$$

$$\frac{62}{-72+34\theta+27\theta^2}=\frac{54+63\theta+50\theta^2}{47}=$$

$$=4+\frac{-134+63\theta+50\theta^2}{47}, \qquad a_6=4$$

κ.ό.κ.

΄Αρα έχομε

ν	0	1	2	3	4	5	6
a_κ	1	3	1	5	1	1	4
p_ν	1	4	5	29	34	63	286
q_ν	1	3	4	23	27	50	227

Σύμφωνα με τη (2.7.1), $\sqrt[3]{2}-\frac{286}{227}<\frac{1}{227}=\frac{1}{51529}$, άρα ο ρητός $\frac{286}{227}$ προσεγγίζει το $\sqrt[3]{2}$ με σφάλμα $<\frac{1}{51529}$.

4. Επίλυση της διοφαντικής εξίσωσης $ax + by = c$.

4.1. Θεώρημα. Η διοφαντική εξίσωση

$$ax+by=c \tag{4.1.1}$$

έχει λύση αν και μόνο αν Μ.Κ.Δ. $\{a, b\} \mid c$.

Στην περίπτωση που Μ.Κ.Δ. $\{a, b\} = d \mid c$, θέτομε $a = da_1$, $b = db_1$, $c = dc_1$ και τότε κάθε λύση της (4.1.1) είναι της μορφής

$$x=x_0+kb_1, \quad y=y_0-ka_1, \quad k\in\mathbb{Z}$$

όπου τα x_0, y_0 αποτελούν μια οποιαδήποτε λύση της

$$a_1x+b_1y=c \tag{4.1.2}$$

Απόδειξη. Το αναγκαίο είναι φανερό. ΄Οσον αφορά το ικανό, παρατηρούμε ότι η (4.1.1) είναι ισοδύναμη με την (4.1.2), στην οποία τα a_1, b_1 είναι πρώτα μεταξύ τους. Μπορούμε, προφανώς, να υποθέσομε $a > 0$.

Αναπτύσσομε το $\dfrac{b_1}{a_1}$ σε συνεχές κλάσμα (δες 1.4) και έστω ότι τα διαδοχικά αναγωγήματα είναι

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}}, \frac{p_\nu}{q_\nu} = \frac{b_1}{a_1}.$$

Επειδή το $\dfrac{p_\nu}{q_\nu}$ είναι ανάγωγο κλάσμα (Θεώρημα 1.7) καθώς και το $\dfrac{b_1}{a_1}$, και, επιπλέον, τα q_ν και a_1 είναι θετικά, θα πρέπει $b_1 = p_\nu$ και $a_1 = q_\nu$. Άρα, απ' την (1.7.1),

$$b_1 q_{\nu-1} - a_1 p_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}$$

οπότε

$$a_1\,|(-1)^{\nu} c_1 p_{\nu-1}| + b_1\,|(-1)^{\nu-1} c_1 q_{\nu-1} = c_1$$

κι έτσι πετύχαμε τη λύση

$$x_0 = (-1)^{\nu} c_1 p_{\nu-1}, \quad y_0 = (-1)^{\nu-1} c_1 q_{\nu-1} \qquad (4.1.3)$$

της (4.1.2)

Έστω τώρα ότι τα x_0, y_0 αποτελούν λύση της (4.1.2). Έστω ακόμη ότι τα x, y παριστάνουν μια τυχαία λύση της (4.1.1), οπότε θα αποτελούν και λύση της (4.1.2). Τότε, από τις σχέσεις $a_1x + b_1y = c_1$ και $a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$, αφαιρώντας έχομε

$$a_1(x - x_0) = -\,b_1\,(y - y_0) \qquad (4.1.4)$$

Επειδή ο a_1 είναι πρώτος προς τον b_1, θα πρέπει $b_1 \mid x - x_0$, έστω $x - x_0 = kb_1$. Αντικαθιστώντας στην (4.1.4), $a_1kb_1 = -\,b_1\,(y - y_0)$, οπότε $y - y_0 = -\,ka_1$. Έτσι $x = x_0 + kb_1$, $y = y_0 - ka_1$ και οι τιμές αυτές των x, y προφανώς επαληθεύουν την (4.1.2) οπότε και την (4.1.1).

Παράδειγμα. Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση

$$117x - 500y = 11 \qquad (4.1.5)$$

Λύση: Οι 117, − 500 είναι πρώτοι μεταξύ τους. Στο παράδειγμα μετά απ' το Θεώρημα 1.6, βρίσκομε ότι το προτελευταίο αναγώγημα κατά την ανάπτυξη του $\dfrac{-500}{117}$ σε συνεχές κλάσμα είναι

$$\frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}} = \frac{-47}{11} \ (\nu = 6).$$

'Αρα, μια λύση της (4.1.5) είναι, λόγω των (4.1.4):

$$x_0 = -11 \cdot 47 = -517, \quad y_0 = -11 \cdot 11 = -121$$

και η γενική λύση της (4.1.5) θα δίνεται, κατά συνέπεια, απ' τις σχέσεις

$$x = -517 + 500k, \quad y = -121 + 1117, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5. 'Απειρα περιοδικά συνεχή κλάσματα και η εξίσωση του Pell (ή του Fermat)

5.1. Ορισμός. Το άπειρο συνεχές κλάσμα $(a_0, a_1, \ldots, a_\nu, \ldots)$ λέγεται περιοδικό αν υπάρχει σταθερός θετικός ακέραιος k και σταθερός ακέραιος $N \geqq 0$ έτσι ώστε

$$a_{\nu+k} = a \quad \text{για κάθε} \quad \nu \geqq N$$

Σ' αυτή την περίπτωση το συνεχές κλάσμα έχει τη μορφή

$$(a_0, \ldots, a_{N-1}, \underbrace{a_N, \ldots, a_{N+k-1}}_{\text{1η περίοδος}}, \underbrace{a_N, \ldots, a_{N+k-1}}_{\text{2η περίοδος}}, \ldots)$$

Το διατεταγμένο σύνολο των μερικών πηλίκων $\{a_N, \ldots, a_{N+k-1}\}$ λέγεται περίοδος του συνεχούς κλάσματος και, για απλούστευση του συμβολισμού, το συνεχές κλάσμα γράφεται τότε:

$$(a_0, \ldots, \dot{a}_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots, \dot{a}_{N+k-2}, a_{N+k-1}) \qquad (5.1.1.)$$

Παράδειγμα. Στο παράδειγμα 3.1, ο $\sqrt{11}$ γράφεται με τη μορφή περιοδικού συνεχούς κλάσματος: $\sqrt{11} = (3, \dot{3}, \dot{6})$.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε: $\sqrt{2} = (1, \dot{2})$, $\sqrt{3} = (1, \dot{1}, \dot{2})$, $\sqrt{5} = (2, \dot{4})$, $\sqrt{7} = (2, \dot{1}, 1, 1, \dot{4})$.

5.2. Ορισμός. Τετραγωνικός άρρητος αριθμός είναι ένας πραγματικός άρρητος αριθμός, που είναι ρίζα μιας εξίσωσης της μορφής

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{Z} \qquad (5.2.1)$$

5.3. Λήμμα. 'Εστω $\lambda = (a_0, a_1, \ldots, a_\nu, \ldots)$ ένα άπειρο συνεχές κλάσμα. Για κάθε $\nu \geqq 1$ συμβολίζομε με a'_ν το άπειρο συνεχές κλάσμα $(a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots)$ (το συμβολισμό αυτό θα διατηρήσομε σ' όλη την § 5). Τότε

$$\lambda = (a_0, \ldots, a_{\nu-1}, a'_\nu) \tag{5.3.1}$$

Απόδειξη. $\lambda = \lim\limits_{\mu\to\infty} (a_0, \ldots, a_{\nu-1}, a_\nu, \ldots, a_{\nu+\mu})$

$$= \lim_{\mu\to\infty} (a_0, \ldots, a_{\nu-1}, (a_\nu, \ldots, a_{\nu+\mu}))$$

$$= \lim_{\mu\to\infty} \frac{p_{\nu-1}(a_\nu, \ldots, a_{\nu+\mu}) + p_{\nu-2}}{q_{\nu-1}(a_\nu, \ldots, a_{\nu+\mu}) + q_{\nu-2}}$$

$$= \frac{p_{\nu-1} \lim\limits_{\mu\to\infty}(a_\nu, \ldots, a_{\nu+\mu}) + p_{\nu-2}}{q_{\nu-1} \lim\limits_{\mu\to\infty}(a_\nu, \ldots, a_{\nu+\mu}) + q_{\nu-2}}$$

$$= \frac{p_{\nu-1} a'_\nu + p_{\nu-2}}{q_{\nu-1} a'_\nu + q_{\nu-2}} = (a_0, \ldots, a_{\nu-1}, a'_\nu)$$

5.4. Θεώρημα. Ένα άπειρο περιοδικό συνεχές κλάσμα συγκλίνει σε τετραγωνικό άρρητο αριθμό. Αντίστροφα, κάθε τετραγωνικός άρρητος αριθμός αναπτύσσεται σε άπειρο περιοδικό συνεχές κλάσμα.

Απόδειξη. Έστω ότι το συνεχές κλάσμα (5.1.1) συγκλίνει στον αριθμό λ, οπότε, απ' την (5.3.1), $\lambda = (a_0, \ldots, a_{N-1}, a'_N)$. Τότε

$$\lambda = \frac{a'_N\, p_{N-1} + p_{N-2}}{a'_N\, q_{N-1} + q_{N-2}}, \quad a' = \frac{p_{N-2} - \lambda q_{N-2}}{\lambda q_{N-1} - p_{N-1}} \tag{5.4.1}$$

(ο παρανομαστής του δευτέρου κλάσματος είναι $\neq 0$, γιατί οι p_{N-1}, q_{N-1} είναι ακέραιοι, ενώ ο λ, απ' το Θεώρημα 2.4, είναι άρρητος). Επίσης,

$$a'_N = (a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k-1}, \ldots)$$

$$= (a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k}, \ldots, a_{N+k-1}, a'_N) \tag{5.4.2}$$

Άρα,

$$a'_N = \frac{a'_N p' + p''}{a'_N q' + q''} \tag{5.4.3}$$

όπου $\frac{p'}{q'}$ και $\frac{p''}{q''}$ είναι το προτελευταίο και το τρίτο απ' το τέλος, αντίστοιχα, αναγώγημα του (5.4.2). Έτσι, απ' την (5.4.3),

$$q'a_N'^2 + (q'' - p')\, a_N' - p'' = 0, \qquad (5.4.4)$$

όπου η διακρίνουσα

$$(q'' - p')^2 + 4q'p'' \neq \text{τετράγωνο ρητού} \qquad (5.4.5)$$

μια και ο a_N' είναι άρρητος (Θεώρημα 2.4).

Αντικαθιστώντας το a_N' απ' τη δεύτερη σχέση (5.4.1) στην (5.4.4) καταλήγομε σε μια εξίσωση ως προς λ, με ακέραιους συντελεστές, βαθμού $\leqq 2$. Ο συντελεστής του λ σ' αυτή την εξίσωση είναι

$$q_{N-2}^2\, q' - (q'' - p')\, q_{N-1}\, q_{N-2} - q_{N-1}^2 p''.$$

Αν ήταν ίσος με μηδέν τότε η εξίσωση

$$q'x^2 - (p'' - p')x - p'' = 0$$

θα είχε τη ρητή ρίζα $\dfrac{q_{N-2}}{q_{N-1}}$, οπότε η διακρίνουσα της $(q'' - p)^2 + 4q'p''$ θα ήταν τετράγωνο ρητού κι αυτό αντίκειται στην (5.4.5). Άρα ο λ είναι ρίζα μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με ακέραιους συντελεστές και, επιπλέον, είναι και άρρητος (Θεώρημα 2.4). Άρα ο λ είναι τετραγωνικός άρρητος αριθμός.

Αντίστροφα, έστω ότι ο $\lambda = (a_0, a_1, \ldots, a_\nu, \ldots)$ είναι τετραγωνικός άρρητος αριθμός, ρίζα της (5.2.1). Αρκεί να δείξομε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί ακέραιοι ν_1, ν_2, τέτοιοι ώστε

$$a_{\nu_1} = a_{\nu_2}, \quad a_{\nu_1+1} = a_{\nu_2+1}, \; a_{\nu_1+2} = a_{\nu_2+2}, \ldots$$

ή, μ' άλλα λόγια

$$a_{\nu_1}' = a_{\nu_2}' \quad \text{για κάποια } \nu_1, \nu_2, \; (\nu_1 \neq \nu_2) \qquad (5.4.6)$$

Στα παρακάτω θα δείξομε ότι μπορούμε να βρούμε μια σχέση της μορφής (5.4.6):

Λόγω της (5.3.1), $\lambda = \dfrac{a'p_{\nu-1} + p_{\nu-2}}{a'q_{\nu-1} + q_{\nu-2}}$ και αντικαθιστώντας στην (5.2.1) βρίσκομε μια σχέση της μορφής.

$$A_\nu a_\nu'^2 + B_\nu a_\nu' + c_\nu' = 0 \qquad (5.4.7)$$

όπου

$$A_\nu = ap_\nu^2 + bp_{\nu-1}q_{\nu-1} + cq_{\nu-1}^2 \qquad (5.4.8)$$

$$B_\nu = 2ap_{\nu-1}p_{\nu-2} + b(p_{\nu-1}q_{\nu-2} + p_{\nu-2}q_{\nu-1}) + 2cp_{\nu-1}q_{\nu-2} \qquad (5.4.9)$$

$$C_\nu = ap^2_{\nu-2} + bp_{\nu-2}q_{\nu-2} + cq^2_{\nu-2} = A_{\nu-1}$$

Κάνοντας πράξεις βρίσκομε:

$$B^2_\nu - 4A_\nu C_\nu = (b^2 - 4ac)\,(p_{\nu-1}q_{\nu-2} - p_{\nu-2}q_{\nu-1})^2 = (\text{Θεώρημα } 1.7) b^2 - 4ac \qquad (5.4.10)$$

Τώρα η (2.7.1), αν σ' αυτήν το k αντικατασταθεί απ' το $\nu - 1$, δίνει

$$\lambda - \frac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}} < \frac{1}{q^2_{\nu-1}},$$

απ' όπου $p_{\nu-1} = \lambda q_{\nu-1} + \dfrac{\delta_{\nu-1}}{q_{\nu-1}}$ με $|\delta_{\nu-1}| < 1$.

Τότε, απ' την (5.4.8),

$$A_\nu = a\left(\lambda q_{\nu-1} + \frac{\delta_{\nu-1}}{q_{\nu-1}}\right)^2 + b\left(\lambda q_{\nu-1} + \frac{\delta_{\nu-1}}{p_{\nu-1}}\right) q_{\nu-1} + cq^2_{\nu-1}$$

$$= (a\lambda^2 + b\lambda + c)q^2_{\nu-1} + (2a\lambda + b)\,\delta_{\nu-1} + a\,\frac{\delta^2_{\nu-1}}{q^2_{\nu-1}}$$

$$= (2a\lambda + b)\delta_{\nu-1} + a\,\frac{\delta^2_{\nu-1}}{q^2_{\nu-1}},$$

απ' όπου,

$$|A_\nu| < 2\,|a\lambda| + |b| + |a| \qquad (5.4.11)$$

και λόγω της (5.4.9)

$$|C_\nu| < 2\,|a\lambda| + |b| + |a| \qquad (5.4.12)$$

Επίσης, απ' την (5.4.10),

$$B^2_\nu \leqq 4\,|A_\nu|\,|C_\nu| + |b^2 - 4ac| <$$
$$4\,(2|a\lambda| + |b| + |a|)^2 + |b^2 - 4ac| \qquad (5.4.13)$$

Απ' τις (5.4.11), (5.4.12) και (5.4.13) βλέπομε ότι οι δυνατές τιμές για τα A_ν, B_ν, C_ν είναι πεπερασμένες. Όμως τα A_ν, B_ν, C_ν είναι άπειρα. Αυτό έχει σαν ειδικώτερη συνέπεια να μπορούμε να βρούμε τρεις διαφορετικούς δείκτες ν_1, ν_2, ν_3, τέτοιους ώστε τα $A_{\nu_i}, B_{\nu_i}, C_{\nu_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ να έχουν την ίδια τιμή, έστω A, B, C, αντίστοιχα.

Τότε όμως, λόγω της (5.4.7), τα a'_{ν_i} $(i = 1, 2, 3)$ θα είναι ρίζες της $Ax^2 + Bx + C = 0$, η οποία δεν είναι ταυτότητα γιατί $A \neq 0$. (Είναι $A \neq 0$ για όλα τα ν. Απόδειξη. Αν $A_\nu = 0$, τότε απ' την (5.4.8), ο ρητός $\dfrac{p_{\nu-1}}{q_{\nu-1}}$ θα ήταν ρίζα της (5.2.1). Όμως η (5.2.1) έχει ως ρίζα της τον άρρητο λ κι αυτό είναι αδύνατο, αφού μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ακέραιους συντελεστές δε μποεί να έχει ταυτόχρονα μια ρητή και μια άρρητη ρίζα). Άρα δύο, τουλάχιστον, απ' τα $a'_{\nu_1}, a'_{\nu_2}, a'_{\nu_3}$ είναι ίσα, κι έτσι παίρνομε μια σχέση της μορφής (5.4.6).

5.5. Η εξίσωση του Pell (ή του Fermat)

Πρόκειται για εξίσωση της μορφής

$$x^2 - Dy^2 = 1 \qquad (5.5.1)$$

ή της μορφής

$$x^2 - Dy^2 = -1 \qquad (5.5.2)$$

όπου ο D είναι θετικός ακέραιος, όχι τέλειο τετράγωνο.

Σχετικά ισχύουν τα εξής θεωρήματα, που η απόδειξή τους ξεφεύγει απ' τα όρια αυτού του άρθρου· δίνομε όμως σχετική βιβλιογραφία.

Θεώρημα I. Έστω θετικός ακέραιος D όχι τέλειο τετράγωνο. Τότε η (5.5.1) έχει λύση. Αν (x_1, y_1) είναι η λύση της (5.5.1) με τα x_1, y_1 θετικά και ελάχιστα, τότε όλες οι λύσεις της (5.5.1) είναι εκείνα ακριβώς τα ζευγάρια (x, y), τα οποία παίρνομε απ' τις σχέσεις

$$x + y\sqrt{D} = \pm (x_1 + y_1\sqrt{D})^\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

Απόδειξη: Δες |3|, Κεφ. 8. Θεώρ. 1 ή |4| Θεώρ. 104.

Το πρόβλημα λοιπόν είναι να μπορέσουμε να βρούμε ένα πρακτικό τρόπο για να πάρομε τη λύση (x_1, y_1) (που λέγεται «ελάχιστη θετική λύση της (5.5.1)»). Συχνά αυτό το πετυχαίνομε με δοκιμή. Π.χ. για $D = 5$ έχομε $x^2 = 1 + 5y^2$ και θέτοντας διαδοχικά $y = 1, 2, \dots,$ βλέπομε ότι η ελάχιστη θετική λύση της $x^2 - 5y^2 = 1$ είναι η $(x_1, y_1) = (9, 4)$. Εδώ άρκεσαν τέσσερεις δοκιμές για να πετύχομε τη λύση (x_1, y_1).

Υπάρχουν όμως ακόμη και σχετικώς μικρά D, για τα οποία η ελάχιστη θετική λύση είναι πάρα πολύ δύσκολο να βρεθεί με δοκιμή. Π.χ. για $D = 94$ είναι $(x_1, y_1) = (2143295, 221064)$! Σε τέτοιες περιπτώσεις αποδεικνύεται πάρα πολύ χρήσιμο το Θεώρημα III.

Θεώρημα II. Έστω D θετικός ακέραιος, όχι τέλειο τετράγωνο. Η (5.5.2) δεν έχει πάντα λύση. Στην περίπτωση που έχει, έστω (ξ, η) η ελάχιστη θετική λύση της (δηλ. τα ξ, η είναι θετικά με την ελάχιστη τιμή). Τότε όλες οι λύσεις της (5.5.2) είναι εκείνα ακριβώς τα ζευγάρια (x, y), τα οποία παίρνομε απ' τις σχέσεις

$$x + y\sqrt{D} = \pm(\xi + \eta\sqrt{D})^{2\nu+1}, \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

ενώ όλες οι λύσεις της (5.5.1) είναι εκείνα ακριβώς τα ζευγάρια που παίρνομε απ' τις σχέσεις

$$x + y\sqrt{D} = \pm(\xi + \eta\sqrt{D})^{2\nu}, \quad \nu \quad \mathbb{Z}$$

Απόδειξη. Δες |4|, Θεώρ. 106.

Το επόμενο Θεώρημα δίνει ένα πρακτικό τρόπο για ν' αποφασίζομε αν η (5.5.2) είναι επιλύσιμη. Μας παρέχει επίσης μια πρακτική μέθοδο για να βρίσκομε την ελάχιστη θετική λύση (x_1, y_1) της (5.5.1) καθώς επίσης και στην ελάχιστη θετική λύση (5.5.2), στην περίπτωση που αυτή είναι επιλύσιμη.

Θεώρημα III. Έστω D θετικός ακέραιος, όχι τέλειο τετράγωνο. Αναπτύσσομε τον $\sqrt{D}$ σε συνεχές κλάσμα. Σύμφωνα με το θεώρημα 5.4, αυτό το συνεχές κλάσμα είναι περιοδικό, έστω $(a_0, \ldots, a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k-1})$. Αν το k (= πλήθος των μερικών πηλίκων, που συνιστούν μια περίοδο) είναι άρτιος αριθμός, τότε η (5.5.2) είναι αδύνατη, ενώ η ελάχιστη θετική λύση της (5.5.1) είναι η $(x_1, y_1) = (p_{N\lambda k-2}, q_{N+k-2})$ (τα p_i, q_i όπως ορίζονται στο Θεώρημα 1.6).

Αν το k είναι περιττός αριθμός, τότε η (5.5.2) είναι επιλύσιμη και η ελάχιστη θετική λύση της είναι η $(\xi, \eta) = p_{N+k-2}{}'$ $q_{N+k-2})$ ενώ η ελάχιστη θετική λύση της (5.5.1) είναι η

$$(x_1, y_1) = (p_{N+2k-2}{}', q_{N+2k-2}).$$

Απόδειξη. Δες |1|, §§ 127-128.

5.6. Παράδειγμα. ʼΕστω $D = 94$. Αναπτύσσομε τον $\sqrt{94}$ σε συνεχές κλάσμα, κατʼ αναλογία με το Παράδειγμα 3.1.

$$\sqrt{94} = 9 + (\sqrt{94} - 9), \qquad a_0 = 9$$

$$\frac{1}{\sqrt{94} - 9} = \frac{\sqrt{94} + 9}{13} = 1 + \frac{\sqrt{94} - 4}{13}, \qquad a_1 = 1$$

$$\frac{13}{\sqrt{94} - 4} = \frac{\sqrt{94} + 4}{6} = 2 + \frac{\sqrt{94} - 8}{6}, \qquad a_2 = 2$$

$$\frac{6}{\sqrt{94} - 4} = \frac{\sqrt{94} + 4}{13} = 1 + \frac{\sqrt{94} - 9}{13}, \qquad a_{15} = 1$$

$$\frac{13}{\sqrt{94} - 9} = \sqrt{94} + 9 = 18 + (\sqrt{94} - 9), \qquad a_{16} = 18$$

$$\frac{1}{\sqrt{94} - 9} = \ldots. \text{ ξαναγυρίζουμε στην}$$

ʼΕτσι βρίσκομε $\sqrt{94} + 9 = (9, \dot{1}, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, \dot{18})$. Εδώ $N = 1$, $k = 16$, άρα η

$$x^2 - 94y^2 = -1$$

είναι αδύνατη.

Βρίσκομε τώρα τα διαδοχικά αναγωγήματα, που αντιστοιχούν στην πρώτη περίοδο:

ν	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_ν	9	1	2	3	1	1	5	1	8	1	5	1	1	3	2	1	18
p_ν	9	10	29	97	126	223	1241	1464	12953	14417	85038	99455	184493	652934	1490361	2143295	4006971
q_ν	1	1	3	10	13	23	128	151	1336	1487	8771	10258	19029	67345	153719	221064	4132871

ʼΑρα $(x_1, y_1) = (2143295, 221064)$.

Ταυτόχρονα βρήκαμε μια πολύ ικανοποιητική προσέγγιση του $\sqrt{94}$: Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.7, ο ρητός

$$\frac{40069671}{4132871}$$

προσεγγίζει τον 94 με σφάλμα $< 10^{-13}$.

5.7. Παράδειγμα. Αναπτύσσομε τον $\sqrt{13}$ με συνεχές κλάσμα, κατά τα γνωστά, και βρίσκομε

$$\sqrt{13} = (3, \dot{1}, 1, 1, 1, \dot{6}).$$

Εδώ $N = 1$, $k = 5$, άρα η $x^2 - 13y^2 = -1$ έχει λύση.

Βρίσκομε τα αναγωγήματα, που αντιστοιχούν στις δύο πρώτες περιόδους:

ν	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_ν	3	1	1	1	1	6	1	1	1	1	6
p_ν	3	4	7	11	18	119	137	256	393	649	4287
q_ν	1	1	2	3	5	33	38	71	109	180	1909

1η περίοδο λύση της (5.5.2)   2η περίοδος λύση της (5.5.1)

Έτσι $(\xi, \eta) = (18,5)$ είναι ελάχιστη θετική λύση της $x^2 - 13y^2 = -1$ και $(x_1, y_1) = (649, 180)$ είναι η ελάχιστη λύση της $x^2 - 13y^2 = 1$. Είναι $649 + 180\ 13 = (18 + 5\ 13)$, κάτι που, άλλωστε, προβλέπεται απ' το Θεώρημα III. Σύμφωνα με το ίδιο θεώρημα, η αμέσως μεγαλύτερη μετά από την (18,5) λύση της $x^2 - 13y^2 = -1$ είναι η (x, y) για την οποία $x + y\sqrt{13} = (18 + 5\sqrt{13})^3 = 23383 + 6485\sqrt{13}$, δηλ. η $(x, y) = (23382, 6485)$. Επίσης, η αμέσως μεγαλύτερη μετά από την (649, 180) θετική λύση της $x^2 - 13y^2 = 1$ είναι η (x, y) για την οποία

$$x + y\sqrt{13} = (18 + 5\sqrt{13})^4 =$$

$$= (649 + 180\sqrt{13})^2 = 842401 + 233640\sqrt{13},$$

δηλ. η (x, y) (842401, 233640).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. CAHEN E., Théorie des Nombres (Tome second), Hermann, Paris 1924.
2. HURWITS A., Μαθήματα Αριθμοθεωρίας (επεξεργασμένα απ' τον Ν. Κριτικό). Έκδοση Γ.Α. Πνευματικού, Αθήνα 1981.
3. MORDELL L.J., Diophantitine Wquations, Academic Press, London & New York 1969.
4. NAGELL T., Introduction to Number Theory Chelsea Publ. Co., New York 1964.

Υπεύθυνος Κρίσης: Σταύρος Παπασταυρίδης

Η ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΛΥΣΕΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΑ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α. Πέτρου - Ν. Οικονόμου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ*

Στόχος της έρευνας:

Η κριτική που αναπτύσεται τα τελευταία χρόνια στην Ελλάδα γύρω από τα βιβλία των Μαθηματικών της Μέσης Εκπαίδευσης, αλλά και γενικώτερα γύρω από τα διδακτικά βιβλία, φαίνεται να αγνοεί συστηματικά τη γνώμη του άμεσα ενδιαφερόμενου, του μαθητή.

Οι πληροφορίες που υπάρχουν στην Ελληνική βιβλιογραφία, σχετικά με τη στάση του μαθητή, απέναντι στο διδακτικό βιβλίο, έχουν καθαρά προεπιστημονικού χαρακτήρα, δεδομένου ότι στηρίζονται σε προσωπικές ή διαπροσωπικές εκτιμήσεις για το τι, πόσο και πως διαβάαζουν οι μαθητές, τι δυσκολίες συναντούν και πως αντιμετωπίζουν τις ασκήσεις.

* Ευχαριστούμε θερμά το Λυκειάρχη του 9ου Λυκείου Θεσσαλονίκης κ. Σπύρο Αυγερινό για τη βοήθεια του στην διεξαγωγή της έρευνας καθώς και τους μαθητές του Λυκείου που πρόθυμα πήραν μέρος σε αυτήν.