Author: Κ. Τζανάκης

Title: Οι Στροφές στο Επίπεδο και τον Χώρο, οι Μιγαδικοί Αριθμοί και τα Τετράνυα του Hamilton

Abstract: Παρουσιάζεται αναλυτικά η σχέση των μιγαδικών αριθμών με την ομάδα των στροφών στο επίπεδο και διατυπώνεται το ερώτημα αν κάτι ανάλογο μπορεί να γίνει και για τις στροφές στο χώρο. Έτσι δείχνεται πως καταλήγει κανείς στα τετράνυα του Hamilton και την ομάδα των ορθομοναδιαίων πινάκων SU(2). Η παρουσίαση εμπνέεται από την ιστορική εξέλιξη του θέματος και στόχος του κειμένου είναι να οδηγήσει φυσιολογικά σε σημαντικές έννοιες όπως ομάδα, σώμα, ομομορφισμός δομών κτλ., βάσει της μελέτης συγκεκριμένων προβλημάτων που επί πλέον είναι μαθηματικώς ενδιαφέροντα καθεαυτά.

Creator: HDML

ΟΙ ΣΤΡΟΦΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΤΟΝ ΧΩΡΟ, ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΤΑ ΤΕΤΡΑΝΥΑ ΤΟΥ HAMILTON

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΤΖΑΝΑΚΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΡΕΘΥΜΝΟΝ 64100

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Παρουσιάζεται αναλυτικά η σχέση των μιγαδικών αριθμων με την ομάδα των στροφών στο επίπεδο και διατυπώνεται το ερώτημα αν κάτι ανάλογο μπορεί να γίνει και για τις στροφές στον χώρο. Ετσι δείχνεται πως καταλήγει κανείς στα τετράνυα του Hamilton και την ομάδα των ορθομοναδιαίων πινάκων SU(2). Η παρουσίαση εμπνέεται από την ιστορική εξέλιξη του θέματος και στόχος του κειμένου είναι να οδηγήσει φυσιολογικά σε σημαντικές έννοιες όπως ομάδα, σώμα, ομομορφισμός δομών κλπ., βάσει της μελέτης συγκεκριμένων προβλημάτων που επί πλέον είναι μαθηματικώς ενδιαφέροντα καθεαυτά.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι αρκετά γνωστό ότι οι μιγαδικοί αριθμοί για πολύ μεγάλο διάστημα μετά την αρχική εισαγωγή τους στην επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων (17ος αιώνας, ίσως και 16ος!), εθεωρούντο λογικά μη αποδεκτοί, εξ ου και το όνομα **φανταστική** μονάδα για το $i = \sqrt{-1}$. Σημαντικό ρόλο στην αποδοχή τους ως λογικά παραδεκτή μαθηματική οντότητα έπαιξε αρχικά η γεωμετρική τους ερμηνεία (ή αναπαράσταση) ως σημείων του Ευκλειδείου επιπέδου (Wessel 1797, Argand 1806, Gauss 1831 κ.α.) και μετά η πλήρης αλγεβρική τους θεμελίωση υπό μορφή ζεύγους πραγματικών αριθμών από τον Hamilton (1833-1837) - βλ. π.χ. [1] σελ. 7-11, 23-26. Εκείνο που ίσως είναι λιγώτερο γνωστό είναι οτι η ανακάλυψη της γεωμετρικής ερμηνείας των μιγαδικών και η συνακόλουθη τριγωνομετρική αναπαράσταση τους είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την συσχέτιση τους με τις **στροφές** στο επίπεδο (βλ. π.χ. αποσπάσματα του έργου του Wessel στο [6] σελ. XII-XV), όπως θα περιγράψομε παρακάτω.

Τούτο πέραν του οτι είναι ενδιαφέρον καθ'εαυτό και για διδακτικούς λόγους, ιδιαίτερα στο Λύκειο *, έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της άλγεβρας στον 19ο αιώνα, οδηγώντας φυσιολογικά στο **ερώτημα:**

" Είναι δυνατή μία γενίκευση των μιγαδικών αριθμών σε τρόπον ώστε να υπάρχει μία ανάλογη συσχέτιση με τις στροφές στον χώρο;"

Στο ερώτημα αυτό, που θα διατυπώσουμε ακριβέστερα στην §2, προσπάθησαν ανεπιτυχώς να δώσουν απάντηση πολλοί μαθηματικοί μεταξύ των οποίων οι Wessel, Argand, και Gauss ([1] σελ. 11). Πρώτη σαφή απάντηση** έδωσε ο Hamilton (1843) που τον οδήγησε στην ανακάλυψη των τετρανύων (quaternions), της πρώτης μη μεταθετικής δομής που μελετήθηκε και με σημαντική επίδραση στην εξέλιξη της

---

*Συνδέοντας τις φαινομενικά ασύνδετες έννοιες του μιγαδικού αριθμού και του 2x2 ορθογώνιου πίνακα και δίνοντας έτσι ένα εύστοχο και ουσιώδες παράδειγμα ομάδας πινάκων.

**Διακινδυνεύω την εικασία οτι τουλάχιστον έμμεσα, το ερώτημα έπαιξε ρόλο και στο έργο του Grassmann (1844, 1862) πάνω στον "Λογισμό της επέκτασης" (Ausdenungennslehre), πρόδρομο του σημερινού εξωτερικού λογισμού- βλ. [1] κεφ.3.

άλγεβρας, δεδομένου οτι "...η πλειοψηφία των μαθηματικών αναγνώρισε την σημασία [του προσεταιριστικού, μεταθετικού, και επιμεριστικού νόμου] μόνο αφότου αναπτύχθηκαν αριθμητικά συστήματα (ιδιαίτερα τα τετράνυα) που δεν τους υπακούουν" [1] σελ. 26. Επί πλέον το ερώτημα αυτό, όπως θα δούμε, έπαιξε ένα ρόλο και στο έργο του Cayley, σε σχέση με την ανάπτυξη και μελέτη της θεωρίας πινάκων και γραμμικών μετασχηματισμών, με σημαντικές εφαρμογές στην μηχανική (κίνηση στερεού σώματος, Cayley 1879, Klein 1875 - βλ. [7] σελ.12).

Στόχος του κειμένου που ακολουθεί είναι να μελετηθεί το ερώτημα αυτό μ' έναν τρόπο στοιχειώδη, **εμπνεόμενο από την ιστορία του, καταλήγοντας** έτσι σε σημαντικές μαθηματικές έννοιες όπως ομάδα στροφών, τετράνυα, ομομορφισμός ομάδων κλπ., αντί να χρησιμοποιούνται ως **αφετηρία** όπως γίνεται συνήθως.

Ετσι στην §2 παρουσιάζεται η σχέση του C και της ομάδας των στροφών στο επίπεδο και διατυπώνεται ακριβέστερα το προαναφερθέν ερώτημα. Στην §3 γίνεται μία μελέτη των στροφών στο χώρο και δίνεται η αναλυτική τους αναπαράσταση υπό μορφή πινάκων, ενώ στην §4 αυτό οδηγεί στην διατύπωση της έννοιας των τετρανύων και την απάντηση στο προαναφερθέν ερώτημα. Τέλος στην §5 εξηγείται πώς η προσπάθεια να αποφευχθεί η χρήση των τετρανύων στην αναπαράσταση των στροφών στον χώρο οδηγεί φυσιολογικά στην μελέτη των 2x2 ορθομοναδιαίων (unitary)* πινάκων, στην σύνδεση τους με τα τετράνυα και τα θεμέλια του έργου των Cayley και Klein στην μηχανική του στερεού σώματος.

Ας σημειωθεί εδώ οτι η §2 και εν μέρει η §3 μπορούν να αποτελέσουν διδακτικό αντικείμενο στην γ' Λυκείου, συνδέοντας θέματα της άλγεβρας και της αναλυτικής γεωμετρίας, ενώ το υπόλοιπο κείμενο απαιτεί μεγαλύτερη μαθηματική ωριμότητα από εκείνην που διαθέτει ο μαθητής του Λυκείου.

---

*Στην ελληνική βιβλιογραφία μεταφράζεται το unitary ως "μοναδιαίος". Ο όρος όμως είναι αδόκιμος καθώς χρησιμοποιείται και για τον πίνακα I.

2. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΣΤΡΟΦΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Οπως είναι γνωστό, κάθε μιγαδικός αριθμός έχει μία τριγωνομετρική αναπαράσταση και αντιστοιχείται σε ένα σημείο του Ευκλειδείου επιπέδου, δοθέντος φυσικά ενός συστήματος συντεταγμένων. Σχηματικά:

$\mathbb{C} \ni z = a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\theta \in (-\pi,\pi]$

Σχήμα 1

Το θεώρημα του de Moivre επιτρέπει να δοθεί ο ορισμός

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2.1}$$

έτσι ώστε οι βασικές αλγεβρικές ιδιότητες της εκθετικής να επεκταθούν στο C. Ταυτόχρονα δίνει την δυνατότητα γεωμετρικής ερμηνείας του πολ/μού $z \exp(i\varphi)$: Στροφή του z κατά γωνία φ γύρω από το O (η φ είναι προσανατολισμένη). Φυσιολογικά λοιπόν τίθεται το ερώτημα αν και πώς μπορούμε να παραστήσομε, **χωρίς την χρήση μιγαδικών**, με την βοήθεια μόνο της αναλυτικής γεωμετρίας, μία στροφή του επιπέδου κατά γωνία φ.

Σχήμα 2

Αν το σημείο $A = (x,y)$ απεικονίζεται στο $A' = (x',y')$ τότε από το σχήμα 2 είναι στοιχειώδες να δείξει κανείς (Ασκηση) οτι

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Ετσι μία στροφή κατά γωνία φ ορίζει ένα πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Παρατηρώντας οτι αν A^t ο ανάστροφος του A, τότε

$$A^{-1} = A^t \quad , \quad \det A = 1 \tag{2.3'}$$

μπορούμε εύκολα να δείξομε (Ασκηση) οτι αντίστροφα κάθε 2x2 πίνακας με $AA^t = I$

και det A = 1 είναι της μορφής (2.3). Επί πλέον είναι θέμα στοιχειωδών υπολογισμών (Ασκηση) να δείξει κανείς οτι οι πίνακες της μορφής (2.3) αποτελούν πολ/κή ομάδα και μάλιστα **αβελιανή** και οτι

αν A ο πίνακας της στροφής κατά γωνία ϕ

A′ -//- -//- -//- ϕ'

A″ -//- -//- -//- $\phi + \phi'$

τότε $A'' = AA' = A'A$

Τα παραπάνω ουσιαστικά αποδεικνύουν την

Πρόταση 2.1: Εστω $SO(2) = \{A/A: 2\times2$ πραγματικός πίνακας με $A^{-1}=A^t$, $\det A = 1\}$. Τότε το σύνολο $(SO(2), \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα, ισόμορφη* με την ομάδα των στροφών του επιπέδου με πράξη την σύνθεση**.

Παρατήρηση: Γενικά ένας πραγματικός πίνακας nxn A με $A^{-1} = A^t$ λέγεται ορθογώνιος. Το σύνολο τους αποτελεί ομάδα, καθώς και το σύνολο αυτών που έχουν ορίζουσα 1 (γιατί;). Η τελευταία λέγεται ειδική ορθογώνια ομάδα SO(n) (από το Special Orthogonal group), και η πρόταση 2.1 λέει οτι η SO(2) ταυτίζεται (από πλευράς δομής) με την ομάδα των στροφών στο επίπεδο. Η ονομασία ορθογώνιος προκύπτει από το γεγονός (Ασκηση) οτι αν $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\vec{x}' = A\vec{x}$ τότε

$$|\vec{x}'| \equiv |A\vec{x}| = |\vec{x}| \tag{2.4}$$

όπου $|\vec{x}|$ το σύνηθες μέτρο του $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Οδηγούμαστε λοιπόν φυσιολογικά από την (2.3) και την γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου των μιγαδικών αριθμών να ορίσομε την ακόλουθη απεικόνιση

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

της μοναδιαίας περιφέρειας U(1)*** στην SO(2).

---

* Γενικά αν G,G′ σύνολα με πράξη (ή πράξεις) $*,\circ$ αντίστοιχα, τότε μία απεικόνιση λέγεται ομομορφισμός αν $\phi(\alpha*\beta) = \phi(\alpha)\circ\phi(\beta)$. Αν ϕ είναι και 1-1 και επί λέγεται ισομορφισμός, αν είναι μόνο επί λέγεται επιμορφισμός.

** Η γωνία στροφής θεωρείται στο $(-\pi,\pi]$ και στροφές που διαφέρουν κατά $2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$, ταυτίζονται.

*** Ο συμβολισμός U(1) αντί του συνήθους S^1 θα γίνει φανερός στην §5.

Από την Πρόταση 2.1 και το Θεώρημα του de Moivre έχομε αμέσως ως

Πόρισμα: Η ομάδα στροφών (SO(2), .) είναι **ισόμορφη** με την πολ/κή υποομάδα του C, $U(1) \equiv \{ z \in C : |z| = 1\}$

Σχόλιο: Ενας τρόπος απόδειξης χωρίς υπολογισμούς του οτι η SO(2) είναι αβελιανή προκύπτει από το οτι η SO(2) είναι ισόμορφη με την **αβελιανή** (U(1),.). Αυτό θα χρειαστεί παρακάτω (§4).

Βασιζόμενοι στην απεικόνιση (2.5) της μοναδιαίας περιφέρειας στις στροφές του επιπέδου, μπορούμε να ορίσομε την απεικόνιση

$$a+bi \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad (2.5')$$

και με εντελώς όμοιο τρόπο να δείξομε (Ασκηση) την

Πρόταση 2.2: Αν $G = \{A \text{ 2x2 πραγματικός πίνακας}: A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, |a|+|b| \neq 0\}$ τότε (α) $G \cup \{0\} \equiv G_0$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το **R**, ως προς τις συνήθεις πράξεις, διάστασης 2.

(β) Η (2.5′) ορίζει **ισομορφισμό** των διανυσματικών χώρων C, G_0 (θεωρούμε τις συνήθεις πράξεις)

(γ) G, $C^* \equiv C - \{0\}$ είναι **ισόμορφες** μέσω της (2.5′), **αβελιανές πολ/κές** ομάδες.

Παρατήρηση: Τα (β),(γ) συνεπάγονται οτι το G_0 είναι **σώμα** με τις συνήθεις πράξεις πινάκων, **ισόμορφο** με το **C**.

Είναι σαφές από την (2.5′) - αλλά και από την γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου μιγαδικών - ότι ένας πίνακας $A \in G$ ορίζει την σύνθεση μιας στροφής και μιας ομοιοθεσίας: γωνία στροφής $\theta = \text{arc}\cos(a/\sqrt{(a^2+b^2)}) = \text{arc}\sin(b/\sqrt{(a^2+b^2)})$ συντελεστής ομοιοθεσίας $\sqrt{\det A} = \sqrt{(a^2+b^2)}$. Ετσι η Πρόταση 2.2 επιτρέπει την σαφή μαθηματική διατύπωση του ερωτήματος της §1:

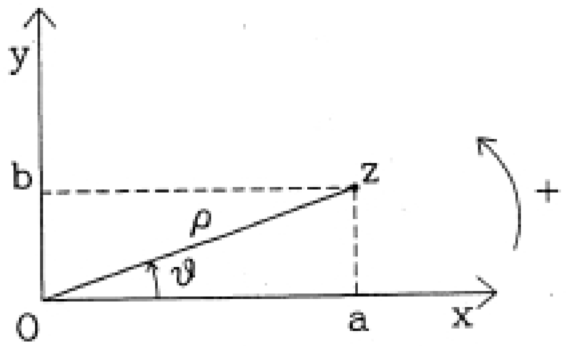
Ερώτημα: Είναι δυνατόν να βρεθεί ένα σώμα, επέκταση του C (δηλ. να περιέχει ισομορφικά το C ώστε οι πράξεις του να επεκτείνουν εκείνες του C), του οποίου η πολ/κή ομάδα να είναι ισόμορφη με την ομάδα που αποτελείται από συνθέσεις στροφών και ομοιοθεσιών στον **χώρο**;

Δηλαδή ζητάμε την γενίκευση της πρότασης 2.2(γ) στον χώρο για κάποιους, ας τους πούμε "υπερμιγαδικούς" αριθμούς.

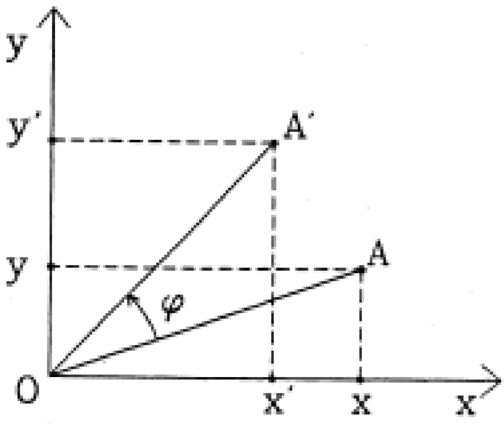
Παρατηρήσεις: (α)Σε αντίθεση με τις δύο διαστάσεις, οι στροφές και ομοιοθεσίες δεν αποτελούν διανυσματικό χώρο πάνω από το **R**. Οπως θα δούμε στην §5 η πρόταση

2.2(α),(β) μπορεί να γενικευθεί αφού θεωρήσομε πίνακες πάνω από το C.

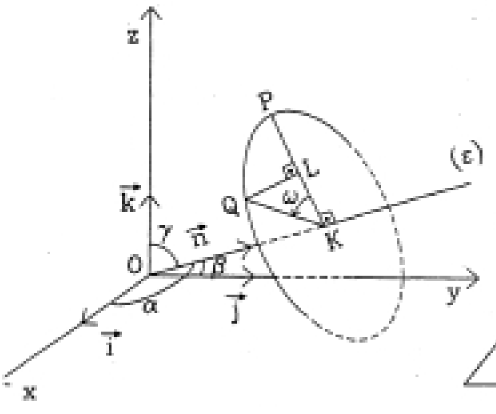
(β) Ιστορικά η σύνδεση μιγαδικών και στροφών και η συνακόλουθη διατύπωση του ερωτήματος έγινε με πιο περίπλοκο τρόπο, αφού δεν υπήρχε την εποχή εκείνη (πριν το 1843) η έννοια του πίνακα που διατυπώθηκε και μελετήθηκε απο τον Sylvester (1850) και συστηματικότερα από τον Cayley (1858, 1866) - βλ. [3] σελ. 204-205, [6] σελ. XXIV-XXV, [4] σελ.381. Ενας από τους λόγους των ανεπιτυχών προσπαθειών απάντησης του ερωτήματος ήταν και αυτή η περιπλοκότητα. Κατόπιν των παραπάνω θα πρέπει να μελετήσομε στην επόμενη παράγραφο διεξοδικά τις στροφές στον χώρο.



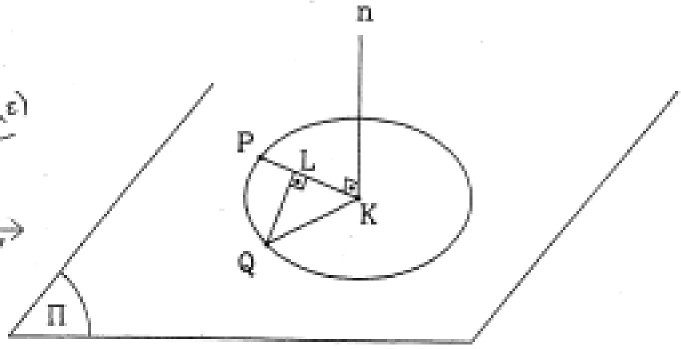
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχημα 4

3. ΣΤΡΟΦΕΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσομε τις στροφές στον χώρο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσομε στροφές γύρω από την αρχή O του θεωρούμενου συστήματος αξόνων Oxyz. Μία στροφή καθορίζεται πλήρως είτε (α) όταν μας δοθεί ως άξονας περιστροφής η ευθεία (ε) και η γωνία στροφής ω, είτε (β) όταν μας δοθεί ότι το σύστημα αξόνων Oxyz στρέφεται στο Ox'y'z'.

Περίπτωση (α): Εστω ότι η ευθεία (ε) είναι κατά την διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{n}$ (βλ. σχήμα 3).

Σχήμα 3

Εστω α,β,γ οι γωνίες του $\vec{n}$ με τα διανύσματα $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^3$, όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας τις θεωρούμε στο $[0,\pi]$. Τότε

$$\vec{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma), \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{3.1}$$

Εστω ότι το τυχόν σημείο $P=(x,y,z)$ κατά την στροφή απεικονίζεται στο $Q=(x',y',z')$. Ζητάμε τα x',y',z' συναρτήσει των x,y,z. Εστω Π το επίπεδο των P,K,Q, όπου K η προβολή του P στην (ε) και L η προβολή του Q στην PK. Είναι προφανές ότι

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PL} + \vec{LQ} \tag{3.2}$$

Ομως επειδή $|\vec{KQ}|=|\vec{KP}|$ εύκολα έπεται από το σχήμα 3 ότι

$$\vec{PL} = (1-\cos\omega)\vec{PK} = (1-\cos\omega)(\vec{OK} - \vec{OP}) = -(1-\cos\omega)(\vec{OP} - (\vec{OP}.\vec{n})\,\vec{n}) \tag{3.3}$$

Τέλος, από το σχήμα 4 βλέπομε ότι (με τον συνήθη συμβολισμό εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων)

$$\vec{LQ} = \frac{\vec{n}\times\vec{KP}}{|\vec{n}\times\vec{KP}|}\,|\vec{LQ}| = \frac{\vec{n}\times\vec{OP}}{|\vec{KP}|}\,|\vec{KQ}|\sin\omega = \vec{n}\times\vec{OP}\,\sin\omega \tag{3.4}$$

Σχήμα 4

Αντικαθιστώντας τις (3.3), (3.4) στην (3.2) βρίσκομε τελικά ότι

$$\vec{OQ} = \vec{OP} - (1-\cos\omega)(\vec{OP} - (\vec{OP}.\vec{n})\,\vec{n}) + \sin\omega\,(\vec{n}\times\vec{OP}) \tag{3.5}$$

Η (3.5) υποβάλλει την ιδέα της εισαγωγής των λεγομένων παραμέτρων Euler (Euler

1776), οριζομένων από την

$$e_0 = \cos(\omega/2), \quad e_1 = \cos\alpha \sin(\omega/2) \quad\quad e_0 = \cos(\omega/2)$$
$$e_2 = \cos\beta \sin(\omega/2), \quad e_3 = \cos\gamma \sin(\omega/2) \Longleftrightarrow \vec{e} \equiv (e_1, e_2, e_3) = \vec{n} \sin(\omega/2) \tag{3.6}$$

οπότε η (3.5) με την βοήθεια στοιχειωδών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων γράφεται

$$\vec{OQ} = (2e_0^2 - 1)\ \vec{OP} + 2(\vec{OP}.\vec{e})\vec{e} + 2e_0\ \vec{e} \times \vec{OP} \tag{3.5'}$$

η οποία υπό μορφή πίνακα παίρνει την πιο συμμετρική μορφή:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0^2+e_1^2-e_2^2-e_3^2 & 2(e_1e_2-e_0e_3) & 2(e_1e_3+e_0e_2) \\ 2(e_1e_2+e_0e_3) & e_0^2-e_1^2+e_2^2-e_3^2 & 2(e_2e_3-e_0e_1) \\ 2(e_1e_3-e_0e_2) & 2(e_2e_3+e_0e_1) & e_0^2-e_1^2-e_2^2+e_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.5''}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε οτι, λόγω της (3.6)

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \tag{3.7}$$

Την σημασία της αναπαράστασης (3.5") του πίνακα στροφής συναρτήσει των παραμέτρων Euler καθώς και της σχέσης τους (3.6) με τον άξονα και την γωνία στροφής θα αναλύσομε στην §4 με την βοήθεια της (3.7). Εδώ θα παρατηρήσομε οτι αν A ο πίνακας στην (3.5"), έχομε μετά από πολλές πράξεις οτι

$A^{-1} = A^t$, $\det A = 1$

και ο πίνακας είναι ορθογώνιος (βλ.§2). Μία απλή απόδειξη προκύπτει από την (3.11) παρακάτω σε συνδυασμό με τις (3.8)-(3.10) (πώς;). Η απλούστερη όμως απόδειξη δίνεται βάσει του οτι οι στροφές διατηρούν τα μήκη των διανυσμάτων, δηλαδή ικανοποιούν την (2.4). Είναι επίσης δυνατόν ακολουθώντας διαδικασία παρόμοια με εκείνη που οδηγεί στην (3.12) πιο κάτω, να δείξομε οτι κάθε 3x3 ορθογώνιος πίνακας τίθεται στην μορφή (3.5") αν και οι πράξεις είναι περίπλοκες. Είναι όμως γεωμετρικά σαφές οτι ο μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^3$, $\vec{x}' = A\vec{x}$, με A ορθογώνιο ορίζουσας 1, είναι μία στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων. Ετσι οι 3x3 ορθογώνιοι πίνακες μπορούν να ταυτισθούν με τις στροφές στον χώρο.

<u>Περίπτωση (β)</u>: Εστω οτι το σύστημα αξόνων Oxyz κατά την στροφή απεικονίζεται στο Ox'y'z'. Εστω OΞ η τομή των επιπέδων Oxy, Ox'y'. Ορίζονται έτσι **μονοσήμαντα** οι **γωνίες Euler** (Euler 1776) φ, θ, ψ (Σχήμα 5γ):

$\varphi, \psi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$\varphi = \sphericalangle(Ox, O\Xi)$, $\psi = \sphericalangle(O\Xi, Ox')$, $\theta = \sphericalangle(Oz, Oz')$ *

---

* Ο συμβολισμός δείχνει οτι η μέτρηση γίνεται κατά την ορθή φορά.

Είναι τώρα σαφές οτι η στροφή του Oxyz στο Ox'y'z' είναι σύνθεση των ακόλουθων στροφών κατά την **ορθή φορά** (Σχήμα 5):

- Στροφή κατά φ με άξονα Oz (σύστημα αξόνων Οξηζ)
- -//- θ -//- Οξ (-//- Οξ'η'ζ')
- -//- ψ -//- Οζ'(-//- Ox'y'z')

<u>Παρατήρηση</u>: Στην βιβλιογραφία ο ορισμός των γωνιών Euler δεν είναι ενιαίος. Εδώ ακολουθούμε το [4] Κεφ.4.

<u>Σχήμα 5</u>

Παρ' οτι οι προαναφερθείσες στροφές είναι στον χώρο, η αναλυτική τους έκφραση είναι εύκολο να βρεθεί αν κάνομε την απλή παρατήρηση οτι κάθε μία τους είναι στροφή γύρω από έναν από τους άξονες του αντίστοιχου συστήματος αξόνων, οπότε κάθε φορά μία από τις συντεταγμένες παραμένει αναλλοίωτη κατά την στροφή, ανάγοντας έτσι κατ' ουσίαν κάθε στροφή σε στροφή στις δύο διαστάσεις.

Ετσι βάσει της (2.2) για την στροφή κατά φ - βλ. Σχήμα 5 - είναι σαφές οτι η z συντεταγμένη δεν αλλάζει, οπότε ο αντίστοιχος πίνακας είναι

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (3.8)$$

Ομοίως έχομε

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} \qquad (3.10)$$

οπότε αν A_φ, A_θ, A_ψ οι πίνακες στις (3.8)-(3.10) αντίστοιχα, έχομε τελικά

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A_\psi A_\theta A_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \tag{3.11}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\psi\sin\varphi - \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\vartheta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi & -\cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

δυο τρόποι περιγραφής μίας στροφής στον χώρο όπως εκφράζονται στις (3.5") ι (3.11) είναι προφανώς ισοδύναμοι, οπότε η σχέση των γωνιών Euler με τις ραμέτρους Euler δίνεται από την εξίσωση των αντιστοίχων πινάκων και οδηγεί ένα σύστημα εξισώσεων από το οποίο εύκολα υπολογίζομε όλα τα δυνατά νόμενα και πηλίκα ζευγών παραμέτρων Euler. Ετσι έχομε τελικά την ακόλουθη φραση των παραμέτρων Euler συναρτήσει των γωνιών Euler

$$\begin{aligned} e_0 &= \pm \cos\frac{\psi+\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} & \qquad e_2 &= \pm \sin\frac{\psi-\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ e_1 &= \pm \cos\frac{\psi-\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} & \qquad e_3 &= \pm \sin\frac{\psi+\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} \end{aligned} \tag{3.12}$$

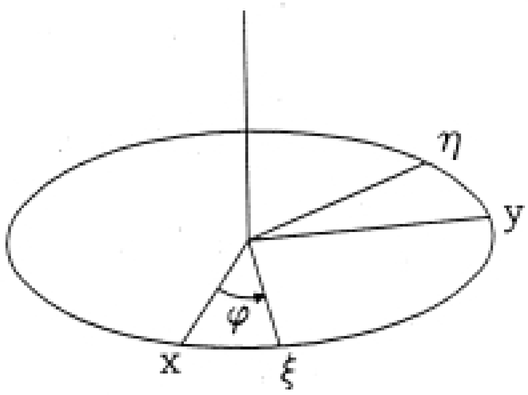
ρατήρηση: Από την σχέση (3.6) μεταξύ γωνιών και παραμέτρων Euler έπεται ιολα (Ασκηση) οτι κάθε σύνολο παραμέτρων Euler $\{e_i\}$ ορίζει **ακριβώς μία** ροφή στον χώρο. Το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού και το σύνολο $\{-e_i\}$ ορίζει ν **ίδια** στροφή

$$-e_0 = \cos\frac{2\pi+\omega}{2}, \quad -e_1 = \cos a \sin\frac{2\pi+\omega}{2} \quad \kappa\lambda\pi.$$

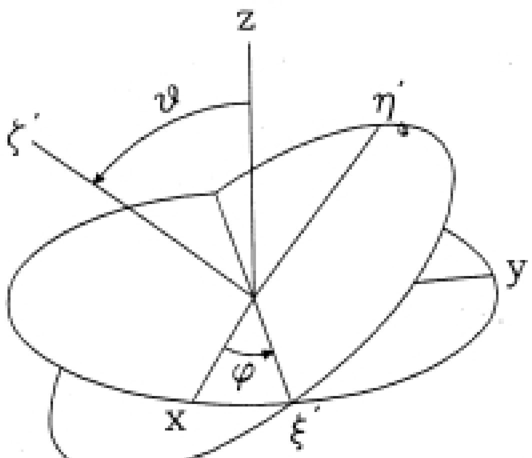
ιτο φαίνεται και από το διπλό πρόσημο στην (3.12). Στο σημείο αυτό θα ινέλθομε στις επόμενες παραγράφους. Παρεπιπτόντως ας σημειώσομε οτι η ιστοιχία $(\theta,\varphi,\psi) \to (\omega,a,\beta,\gamma)$ όπου τα a,β,γ ικανοποιούν την (3.1), είναι ιιμονοσήμαντη (γιατί; θεωρείστε τον ορισμό των θ,φ,ψ και τις σχέσεις (3.6), 12) μεταξύ των γωνιών Euler και των ω, $\vec{n}$).

ιος από τις ισοδύναμες αναπαραστάσεις (3.5"), (3.11) μίας στροφής στον χώρο ιαι σαφές οτι η έκφραση μίας στροφής βάσει των γωνιών Euler είναι πιο ιίπλοκη και λιγότερο συμμετρική από την αντίστοιχη βάσει των παραμέτρων

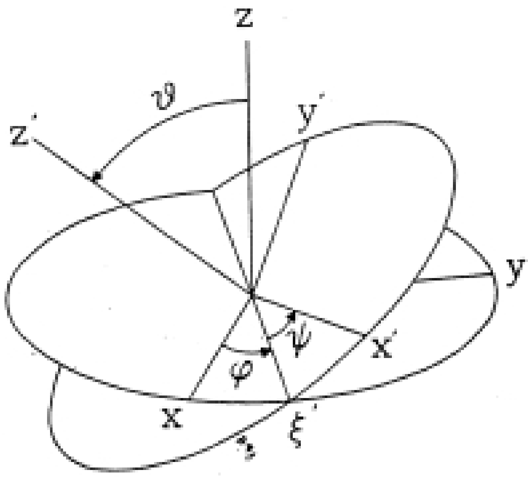
Euler ή των (ω,α,β,γ). Το ουσιαστικό όμως πλεονέκτημα της χρήσης τους είναι (i) η ανάλυση της σε **γινόμενο** τριών στροφών (βλ. την (3.11)) και (ii) ότι είναι **ανεξάρτητες** μεταξύ τους σε αντίθεση με τις (e_i) ή (ω,α,β,γ) (πρβλ. (3.1), (3.7)). Σε πιο αυστηρή γλώσσα, αποτελούν συντεταγμένες της ομάδας SO(3) θεωρούμενης ως ομάδας Lie.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5

4. ΤΟ "ΕΡΩΤΗΜΑ ΤΟΥ HAMILTON" - ΤΑ ΤΕΤΡΑΝΥΑ

Μετά την ανάλυση της ομάδας των στροφών στον χώρο στην §3, είμαστε σε θέση να μελετήσομε το ερώτημα που διατυπώσαμε στο τέλος της §2. Ας το ονομάσομε καταχρηστικά "ερώτημα του Hamilton", με μοναδική αιτιολογία όχι την ιστορική ακρίβεια*, αλλά οτι με την ασαφή διατύπωση του στην §1 απασχόλησε τον Hamilton (και άλλους πριν απ' αυτόν) οδηγώντας τον σε μία από τις βασικότερες ανακαλύψεις του: τα τετράνυα. Αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι να παρουσιάσομε σε σύγχρονη γλώσσα την ανακάλυψη αυτή.

Αφετηρία μας είναι η (3.7) που δείχνει οτι αν φανταστούμε τα (e_i) σαν συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^4$, τότε η σχέση αυτή παριστάνει την μοναδιαία σφαίρα S^3 του $\mathbb{R}^4$ και κάθε σημείο της ορίζει **ακριβώς μία στροφή στον χώρο** (το αντίστροφο δεν ισχύει· κάθε στροφή ορίζει **δύο** σημεία (e_i), $(-e_i)$ στην S^3 -βλ. τελευταία παρατήρηση της §3). Αναλυτικότερα, αν

$$\mathbb{R}^4 \ni \vec{p} = e_0\vec{1} + e_1\vec{i} + e_2\vec{j} + e_3\vec{k} \tag{4.1}$$

όπου

$$\vec{1} = (1,0,0,0)\ ,\ \vec{i} = (0,1,0,0)\ ,\ \vec{j} = (0,0,1,0)\ ,\ \vec{k} = (0,0,0,1) \tag{4.2}$$

η κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ (ο λόγος για τον αλλόκοτο συμβολισμό θα γίνει φανερός παρακάτω) τότε κάθε $\vec{p} \in S^3$ ορίζει **μονοσήμαντα** μία στροφή στον χώρο. Το σημαντικό βήμα προς την ανακάλυψη των τετρανύων σε σχέση με το ερώτημα του Hamilton, είναι η θεώρηση σύνθεσης στροφών στον χώρο και η αναζήτηση των αντίστοιχων παραμέτρων Euler. Συγκεκριμένα

έστω η στροφή με	πίνακα	A'	και παραμέτρους Euler	(e'_i)
-//-	-//-	A	-//-	(e_i)
και η σύνθεση τους	με πίνακα	$A'' = AA'$	-//-	(e''_i)

Τότε βάσει της αναπαράστασης (3.5") μίας στροφής συναρτήσει των (e_i) και μετά από πολύπλοκες αλλά στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις έχομε (βλ.[7] §I.9)

---

* Στην μορφή της §2, το ερώτημα δεν μπορούσε να είχε διατυπωθεί από τον Hamilton αφού τότε (1843) δεν υπήρχαν σαφώς διατυπωμένες οι έννοιες του σώματος, της ομάδας, αλλά ούτε και η θεωρία πινάκων που κατά πολύ απλουστεύει την όλη παρουσίαση. Αυτό δείχνει ακόμα περισσότερο πόσο δύσκολη και ιδιοφυής ήταν η σύλληψη της δομής των τετρανύων.

$$
\begin{aligned}
e''_0 &= e_0 e'_0 - e_1 e'_1 - e_2 e'_2 - e_3 e'_3 \\
e''_1 &= e_1 e'_0 + e_2 e'_3 - e_3 e'_2 + e_0 e'_1 \\
e''_2 &= e_2 e'_0 + e_3 e'_1 - e_1 e'_3 + e_0 e'_2 \\
e''_3 &= e_3 e'_0 + e_1 e'_2 - e_2 e'_1 + e_0 e'_3
\end{aligned}
\qquad (4.3)
$$

Η βασική παρατήρηση τώρα είναι οτι η (4.3) μας δίνει ένα τρόπο **πολ/μού** των στοιχείων του $\mathbb{R}^4$, που επιτρέπει να εξετάσομε το ερώτημα του Hamilton λεπτομερέστερα. Πράγματι, αν $\vec{p}$, $\vec{p}' \in \mathbb{R}^4$ τυχόντα

$$\vec{p} = e_0\vec{1} + e_1\vec{i} + e_2\vec{j} + e_3\vec{k} \;,\quad \vec{p}' = e'_0\vec{1} + e'_1\vec{i} + e'_2\vec{j} + e'_3\vec{k} \qquad (4.3')$$

και **ορίσομε** το γινόμενο τους

$$\vec{p}\,\vec{p}' \equiv \vec{p}'' = e''_0\vec{1} + e''_1\vec{i} + e''_2\vec{j} + e''_3\vec{k} \qquad (4.3'')$$

με τα $\{e''_i\}$ να δίνονται από την (4.3), τότε παίρνοντας ως $\vec{p}$, $\vec{p}'$ στοιχεία της κανονικής βάσης δείχνομε εύκολα οτι

1 ουδέτερο στοιχείο

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = -1 \qquad (4.4\text{i})$$

$$\vec{i}\,\vec{j} = -\vec{j}\,\vec{i} = \vec{k}\,,\quad \vec{j}\,\vec{k} = -\vec{k}\,\vec{j} = \vec{i}\,,\quad \vec{k}\,\vec{i} = -\vec{i}\,\vec{k} = \vec{j} \qquad (4.4\text{ii})$$

που δεν είναι άλλες από τις περίφημες σχέσεις του Hamilton για τον πολ/μό των τετρανύων. Αντίστροφα, γραμμική επέκταση του πολ/μού (4.4) των στοιχείων της βάσης οδηγεί στον πολ/μό (4.3") τυχόντων στοιχείων του $\mathbb{R}^4$. Ετσι έχομε οτι ο πολ/μός αυτός είναι **μη μεταθετικός**, δίνοντας στον $\mathbb{R}^4$ μία δομή μη μεταθετικού σώματος. Δηλαδή δίνομε τον

<u>Ορισμό 4.1</u>: Ο $(\mathbb{R}^4, +, .)$ με πρόσθεση εκείνη του $\mathbb{R}^4$ και πολ/μό που ορίζεται από την (4.4), είναι η δομή των τετρανύων και θα συμβολίζεται με H.

<u>Παρατηρήσεις</u>: Αν ως συζυγές του $\vec{p}$ στην (4.3') ορίσομε το

$$\vec{p}^{\,*} \equiv e_0\vec{1} - e_1\vec{i} - e_2\vec{j} - e_3\vec{k} \qquad (4.5)$$

και μέτρο του $\vec{p}$,

$$|\vec{p}| \equiv e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = \vec{p}\,\vec{p}^{\,*} \qquad (4.6)$$

τότε είναι απλό (Ασκηση) να δείξει κανείς οτι

(α) $(\vec{p}\,\vec{q})^* = \vec{q}^{\,*}\,\vec{p}^{\,*}$, $\quad |\vec{p}\,\vec{q}| = |\vec{p}||\vec{q}|$, $\quad \vec{p}^{\,-1} = \vec{p}^{\,*}/|p|^2$ (4.7)

(β) Το σύνολο $H_1 \equiv \{\, \vec{p} \in H : |\vec{p}| = 1 \,\}$ είναι πολ/κή υποομάδα του H

(γ) Το υποσύνολο του H $\{\, \vec{p} = e_0\vec{1} + e_1\vec{i} \;,\; e_0 \,,\, e_1 \in \mathbb{R} \,\}$ είναι σώμα **ισόμορφο** με το $\mathbb{C}$, πράγμα που εξηγεί και τον συμβολισμό για την κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

(δ) η απεικόνιση

$$H_1 \to SO(3) : e_0\vec{1} + e_1\vec{i} + e_2\vec{j} + e_3\vec{k} \to (e_0, e_1, e_2, e_3) \qquad (4.8)$$

είναι **ομομορφισμός** πολ/κών ομάδων (και μάλιστα επιμορφισμός - βλ. την παράγραφο πριν την (4.3)). Σε ποιές στροφές αντιστοιχούν τα στοιχεία της κανονικής βάσης (4.2); - ασκηση.

(ε) θεωρώντας τους πίνακες 3x3 της μορφής (3.5") χωρίς την συνθήκη (3.7) - σύνθεση στροφής και ομοιοθεσίας στον χώρο - έχομε οτι ο ομομορφισμός (4.8) είναι επιμορφισμός της πολ/κής ομάδας H - (0) στην ομάδα που παράγουν οι πίνακες αυτοί (συνθέσεις στροφών και ομοιοθεσιών).

Είναι σαφές οτι τα (γ), (δ) συνιστούν **αρνητική** απάντηση στο ερώτημα του Hamilton για δυο λόγους:

(i) ο πολ/μός στο H είναι μη μεταθετικός

(ii) ο ομομορφισμός (4.8) **δεν** είναι ισομορφισμός για τον λόγο που εξηγείται στην τελευταία παρατήρηση της §3.

Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πώς μπορεί να ξεπεραστεί η δυσκολία (ii), οδηγώντας σε βαθύτερη κατανόηση της ομάδας των στροφών στον χώρο και γενικεύοντας την Πρόταση 2.2 (πρβλ. Παρατήρηση (α) στο τέλος της §2). Από την άλλη η δυσκολία (i), που συνιστά και την βασικότερη καινοτομία του Hamilton κατά την ανακάλυψη των τετρανύων* - βλ. τα σχόλια στην §1 -, ειδομένη από την σημερινή σκοπιά, είναι αναμενόμενη, άρα και ανυπέρβλητη, δεδομένου οτι η ομάδα SO(3) είναι **μη μεταθετική** και ένας ισομορφισμός ομάδων διατηρεί την μεταθετικότητα (ή μη) της πράξης! (γενικότερα είναι απλό να δει κανείς οτι αφού SO(3) είναι μη μεταθετική, **κάθε** ομάδα G για την οποία υπάρχει επιμορφισμός επί της SO(3) είναι αναγκαστικά μη μεταθετική).

---

* Ας μη ξεχνάμε οτι πήρε πολύ χρόνο (περίπου 13 χρόνια!) στον Hamilton να αναγνωρίσει οτι η προσπάθεια απάντησης του ερωτήματος - στην ασαφή μορφή της §1 - απαιτούσε εγκατάλειψη της μεταθετικότητας του πολ/μού! ([1] §2.IV).

5. ΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ CAYLEY - KLEIN ΚΑΙ Η ΟΜΑΔΑ SU(2)

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πώς τα τετράνυα Η έδωσαν μία αρνητική απάντηση στο ερώτημα του Hamilton για τους δύο λόγους που εξηγήθηκαν στο τέλος της §4. Στην παράγραφο τούτη θα δούμε οτι είναι δυνατόν (i) να διατυπώσομε την Πρόταση 2.2 για το Η χρησιμοποιώντας πια "στροφές" στον **μιγαδικό** χώρο $\mathbb{C}^2$ (ii) να δώσομε μία **καταφατική** απάντηση στο ερώτημα του Hamilton, διατυπωμένο για τις "στροφές" στον $\mathbb{C}^2$, φυσικά χωρίς την απαίτηση της μεταθετικότητας του πολ/μού.

Αν θελήσομε να αποφύγομε την προφανέστερη ερμηνεία των παραμέτρων Euler στην (3.7), ως συντεταγμένων ενός σημείου της σφαίρας S^3 του $\mathbb{R}^4$ ακριβώς διότι όπως είδαμε στην §4 οδηγούμαστε στα τετράνυα Η με των οποίων τον λογισμό δεν είμαστε εξοικειωμένοι, τότε η ιδέα που **φυσιολογικά υποβάλλεται** από την σχέση (3.12) μεταξύ γωνιών και παραμέτρων Euler είναι η εισαγωγή των παραμέτρων Cayley - Klein (CK) (Cayley 1879, Klein 1875)

$$
\begin{aligned}
a &= \cos(\theta/2)\exp(i(\varphi+\psi)/2) \quad , \qquad & b &= \sin(\theta/2)\exp(i(\psi-\varphi)/2) \\
d &= a^* & c &= -b^*
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

οπότε με επιλογή του + στην (3.12) έχομε

$$
\left.\begin{aligned} a &= e_0 + ie_3 \\ \\ b &= e_1 + ie_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} e_0 &= (a+d)/2 \ , \quad e_1 = (b-c)/2 \\ \\ e_3 &= (a-d)/2i \ , \quad e_2 = (b+c)/2i \end{aligned}\right.
\tag{5.1'}
$$

$$
ad - bc = 1 \tag{5.2}
$$

Είναι θέμα στοιχειώδους άλγεβρας να δείξομε οτι βάσει της (5.1′) η αναπαράσταση (3.5") μίας στροφής στον χώρο γίνεται

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) & \frac{i}{2}(a^2-b^2+c^2-d^2) & -i(ab+cd) \\ \frac{i}{2}(-a^2-b^2+c^2+d^2) & \frac{1}{2}(a^2-b^2-c^2+d^2) & dc-ab \\ i(ac+bd) & db-ac & ad+bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5.3}
$$

Αν τώρα όπως στην §4 θεωρήσομε

την στροφή με πίνακα A′ και παραμέτρους CK (a′,b′,c′,d′)

την στροφή με πίνακα A και παραμέτρους CK (a,b,c,d)
και την σύνθεση τους -//- A"=AA' -//- (a",b",c",d")
τότε βάσει της αναπαράστασης (5.3) μίας στροφής συναρτήσει των παραμέτρων CK και μετά από πολύπλοκες αλλά στοιχειώδεις πράξεις, έχομε

$a'' = a'a + c'b \qquad b'' = ab' + bd'$

$c'' = ca' + dc' \qquad d'' = cb' + dd'$

που γράφεται υπό μορφή πίνακα*

$$\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Η (5.4) εξηγεί και την επιλογή των προσήμων στην (5.1)*. Ετσι οδηγούμαστε φυσιολογικά στην θεώρηση μιγαδικών πινάκων της μορφής

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

οι οποίοι έχουν αξιοσημείωτες ιδιότητες βλ. παρακάτω. Συγκεκριμένα αν T nxn μιγαδικός πίνακας με στοιχεία a_{ij} και ορίσομε τον συζυγή του T^+ με στοιχεία $b_{ij} \equiv a^*_{ji}$ τότε οι **παράμετροι Euler** (e_i) μιάς στροφής στον χώρο ορίζουν βάσει της (5.1') **αμφιμονοσήμαντα** έναν 2x2 μιγαδικό πίνακα T με

$$TT^+ = I \tag{5.6i}$$

$$\det T = 1 \tag{5.6ii}$$

Αντίστροφα, εύκολα δείχνομε (Ασκηση) οτι η (5.6) οδηγεί στην (5.5). Ετσι η (5.6) είναι το αντίστοιχο για τον χώρο, της σχέσης ορθογωνιότητας (2.3') για το επίπεδο.

Οι nxn πίνακες T που ικανοποιούν την (5.6i) λέγονται ορθομοναδιαίοι, έχουν ορίζουσα detT=±1 και αποτελούν πολ/κή ομάδα (γιατί;) που συμβολίζομε με U(n)**

---

* Από ιστορικής πλευράς αξίζει να αναφέρομε οτι οι Cayley και Klein θεώρησαν την (5.4) όχι υπό μορφή πινάκων αλλά ως σύνθεση σύμμορφων απεικονίσεων του C, $z \to z' = (az+b)/(cz+d)$, τους οποίους εισήγαγαν για την μελέτη της περιστροφικής κίνησης στερεού σώματος - βλ. [7] §I.12.

**Για n=1 είναι σαφές οτι $U(1)=\{z \in C: |z|=1\}$ η μοναδιαία περιφέρεια (βλ. §2).

Εκείνοι με ορίζουσα +1 αποτελούν υποομάδα της με σύμβολο SU(n) (από το Special Unitary group). Αν τώρα $\vec{x}\in\mathbb{C}^n$ και $\vec{x}' = T\vec{x}$ με T ορθομοναδιαίο τότε (Ασκηση)

$$|\vec{x}'| \equiv |T\vec{x}| = |\vec{x}| \tag{5.7}$$

όπου $|\vec{x}|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 \quad \forall\, \vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^n$

το συνηθισμένο μέτρο στον $\mathbb{C}^n$. Η (5.7) είναι το ανάλογο της διατήρησης του μήκους διανύσματος από τις στροφές στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή της (2.4), που αιτιολογεί την εικόνα των ορθομοναδιαίων πινάκων ως **"στροφών"** στον χώρο $\mathbb{C}^n$.

Τα παραπάνω ουσιαστικά αποδεικνύουν την

<u>Πρόταση 5.1:</u> Αν F = (T 2x2 μιγαδικός πίνακας: $T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$, $|a|+|b| \neq 0$)

τότε (α) $F\cup\{0\} \equiv F_0$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω **από το $\mathbb{R}$** ως προς τις συνήθεις πράξεις πινάκων, διάστασης 4

(β) η απεικόνιση (βλ. (5.1'))

$$e_0\vec{1} + e_1\vec{i} + e_2\vec{j} + e_3\vec{k} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

του H στο F_0 είναι **ισομορφισμός** διανυσματικών χώρων.

(γ) Η (5.8) επί πλέον ορίζει **ισομορφισμό** των ομάδων H^* και F καθώς και των H_1 και SU(2).

Η απόδειξη του (γ) περιέχεται στις εκφράσεις (5.4) και (4.3") για την αναπαράσταση της σύνθεσης στροφών συναρτήσει των παραμέτρων Euler καιCK αντίστοιχα. Η Πρόταση 5.1 είναι η γενίκευση της Πρότασης 2.2, που αναφέρθηκε στην αρχή της παραγράφου αυτής και δίνει μία καταφατική απάντηση στο ερώτημα του Hamilton, αν αναφερθούμε σε "στροφές" του $\mathbb{C}^2$ και χωρίς την απαίτηση της μεταθετικότητας του πολ/μού.

Για να γίνει σαφέστερο το περιεχόμενο της Πρότασης 5.1 θα διατυπώσουμε αναλυτικά τους αναφερόμενους ισομορφισμούς, συνοψίζοντας έτσι τα συμπεράσματα των §§4,5:

Εκφράζοντας τις παραμέτρους CK συναρτήσει των (e_i) (βλ. (5.1')) βρίσκομε την ακόλουθη βάση του F_0 που αντιστοιχεί στην κανονική βάση του H

1 → I ταυτοτικός 2x2 πίνακας

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &\rightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{j} &\rightarrow \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$k \to \sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

οι σ_j, $j=1,2,3$ είναι οι λεγόμενοι πίνακες του Pauli* και ο πολ/κός τους πίνακας εύκολα φαίνεται οτι είναι ο ίδιος με εκείνον των $\vec{1}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ στην (4.4), οπότε ο ισομορφισμός των πολ/κών ομάδων H και F_0, (5.8) δίνεται αναλυτικότερα

$$\vec{p} = e_0\vec{1} + e_1\vec{i} + e_2\vec{j} + e_3\vec{k} \;\to\; T = e_0I + e_1\sigma_1 + e_2\sigma_2 + e_3\sigma_3 \qquad (5.8')$$

Τέλος αφού οι ομάδες H_1, SU(2)είναι ισόμορφες και η (4.8) ορίζει έναν 2-1 **επιμορφισμό** της H_1 στην SO(3), το ίδιο ισχύει και για την SU(2) (τα τετράνυα p, -p ή οι πίνακες T, -T στην (5.8') ορίζουν την **ίδια** στροφή στον $\mathbb{R}^3$ - βλ. τελευταία παράγραφο της §3). Ομως είναι ενδιαφέρον να γράψομε αναλυτικά τον επιμορφισμό SU(2) $\to$ SO(3) καθ' όσον επιδέχεται μία συμπαγή και κομψή έκφραση, πράγμα που δεν ισχύει για τον επιμορφισμό $H_1 \to$ SO(3) - η αναλυτική του έκφραση είναι η (3.5") -. Συγκεκριμένα βάσει της έκφρασης (5.1) των παραμέτρων CK συναρτήσει των γωνιών Euler ένας 2x2 ορθομοναδιαίος πίνακας γράφεται

$$T = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv T_\psi T_\theta T_\varphi \qquad (5.10)$$

Η αναπαράσταση (5.10) της SU(2) ως γινόμενο 3 πινάκων είναι η αντίστοιχη της αναπαράστασης (3.11) των στοιχείων της SO(3) ως γινόμενο τριών στροφών. Η σύγκριση των σχέσεων που περιγράφουν τις στροφές στον $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{C}^2$, δηλαδή οι (3.11) και (5.10), οδηγεί σε ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις με τις οποίες τελειώνουμε το κείμενο αυτό:

(i) Οι πίνακες της μορφής T_ψ, T_θ, T_φ αντιστοιχούν επιμορφικά στους A_ψ, A_θ, A_φ αντίστοιχα, ορίζοντας επί πλέον και αντίστοιχες υποομάδες των SU(2) και SO(3)

---

*Ακριβέστερα τούτοι είναι οι $i\sigma_j$. Ο Pauli τις εισήγαγε το 1927 για να δώσει μαθηματική έκφραση στην έννοια του spin του ηλεκτρονίου που λίγο νωρίτερα (1925) είχε εισαχθεί ως φυσική έννοια από τους Goudsmidt και Uhlenbeck [3] §3.4, [5] σελ.112

(Ασκηση).

(ii) η εμφάνιση στην (5.10) των ψ/2, θ/2, φ/2 αντί των ψ,θ,φ της (3.11) είναι ο λόγος για τον οποίο δεν έχομε ισομορφισμό της SU(2) με την SO(3) (η ίδια στροφή ψ+2π, φ+2π, θ+2π, ορίζει τον πίνακα -T)

(iii) η αντιστοιχία T → A με T και A να δίνονται βάσει των (5.10), (3.11) αντίστοιχα, είναι η αναλυτική έκφραση του επιμορφισμού SU(2) → SO(3), δείχνοντας έτσι οτι οι γωνίες Euler τον εκφράζουν αμεσότερα από οτι οι παράμετροι Euler ή CK. Αυτό σχετίζεται με το οτι οι δύο ομάδες έχουν στενή σχέση ως ομάδες Lie και οι γωνίες Euler μπορούν να αποτελέσουν συντεταγμένες και για τις δύο. Κάτι τέτοιο όμως θα ξεπερνούσε τον στοιχειώδη χαρακτήρα του κειμένου εισάγοντας έννοιες από την τοπολογία και την διαφορική γεωμετρία.

Σε τούτο το κείμενο είδαμε πώς η προσπάθεια να γενικευθεί για τις στροφές στον χώρο η απλή **γεωμετρική** συσχέτιση μιγαδικών αριθμών και στροφών του επιπέδου οδήγησε φυσιολογικά σε συγκεκριμένα, μαθηματικώς σημαντικά παραδείγματα **αφηρημένων αλγεβρικών** εννοιών. Επί πλέον, η προσπάθεια αυτή έδειξε τις μεγάλες δυνατότητες που παρέχει η θεωρία πινάκων για συμπαγείς και κομψές μαθηματικές εκφράσεις, μεγιστοποιώντας έτσι την σαφήνεια της έκφρασης άρα και την πιθανότητα επίλυσης σημαντικών μαθηματικών προβλημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Crowe M.J., " A history of vector analysis", Dover (1985).
2. Goldstein H., "Classical Mechanics", Addison - Wesley (1980).
3. Jammer M., "The conceptual development of quantum mechanics", McGraw - Hill (1966).
4. Loria G., " Ιστορία των μαθηματικών", τόμος 3, Εκδοση της Ε.Μ.Ε. (1974).
5. Pauli W., "General principles of quantum mechanics", Springer (1980).
6. Wills A.P., "Vector analysis with an introduction to tensor analysis", Dover (1958).
7. Whittaker E.T., "Analytical dynamics of particles and rigid bodies", Cambridge University Press, (1937, 1970).