Author: N. Χιωτέλης

Title: Με αφορμή μια άσκηση του βιβλίου της Ανάλυσης της Γ΄ Λυκείου.

Abstract: Σε ποιές περιπτώσεις υπάρχει η εφαπτομένη συνάρτησης στο σημείο x(0).

Creator: HDML

τες των ινστιτούτων αυτών είχαν στη διάθεσή τους για έρευνα και για επαφές με μαθηματικούς από τον υπόλοιπο κόσμο περίπου το εν δεύτερο του χρόνου εργασίας τους. Συχνά στους επιστημονικούς αυτούς συνεργάτες δίνονταν άδεια για να εργασθούν σε ερευνητικά ινστιτούτα άλλων κρατών.

Αυτές τις συνθήκες εργασίας πρέπει να φροντίσουμε να τις διατηρήσουμε και για τους μελλοντικούς μαθηματικούς μας. Πρέπει να βγάλουμε το Πανεπιστήμιο από το αδιέξοδο. Η καλή συνεργασία μεταξύ καθηγητών, βοηθών και φοιτητών, η οποία παλαιότερα ήταν αυτονόητη, πρέπει πάλι να αποκατασταθεί. Βέβαια αυτή είναι δύσκολο διότι τώρα έχουν σχηματισθεί τα λεγόμενα «συμφέροντα ομάδων».

'Ομως γενικά ο απολογισμός των εμπειριών μου ως προς αυτή τη συνεργασία είναι θετικός και αυτό είναι παρήγορο.

Και έτσι παρ' όλα αυτά μπορώ να σας ευχηθώ
χαρά και επιτυχία στις σπουδές σας.

Ευχαριστώ όλους τους μη μαθηματικούς για την υπομονή τους να ανεχθούν τα μαθηματικά τμήματα αυτής της διάλεξης.

ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΜΙΑ ΑΣΚΗΣΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ν. Χιωτέλης

Στη σελίδα 161 § 4.3 του σχολικού βιβλίου της Ανάλυσης αναφέρεται ότι αν $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε η εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο x_0 υπάρχει και είναι η ευθεία $x = x_0$

'Ομως στην άσκηση 9 ii) της σελίδας 216 στην οποία ζητείται η εφαπτομένη μιας συνάρτησης g στο σημείο 2 το βιβλίο των λύσεων αναφέρει τα εξής: «$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{f(x) - g(2)}{x - 2} = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{f(x) - g(2)}{x - 2} = +\infty$ άρα η ευθεία $x = 2$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης.

Είναι φανερό λοιπόν ότι η περίπτωση αυτή δεν περιλαμβάνεται στα γραφόμενα στην § 4.3 αφού το $\lim\limits_{x \to 2} \lambda(x)$ δεν υπάρχει. Εύλογο λοιπόν το ερώτημα: Σε ποιές περιπτώσεις υπάρχει η εφαπτομένη; Υπάρχει ακόμα και όταν το $\lim\limits_{x \to 2} \lambda(x)$ δεν υπάρχει; Θάπρεπε λοιπόν να αναφερθούν ορισμένα πράγματα πάνω σ' αυτό το σημείο που να βοηθήσουν τους μαθητές στην απάντηση των παραπάνω ερωτημάτων.

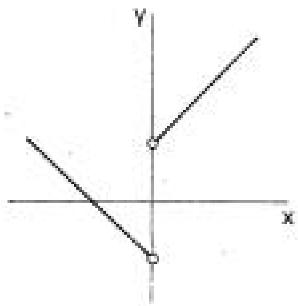
1. Ορισμός. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f, ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ, έχει «κατ' εκδοχή» από δεξιά (αντιστ. από αριστερά) παράγωγο στο σημείο x_0 το $+\infty$ ή $-\infty$ αν το όριο του λ (x) για $x \to x_0^+$ (αντιστ. x_0^-) είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Αν οι πλευρικές «κατ εκδοχή» παράγωγοι συμπίπτουν τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση είναι «κατ εκδοχή» παραγωγίσιμη.

Παρατήρηση: Εδώ πρέπει να αναφερθεί παράδειγμα συνάρτησης «κατ εκδοχής» παραγωγίσιμης που δεν είναι συνεχής για να αποδείξουμε ότι το γνωστό θεώρημα (αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σ' αυτό) δεν γενικεύεται για τις κατ' εκδοχή παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -(1+x) & x < 0 \end{cases}$$

που έχει «κατ' εκδοχή» παράγωγο στο 0 το $+\infty$ ενώ είναι ασυνεπής στο σημείο αυτό. (Σχήμα 1.)



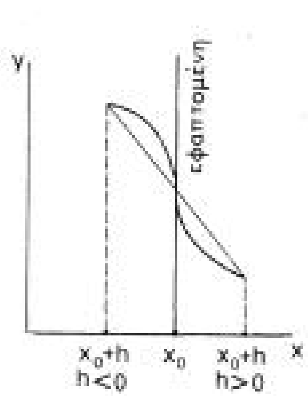
2. Πρόταση: Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του Δ και συνάρτηση f ορισμένη στο Δ και συνεχής στο x_0. Έστω ακόμα ότι υπάρχει η «κατ' εκδοχή» παράγωγος της f στο x_0. Τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο αυτό.

Απόδειξη:

Ας ονομάσουμε λ_{x0} (h) το λόγο $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ με $h \neq 0$ και $(x_0 + h) \in \Delta$. Εφ' όσον η f είναι κατ' εκδοχή παραγωγίσιμη το $\lim\limits_{x \to 2} \lambda_{x0}(h)$ υπάρχει και είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Άρα θα υπάρχει περιοχή του 0 ώστε για κάθε $h \neq 0$. Αν θεωρήσουμε στη γραφική παράσταση της f τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ η εξίσωση της ευθείας που περνά απ' αυτά είναι: $y - f(x_0) = \lambda_{x0}(h)(x - x_0)$. Η σχέση αυτή γράφεται:

$$(2.1)\quad x - x_0 = \frac{1}{\lambda_{x0}(h)}(y - f(x_0)) \ \forall\, h \neq 0 \text{ και } (x_0 + h) \in \Delta$$

αν πάρουμε δε τα όρια για $h \to 0$ έχουμε $x - x_0 = 0$, δηλ. $x = x_0$ είναι η εξίσωση της εφαπτομένης (Σχήμα 2) (α), (β).



Η περίπτωση της άσκησης που αναφέραμε δεν είναι βέβαια η ίδια διότι εκεί δεν υπάρχει η «κατ' εκδοχή» παράγωγος αφού τα πλευρικά όρια του λ (x) είναι διαφορετικά. Σε ποιες λοιπόν περιπτώσεις με ύπαρξη διαφορετικών πλευρικών παραγώγων σε κάποιο σημείο υπάρχει η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό; Πριν προχωρήσουμε όμως θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η συνέχεια της συνάρτησης στο σημείο αυτό αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για να την προχωρήσουμε διότι σε αντίθετη περίπτωση, δηλ. αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό η εφαπτομένη δεν υπάρχει π.χ. στο προηγούμενο παράδειγμα η ευθεία $x = 0$ δεν θα μπορούσε να θεωρηθεί εφαπτομένη διότι η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο σημείο 0.

5) Ας εξετάσουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

1η) Οι πλευρικές παράγωγοι πεπερασμένες και διαφορετικές.

Παράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x & x \geqslant 0 \\ 2x_3 - 4x & x < 0 \end{cases}$$

2η) Μία πλευρική παράγωγος πεπερασμένη και η άλλη $+\infty$ ή $(-\infty)$.

Παράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} x\,(1 + e_{2x}) \text{ αν } x \leqslant 0 \\ x\,(x_2 + 2\lim x \text{ αν } x > 0 \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} -xe^x \text{ αν } x \leqslant 0 \\ -x \lim x \text{ αν } x > 0 \end{cases}$$

3η) Μία πλευρική παράγωγος $+\infty$ και η άλλη $-\infty$ (Περίπτωση της άσκησής μας)

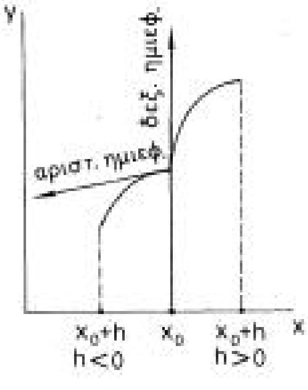
Παράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

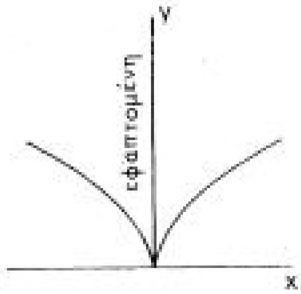
Στις δύο πρώτες περιπτώσεις οι ημιευθείες που ορίζονται σαν ημιεφαπτόμενες δεν είναι αντικείμενες και επομένως δεν υπάρχει εφαπτομένη στην γραφική παράσταση.

Σε τέτοιες περιπτώσεις θα λέμε ότι η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει γωνία στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. (Σχήμα 3)

6) Στην τρίτη περίπτωση εφαρμόζοντας την σχέση (2.1) για $h \to 0^+$ και $h \to 0^-$ έχουμε και για τις δυο περιπτώσεις $x \cdot x_0$. Οι ημιευθείες που ορίζονται σαν ημιεφαπτόμενες στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι πάνω στην ίδια ευθεία που σημαίνει ότι υπάρχει η εφαπτομένη στο σημείο αυτό. (Σχήμα 4 για το παράδειγμα της 3ης περίπτωσης).



Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει αιχμή στο σημείο (x_0, $f(x_0)$).



Βιβλιογραφία:
Βασ. Στάϊκου: Σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού Ιωάννινα 1977.
Δημ. Κάππου: Απειροστικός Λογισμός Αθήνα 1962.

Σ. Παπασταυρίδης
Υπεύθυνος Κρίσης

Νίκος Χιωτέλης
Πλαιώνη 30
195 00 ΛΑΥΡΕΙΟ

ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ VEIERSTRASS, BOLZANO, ROLL ΚΑΙ Η ΔΟΜΗ ΤΟΥ ℝ

Ν. Μαυρογιάννης

I

Σκοπός αυτής της εργασίας[1] είναι να καταδειχθεί η ισχυρή σύνδεση που έχουν τρεις θεμελιώδεις προτάσεις της — στοιχειώδους πια — Ανάλυσης με τη συνολική δομή του συνόλου ℝ των πραγματικών αριθμών. Πρόκειται για τα θεωρήματα των Weierstrass, Bolzano, Rolle (βλ. III). Λέγοντας εδώ συνολική δομή του ℝ, εννοώ το ℝ ως ένα διατεταγμένο συνεχές σώμα δηλ. ένα διατεταγμένο σώμα που ικανοποιεί κάποιο αξίωμα συνεχείας[2]. Η προσθήκη ενός αξιώματος συνεχείας στα αξιώματα του διατεταγμένου σώματος είναι αναπόσπαστο στοιχείο της δομής του ℝ, και αυτό ακριβώς είναι που διαφοροποιεί το ℝ από τα άλλα διατεταγμένα σώματα (π.χ. το ℚ) και ουσιαστικά το ορίζει μονοσήμαντα[3]. Για το λόγο αυτό οι διδακτικές δυσκολίες στις οποίες ενδεχομένως προσκρούει η εισαγωγή κάποιου αξιώματος συνεχείας, ή η συχνότητα μνημόνευσής του στα Μαθηματικά του Λυκείου[4] δεν σημαίνουν ότι ένα αξίωμα συνεχείας δεν είναι στοιχειώδης έννοιας. Είναι τουλάχιστον τόσο στοιχειώδης όσο το ίδιο το ℝ. Παρακάτω θα αποδείξουμε ότι κάθε μία από τις προτάσεις που αναφέρθηκαν είναι ισοδύναμη με κάποιο αξίωμα συνεχείας, και κατά συνέπεια οι προτάσεις αυτές δεν είναι δυνατό να αποδειχθούν όταν μεταχειριζόμαστε το ℝ απλώς σαν ένα διατεταγμένο σώμα.