Authors: Γ. Δ. Στρατής, Δ. Γ. Κοντογιάννης

Title: Ιστορικά Προβλήματα Στοιχειωδών Μαθηματικών

Abstract: Στο άρθρο αυτό αναφέρονται δέκα προβλήματα που΄παιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης, με την ελπίδα ότι θα προκαλέσουν το ενδιαφέρον των αναγνωστών του περιοδικού. Οι απαντήσεις θα αρχίσουν να παρουσιάζονται απ΄το επόμενο τεύχος με προτίμηση σ΄εκείνες που στέλνονται από συναδέλφους.

Ιστορικά Προβλήματα Στοιχειωδών Μαθηματικών

Επιμέλεια:
Δ.Γ. Κοντογιάννης
Γ.Δ. Στρατής

Στο προηγούμενο τεύχος ξεκινήσαμε με τη δημοσίευση δέκα προβλημάτων που 'παιξαν σημαντικό ρόλο στην ανέλιξη της μαθηματικής επιστήμης.

Στο τωρινό τεύχος δίνουμε ακόμη δέκα προβλήματα με την ελπίδα ότι θα προκαλέσουν το ενδιαφέρον των αναγνωστών του περιοδικού.

Καθώς σημειώσαμε και στο προηγούμενο τεύχος οι απαντήσεις δεν θα καταχωρούνται αμέσως για να μπορεί κάθε συνάδελφος, που θα θέλε, ν' ασχοληθεί ανεπηρέαστος.

Απ' το επόμενο τεύχος θα αρχίσουμε να παρουσιάζουμε απαντήσεις με προτίμηση σ' εκείνες που στέλνουν οι συνάδελφοι.

11. Το πρόβλημα των μαθητριών του Kirkmann

Σ' ένα σχολείο οικοτρόφων υπήρχαν 15 μαθήτριες που κάνανε πάντα τους καθημερινούς τους περιπάτους σε παρέες των τριών ατόμων. Πως πρέπει να τοποθετηθούν για να περπατάει κάθε μαθήτρια με κάθε άλλη στην ίδια παρέα μόνο μια φορά τη βδομάδα.

Το σπουδαίο αυτό πρόβλημα τέθηκε το 1850 απ' τον Άγγλο Μαθηματικό T.P. Kirkman στο Ημερολόγιο Κυρίων και Κυριών.

12. Το πρόβλημα των Bernoulli-Euler για τις επιστολές με λαθεμένη διεύθυνση.

Να βρεθεί ο αριθμός των μεταθέσεων ν(το πλήθος) στοιχείων στις οποίες κανένα στοιχείο δεν βρίσκεται στη φυσική του θέση.

Το πρόβλημα πρωοσυνέλαβε ο Niclaus Bernoulli (1687-1759) ανηψιός των μεγάλων μαθηματικών Jacob και Johann Bernoulli. Αργότερα ενδιαφέρθηκε για το πρόβλημα αυτό ο Euler, που το χαρακτήρισε ως a quaestio curiosa ex doctrina combinationis (σκληρό πρόβλημα της Συνδυαστικής Θεωρίας).

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί πιο ρεαλιστικά ως εξής:

«Γράφει κάποιος ν επιστολές και τις αντίστοιχες διευθύνσεις στους φακέλους. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν ώστε να μην τοποθετηθεί καμιά επιστολή στο σωστό φάκελο».

13. Το πρόβλημα των παντρεμένων ζευγαριών του Lucas

Με πόσους τρόπους μπορούν ν παντρεμένα ζευγάρια να καθίσουν σ' ένα στρογγυλό τραπέζι έτσι ώστε ανάμεσα σε δυό γυναίκες να κάθεται πάντα ένας άντρας και ποτέ ένας άντρας να μη κάθεται δίπλα στη σύζυγό του.

Το πρόβλημα παρουσιάστηκε (πιθανά για πρώτη φορά) το 1811 στο Theorie des Nombres του Γάλλου Μαθηματικού E. Lucas (1842-1891) συγγραφέα του περίφημου έργου Récréations mathematiques.

Ο 'Αγγλος Μαθηματικός R.Ball είπε για το πρόβλημα αυτό: «Η επίλυσή του απέχει πολύ απ' το να είναι εύκολη».

Λύθηκε απ' τους Γάλλους M. Laisant και M. C. Moreau κι απ' τον 'Αγγλο H.M. Taylor. Επίσης μπορεί κανείς να βρει λύση στο Combinatory Analysis του Mac Mahon, που βασίζεται στις σύγχρονες αντιλήψεις.

14. Το πρόβλημα του Bernoulli για το άθροισμα δυνάμεων.

Να προσδιοριστεί το άθροισμα:

$S = 1^k + 2^k + \dots + \nu^k$, όπου: k και ν θετικοί ακέραιοι.

Μια γενική λύση του προβλήματος πρωτοπαρουσιάστηκε το 1713 στο Ars Conjectandi (Probability Computation) 'Ηταν εργασία του Ελβετού Μαθηματικού Jacob Bernoulli (1654-1705).

15. Το Θεώρημα των Fermat-Euler για τους Πρώτους Αριθμούς.

Κάθε πρώτος αριθμός της μορφής $4\nu+1$ μπορεί να παρασταθεί κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα δυό τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Το περίφημο αυτό θεώρημα ανακαλύφτηκε περίπου το 1660 απ' τον Pierre de Fermat (1601-1665) το μεγαλύτερο Γάλλο Μαθηματικό του 17ου αιώνα. Ωστόσο μέχρι το 1670 δεν είχε δημοσιευτεί οπότε και παρουσιάζεται στις σημειώσεις των έργων του Διόφαντου που εκδόθηκε απ' το γιό του Fermat. Εντούτοις δεν είναι βέβαιο αν ο Fermat είχε δώσει απόδειξη του θεωρήματος.

Η πρώτη απόδειξη του θεωρήματος παρουσιάστηκε 100 χρόνια αργότερα απ' το L. Euler στην πραγματεία του "Demonstratio Theorematis Fermatiani, omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum" (Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos 1754-1755, vol V), μετά από χρόνια καρποφόρων προσπαθειών.

16. Το θεώρημα Fermat-Gauss

Να δειχτεί ότι το άθροισμα των κύβων δυό ακεραίων αριθμών δεν μπορεί να είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

Δηλαδή η εξίσωση: $x^3 + y^3 = z^3$ δεν έχει λύση στο σύνολο $\mathbb{Z}^*$ των διαφορετικών του μηδενός ακεραίων αριθμών.

Το θεώρημα αυτό είναι ειδική περίπτωση του περίφημου Θεωρήματος Fermat που διατυπώθηκε στην Αριθμητική του Διόφαντου που έκδοσε ο γιός του Fermat και δημοσιεύτηκε το Γ670:

«Είναι αδύνατο να χωρίσεις ένα κύβο (ακεραίου) στο άθροισμα δύο κύβων (ακεραίων), μια τέταρτη δύναμη (ακεραίου) στο άθροισμα δύο τέταρτων δυνάμεων (ακεραίων) και γενικά κάθε δύναμη (ακεραίου) εκτός απ' τη δεύτερη στο άθροισμα δυό δυνάμεων (ακεραίων) με τον ίδιο εκθέτη».

Ο Fermat πρόσθεσε: «Βρήκα μια αληθινά ωραία απόδειξη του Θεωρήματος αυτού, αλλά το περιθώριο του τετραδίου είναι στενό για να τη χωρέσει».

Δυστυχώς ο Fermat παράλειψε να συμπεριλάβει στις ανακοινώσεις του αυτή τη «θαυμάσια απόδειξη».

Το θεώρημα αυτό (του Fermat) θεωρήθηκε σπουδαίο γιατί ασχολήθηκαν μ' αυτό, χωρίς επιτυχία, μερικοί απ' τους πιο μεγάλους μαθηματικούς, όπως οι Euler, Legendre, Gauss, Dirichlet, Kummer κ.ά.

Σήμερα γνωρίζουμε ότι το θεώρημα ισχύει για τις τιμές του εκθέτη από 3 έως 100.

17. Τρεις σφαίρες έχουν ένα κοινό σημείο Ρ, αλλά δεν υπάρχει ευθεία γραμμή που διέρχεται απ' το Ρ, εφαπτόμενη και στις τρεις σφαίρες. Να δειχτεί οτι αυτές οι τρείς σφαίρες έχουν ένα ακόμα κοινό σημείο.

18. Καθώς γνωρίζουμε κανένας δεν κάνει μεγαλύτερο σφάλμα από 6 ώρες όταν προσδιορίζει το χρόνο χωρίς ρολόι.

Ένας κατασκευαστής ρολογιών τοποθέτησε σ' ένα ρολόϊ δύο δείκτες με το ίδιο μήκος, έτσι που ήτανε αδύνατο να διακρίνει κανείς το λεπτοδείκτη απ τον ωροδείκτη. Ποιό είναι το μέγιστο σφάλμα που μπορεί να γίνει στον υπολογισμό της ώρας με το ρολόϊ αυτό;

19. Στο χάρτη της Ευρώπης συνδέουμε κάθε πόλη με τη πλησιέστερη, υποθέτοντας ότι οι αποστάσεις μεταξύ των πόλεων δεν είναι ποτέ ίσες. Να δειχτεί ότι δεν υπάρχει πόλη που να συνδέεται με περισσότερες από πέντε γειτονικές πόλεις.

20. Σ' ένα τραπέζι μπιλιάρδου με σχήμα έλλειψης βρίσκονται η μπάλα Α σε επαφή με το ελαστικό τοίχωμα στο οποίο ανακλάται και η μπάλα Β στο ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2, που ενώνει τις εστίες της έλλειψης.

Να δειχτεί ότι είναι αδύνατο να κτυπήσουμε τη μπάλα Α, έτσι ώστε επιστρέφοντας απ' την πρόσκρουσή της στο ελαστικό τοίχωμα να συγκρουστεί με τη μπάλα Β χωρίς όμως να συναντήσει την E_1E_2, κατά τη διαδρομή της.