Author: Σπύρος Καλομητσίνης

Title: Οι Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές σα μέσο για την αύξηση της ικανότητας των μαθητών στην Επίλυση Προβλημάτων.

Abstract: Άρθρο για την επίλυση προβλημάτων μέσω Η/Υ.

Creator: HDML

ΟΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ ΣΑ ΜΕΣΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ ΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ *

Σπύρος Καλομητσίνης

Έχει επανελημένα διακηρυχθεί σε συνέδρια Μαθηματικής Παιδείας, ότι η "επίλυση προβλήματος" (problem-solving) πρέπει να αποτελέσει το κύριο θέμα για τη Διδακτική των Μαθηματικών στά ερχόμενα χρόνια. Λέγοντας επίλυση προβλήματος, εννοούμε την απόδειξη θεωρημάτων ή την λύση πρωτότυπων,έξυπνων προβλημάτων από οποιοδήποτε κλάδο των Μαθηματικών ή ακόμη και από άλλες επιστήμες. Σ' αυτό το συνέδριο είδαμε να παρουσιάζονται πολλές εργασίες, πολλές έρευνες σχετικές με την επίλυση προβλήματος και τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές. Πολύς λόγος έγινε μέχρι τώρα και πολλοί αντιπρόσωποι από διάφορες χώρες της ΕΟΚ παρουσίασαν όπως είδαμε εργασίες με ρομπότ κ.λ.π., και όπως φαίνεται έχει σημειωθεί ικανοποιητική πρόοδος. Όμως, επιτρέψτε μου να πω, ότι μάλλον έγινε κατάχρηση του όρου "επίλυση προβλήματος" (problem-solving). Θα πρέπει να γίνη μια διάκριση — άλλο είναι η **επίλυση προβλήματος** και άλλο η **εξάσκηση**. Και για να κάνουμε τα πράγματα πιο συγκεκριμένα. Παρουσιάστηκαν εργασίες για τόν τρόπο εξάσκησης μικρών μαθητών, όπου προσπαθούν κινώντας μικρά ρομπότ (χελώνες), να τα οδηγήσουν σε ορισμένο σημείο (τη φωλιά τους). Αυτό είναι μιά καλή εξάσκηση, τα παιδιά ασκούνται σε απλά προγράμματα, στη γλώσσα Logo κ.λ.π. Όμως δεν κάνουν καμιά πρωτοτυπία, δεν λύνουν κανένα πρόβλημα διότι η όλη διαδρομή που θα ακολουθήσει το ρομπότ είναι από την αρχή ορατή. Το πραγματικό πρόβλημα είναι αυτό στο οποίο δεν ξέρω τον αλγόριθμο, δεν ξέρω από πρίν τι πρέπει να κάνω. Στο πραγματικό πρόβλημα πρέπει να δοκιμάσουμε, να μαντέψουμε, να σκεφτούμε, να ξαναδοκιμάσουμε, να κάνουμε ανάλυση, να βρούμε κάποιες διαφορές ζητούμενων και δεδο-

Το άρθρο αυτό αποτελεί περίληψη της ομιλίας που έγεινε από τον γράφοντα στο Πανεπιστήμιο της Λιέγης τον Ιούλιο του 1985. Είχε οργανωθεί συνέδριο από την ΕΟΚ με θέμα "Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές και εκπαίδευση".

μένων, κ.λ.π. κ.λ.π. Δεν είναι φυσικά ο ρόλος της εξάσκησης δεύτερος. Ίσα-ίσα που η εξάσκηση παίζει σπουδαίο ρόλο σ' οτιδήποτε μαθαίνουμε π.χ. πράξεις, προγραμματισμός Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, οδήγηση αυτοκινήτου κ.λ.π. Όμως δε θάπρεπε να μείνουμε μόνο στην εξάσκηση και να εξαντλήσουμε εκεί τον ρόλο των Η.Υ. στη Διδακτική.

Σήμερα, οι Γνωστικοί ψυχολόγοι, στην Αμερική κυρίως, χρησιμοποιούν τους Η.Υ σαν εργαλείο για την ψυχολογία. Είναι κάτι σαν τα Μαθηματικά για τη φυσική. Δουλεύοντας σε γλώσσα LISP κυρίως, και με βάση τα δίκτυα (networks) για τη λειτουργία του εγκεφάλου, έχουν κάνει ένα γερό ξεκίνημα για μια στέρεη θεμελίωση της ψυχολογίας. Με βάση αυτή την πρόοδο, χωρίς κάν να μπώ σε λεπτομέρειες, θα προσπαθήσω με πολύ αδρά βήματα να δείξω πως μπορεί να γίνει έρευνα για τη επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων με Η.Υ θα προσπαθήσω να δείξω τη θετική αλληλεπίδραση, στην επίλυση προβλήματος, ανάμεσα σε ανθρώπους-λύτες και Η.Υ.-λύτες.

Από πολύ παλιά προσπάθησε ο άνθρωπος να βρεί μεθόδους για να λύνει τα διάφορα προβλήματα του. Για τα Μαθηματικά προβλήματα, οι Αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν τήν ανάδρομη πορεία (αναλυτική μέθοδο) και την άτοπο απαγωγή. Πολλοί άλλοι προσπάθησαν μέσα στους αιώνες να βρούν γενικές και ειδικές μεθόδους για τα διάφορα προβλήματα — Καρτέσιος, Λαϊμπνιτσ, Μπολτσάνο. Πρωτοπόρος στην έρευνα πάνω στο τομέα της επίλυσης προβλήματος ήταν ο Polya, για τον εικοστό αιώνα. Η έρευνα πήρε μεγάλη έκταση μετά το 1956, και σήμερα έχει αρχίσει να αποδίδει καρπούς για τη Διδακτικη των Μαθηματικών. Η μεγαλύτερη πρόοδος έχει σημειωθεί τα τελευταία δέκα χρόνια. Μέσα στην όλη αυτή εξέλιξη, θα πρέπει να σημειώσουμε ορισμένα αρνητικά σημεία που έφεραν σε διάσταση πολλές φορές — παιδαγωγούς και ψυχολόγους από τη μια μεριά και δασκάλους από την άλλη. Πολλές φορές, παιδαγωγοί και ψυχολόγοι μίλησαν γιά την ανάγκη διαλόγου στην τάξη, για την αξία της επαναανακάλυψης, έδειναν και κάποιες γενικές συμβουλές για τόν τρόπο διδασκαλίας. Να μην λύνει ο δάσκαλος το πρόβλημα, αλλά να οδηγεί τους μαθητές ώστε μόνοι τους να ανακαλύψουν τη λύση. Αυτό φυσικά είναι μιά ευχή,πως όμως θα πραγματοποιηθεί στην τάξη; Για να βρεθεί η λύση πολλών προβλημάτων χρειάστηκαν χρόνια, αιώνες πολλές φορές. Πως μπορεί να "αναπαραχθεί" αυτή η διαδικασία μέσα στην ταξη; Αλλά και για απλούστερα προβλήματα, πως είναι δυνατόν να οδηγήσουμε τους μαθητές να τα λύσουν μόνοι τους; Ενοούμε εδώ φυσικά προβλήματα πρωτότυπα, όχι ρουτίνας όπως π.χ. Να λυθεί η τάδε β΄ βαθμού εξίσωση. Η αδυναμία

να βρεθούν αποδοτικές οδηγίες, ώστε κατάλληλα να βοηθεί ο δάσκαλος τους μαθητές για την επαναανακάλυψη μιας λύσης, οδήγησε σε διάσταση όπως είπαμε τους δασκάλους με αυτούς που πρότειναν τέτοια συστήματα. Η κατάσταση μέσα στη τξη, είναι συχνά πολύ διαφορετική από ότι την φαντάζεται ο οποιοσδήποτε μη δάσκαλος στο γραφείο του. Όμως η κατάσταση αυτή, αρχίζει να αλλάζει τα τελευταία χρόνια, με την εξέλιξη της πληροφορικής. Σήμερα πια δεν προτείνονται μέθοδοι από το γραφείο. Πρώτα δοκιμάζεται η λειτουργικότητα τους με Η.Υ. Αν κάποιος ισχυρίζεται ότι βρήκε μια μέθοδο για την επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων, θα πρέπει να την κάνει πρόγραμμα και ο Η.Υ. να είναι σε θέση να λύνει προβλήματα πρωτότυπα. Αν αποτύχει αυτό το τέστ, τότε η μέθοδος ή πρέπει να απορριφθεί ή να επανεξεταστεί, να τροποποιηθεί. Σε περίπτωση που πετύχει το τέστ, τότε ο Η.Υ. μπορεί να γίνει πολύτιμος βοηθός του δάσκαλου. Οι μέθοδοι που έχουν περάσει με επιτυχία τα τέστ του Η.Υ. σήμερα, αλλάζουν κατά κάποιο ποσοστό τον τρόπο που εμείς προσεγγίζουμε ένα πρόβλημα. Εκεί έγκειται και η επιτυχία τους. Έτσι, οι μαθητές βοηθιούνται αν μπορέσουν να δούν ένα μοντέλο Π.χ. έναν Η.Υ.να ενεργεί με τον τρόπο που θέλουμε εμείς να τους διδάξουμε να ενεργούν. Βλέποντας οι μαθητές πως ένας Η.Υ. μπορεί να λύνει πρωτότυπα προβλήματα (να αποδεικνύει θεωρήματα κ.λ.π.), ή ακόμη καλύτερα προγραμματίζοντας οι ίδιοι τον Η.Υ., αποκτούν σιγά-σιγά βαθειά γνώση στη διαδικασία της Μαθηματικής ανακάλυψης. Έτσι η άσκηση στον προγραμματισμό Η.Υ. είναι το καλύτερο που έχουμε να κάνουμε γιά τους μαθητές μας. Οι μαθητές να μάθουν να αναλύουν μιά πορεία σε μικρά βήματα. Πρέπει να μάθουν πως βασικά λειτουργεί ένας Η.Υ. Να μάθουν να εκτιμούν πότε μιά διαδικασία θα μπορούσε να εξομοιωθεί με ένα πρόγραμμα Η.Υ. και πως, ανεξάρτητα αν το σύστημα που κατέχουν έχει μηχανικές ανεπάρκειες (μικρή μνήμη κ.λ.π.). Οι μαθητές δεν θα χρειάζεται οπωσδήποτε να κατασκευάσουν κάθε φορά πρόγραμμα Η.Υ. για την απόδειξη ενός θεωρήματος, αλλά θα πρέπει να είναι σε θέση να χαράξουν τη σωστή πορεία για ένα τέτοιο πρόγραμμα, να κάνουν την ανακάλυψη όπως λέμε. Η προσπάθεια να κάνουμε μια τέτοια ανάλυση, και η εξομοίωση από μας σε αδρά βήματα της λειτουργίας ενός Η.Υ., συχνά οδηγεί στήν λύση του προβλήματος μας. Αυτά που λέγονται εδώ μόνο μέσα απο παραδείγματα μπορούν να γίνουν πλήρως κατανοητά. Θα παρουσιάσουμε περιληπτικά την επίλυση ενός προβλήματος με μια μέθοδο, τη λεγόμενη σπειροειδή μέθοδο [2], όπως αυτή μπορεί να γίνει είτε με Η.Υ., είτε διαλογικά μέσα στην τάξη. Η μέθοδος φυσικά έχει περάσει με

επιτυχία τα σχετικά τέστ με Η.Υ., μέσα από τις αρχές της Γνωστικής ψυχολογίας, και φυσικά δεν είναι η μοναδική.

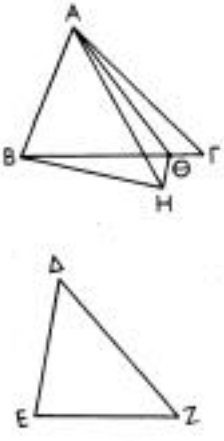
Πρόβλημα: (Θεώρημα Ευκλείδειας Γεωμετρίας).

"Δίνονται δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, τέτοια ώστε $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ και $\hat{A} > \hat{\Delta}$. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma > EZ$"

Απόδειξη

Η παρακάτω απόδειξη περιέχεται στα σχολικά βιβλία:
Κατασκευάζουμε δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ όπως τα ζητάει η εκφώνηση.

Κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΑΒΗ, ίσο με το ΔΕΖ (σχήμα 1) (ή κατά την κλασσική Ευκλείδεια: Μεταφέρουμε το ΔΕΖ στη θέση του ΑΒΗ, όπου η γωνία $\hat{\Delta}$ θα καταλάβει μέρος της Α αφού $\hat{\Delta} < \hat{A}$. Τέτοιες μεταφορές — μικρότερου πάνω στο μεγαλύτερο κ.λ.π. έκαναν οι Αρχαίοι Ελληνες. Με την αυστηρή θεμελίωση όμως από τον Hibert αντικαταστάθηκαν οι μεταφορές κ.λ.π., έτσι ώστε έγινε αυστηρότερη σαν επιστήμη η Γεωμετρία, έχασε όμως από την απλοτητά της και την ομορφιά που παρουσίαζε μέσα στην τάξη. Για την διδασκαλία μέσα στην τάξη, σε μικρούς μαθητές, πρέπει να χρησιμοποιούμε τον τρόπο που εφάρμοζαν οι Αρχαίοι Ελληνες, μοναδικό σε ομορφιά και απαράμιλλο σε διδακτική αξία).



Σχ. 1

Κατασκευάζουμε την διχοτόμο ΑΘ της γωνίας ΗΑΓ. Φέρνουμε την ΗΘ. Τα τρίγωνα ΑΘΗ και ΑΘΓ είναι ίσα γιατί έχουν: $AH = A\Gamma$, ΑΘ κοινή και $H\hat{A}\Theta = \Theta\hat{A}\Gamma$.

Άρα $\Theta H = \Theta\Gamma$.

Τώρα εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο ΒΗΘ έχουμε: $BH < B\Theta + \Theta H$ ή λογω της $\Theta H = \Theta\Gamma$,

$$BH < B\Theta + \Theta\Gamma = B\Gamma.$$

Η απόδειξη αυτή είναι εξαιρετικά δύσκολο να βρεθεί από τους μαθητές. Πως να σκεφτεί π.χ. Να κατασκευάσουν το ΑΒΗ, να διχοτομήσουν την $H\hat{A}\Gamma$ κ.λ.π.;

Ας υποθέσουμε ότι οι μαθητές μα έχουν μάθει την σπειροειδή μέθοδο, και ότι εμείς εδώ τους κάνουμε ένα ακόμη παράδειγμα εφαρμογής της. (Για τους αναγνώστες του αρθρου, μέσα από τη διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου εδώ, ελπίζουμε να γίνει κατανοητή) — Απευθυνόμαστε στους μαθητές:

"Λοιπόν, αν υποθέσουμε ότι τώρα εδώ είχαμε έναν Η.Υ. που "ήξερε" καλά τη σημερινή μέθοδο. Πως θα προχωρούσε; Ο Η.Υ. ποτέ δεν "εμπνέεται", ούτε "διστάζει" όμως, ούτε

χρόνο χανει απλώς κοιτάζοντας το πρόβλημα. Ο Η.Υ. είναι ακριβής, αυστηρός, πειθαρχημένος — εντούτοις έχει πολλές ιδέες για κάθε πρόβλημα. Οι άνθρωποι πολλές φορές δυσκολεύονται στο να βρούν καλές ιδέες για την λύση, Οι Η.Υ.όμως τα καταφέρνουν!! Γιατί οι Η.Υ. δεν διστάζουν στο να ακολουθούν τη σπειροειδή μέθοδο.

Εμπρός, λοιπόν, ας μιμηθούμε τους Η.Υ. (Αν οι μαθητές μας είναι μικροί, με μικρή πείρα, πιθανότατα να κολλήσουν εντελώς με το πρόβλημα που δώσαμε. ακριβώς για να τους ασκήσουμε, αφού τους αφήσουμε πρώτα να προσπαθήσουν λίγο, κάνουμε τα περακάτω βήματα στόν πίνακα συνεργαζόμενοι μαζί τους. Τους αφήνουμε μόνους κάθε λίγο τους ενθαρύνουμε όταν κολλάνε, τους υπενθυμίζουμε συχνά τους Η.Υ.

Λοιπόν, τι θα έκανε τώρα ο Η.Υ.; Είναι μια χοντρική εξωμοίωση της λειτουργίας του Η.Υ. Οι μαθητές, συχνά, " διστάζουν " να κάνουν μερικά από τα επόμενα βήματα. Οι άνθρωποι γενικά αποφεύγουν να κάνουν "μη αναγκαίες" δοκιμές, όμως οι Η.Υ. δε διστάζουν — πρόκειται για μιά θεμελιώδη διαφορά [1]. Η άνθρώπινη ευφυΐα, συχνά γίνεται παγίδα για μας: Δεν μας αφήνει να κάνουμε κάποιες δοκιμές, κάποια βήματα, που όμως αργότερα, όταν μας δοθεί η λύση βλέπουμε ότι προς τα κεί βρισκότανε η λύση. Γι αυτό συχνά ακούμε: "Αχ αυτό το ήξερα, γιατί δεν το έκανα;". Αυτο εννοούσαμε προηγουμένως που είπαμε ότι οι μέθοδοι "αλλάζουν κατά κάποιο ποσοστό τον τρόπο που εμείς προσεγγίζουμε ένα πρόβλημα").

Βήμα 1

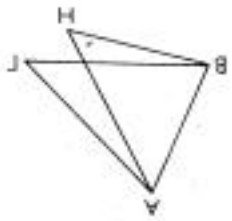
Ας δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε το πρώτο μέρος της σπειροειδούς μεθόδου. Μιλάει για απλή περιγραφή, για πρώτες διασαφηνίσεις πάνω στα στοιχεία της κάθε εκφώνησης.

Σας υπενθυμίζω ότι τα πάντα έχουν ενεργοποιηθεί κατά τη μέθοδό μας, π.χ. Ο ορισμός ανίσων γωνιών, έστω $\hat{\Delta} < \hat{A}$, στη σπειροειδή μέθοδο έχει πάρει τη μορφή μιας διαδικασίας "αν..., τότε ....". Και συγκεκριμένα το $\hat{\Delta} < \hat{A}$, ο Η.Υ. αυτόματα μετατρέπει στην κίνηση: θέτει τη γωνία Δ πάνω στην $\hat{A}$ όπου η $\hat{\Delta}$ καταλαμβάνει μέρος τη Α. (Άλλο παράδειγμα ενεργοποίησης στην Άλγεβρα: Αν στο πρώτο βήμα της σπειροειδής μεθόδου, συναντήσει ο Η.Υ. στο χώρο του δεδομένου προβλήματος δυο στοιχεία π.χ. "α" "ο", τότε θα ενεργοποιήσει ιδιότητες και θα γράψει:

α = α	(ανακλαστική)
ο = ο	(ανακλαστική)
α + ο = α	ουδέτερο στοιχείο
ο = α = α	ουδέτερο στοιχείο

Δοκιμάστε στις τάξεις όπου διδάσκεται όταν οι μαθητές σας κολλήσουν εντελώς μπροστά σε ένα πρόβλημα, προτιμούν να κάθονται και να κοιτάνε, παρά να προβαίνουν σε τέτοιες διασαφηνήσεις, που όμως συχνά περιέχουν χρήσιμες ιδέες για τη λύση. Η άριστη γνώση της σπειροειδούς μεθόδου και η εξίσωση της λειτουργίας του Η.Υ. θα τους ωθεί πρός τη σωστή κατεύθυνση). "Μεταφέρουμε λοιπόν το τρίγωνο ΔΕΖ στη θέση ΑΒΗ (σχήμα 2). Μέχρις εδώ εφαρμόσαμε το πρώτο υποβήμα του βήματος 1 της μεθόδους μας. Τα άλλα υποβήματα θα εφαρμόζονται στους επόμενους κύκλους της σπειροειδούς μεθόδου, αν χρειαστεί, γιατί αν εφαρμοστούν όλα τώρα, ίσως καταλήξουμε σε επικίνδυνους εμπλουτισμούς του χώρου του προβλήματος μας.

Σχ. 2



Βήμα 2

Ξεφυλλίστε προσεκτικά το βιβλίο σας από την αρχή (αντίστοιχα ο Η.Υ. ανατρέχει σειριακά στη μνήμη όπου έχει τοποθετηθεί προσεκτικά όλη η θεωρία) και βρείτε ποιά θεωρήματα ή ιδιότητες σχετίζονται με το πρόβλημα μας. Ποιά έχουν κάποια κοινά στοιχεία. Τώρα έχουμε να αποδείξουμε ότι:

$$ΒΗ < ΒΓ.$$

Σε λίγο τρία πράγματα σχετικά με το πρόβλημα μας επισημαίνονται:

(α) Η μεταβατική ιδιότητα: $α < 0, β > γ \Rightarrow α > γ$
(β) Αν α,β,γ, είναι πλευρές τριγώνου, τότε $α < β + γ$ κ.λ.π.
(γ) Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} > \hat{B}$, τότε $α > β$ και αντίστροφα

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $ΒΗ < ΒΓ$. Ποιό από τά (α), (β), (γ) είναι "πληρέστερα" στο πρόβλημα μας; Κοιτάξτε τα ένα-ένα προσεκτικά:

Το (α) έχει ανάλογο συμπέρασμα, $α > γ$. Εμείς θέλουμε να αποδείξουμε ότι $ΒΓ > ΒΗ$. Έχει όμως στις υποθέσεις δυο ανισότητες ευθυγράμμων τμημάτων. Υπάρχει λοιπόν μια διαφορά που θα έπρεπε να καλυφτεί, δυό ανισοτήτων $α > β$, $β > γ$.

Ας έλθουμε στο (β). Έχει διαφορές στο ζητούμενο και στα δεδομένα.

Ας δοκιμάσουμε το (γ). Έχουμε ανάλογο συμπέρασμα $α > β$ (ανάλογο με το $ΒΓ > ΒΗ$) και μια διαφορά, την $Α > Β$. Φαίνεται ότι τούτο είναι προτιμότερο.

Ας αρχίσουμε την κάλυψη διαφορών. Προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι $ΒΓ > ΒΗ$ αφού εφαρμόσουμε το θεώρημα

(γ). Τι λείπει; Λείπει μια πλευρά για να σχηματιστεί τρίγωνο. Κατασκευάστε τη (σχήμα 3).

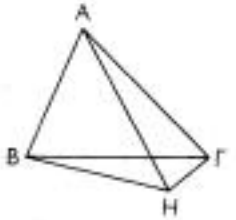
Τι αρκεί να αποδειχτεί τώρα;

Ασφαλώς πρέπει να αποδείξουμε ότι $B\hat{H}\Gamma > B\hat{\Gamma}H$

Αυτό είναι το υποπρόβλημα — Να αποδείξουμε στό σχήμα μας, ότι $B\hat{H}\Gamma > B\hat{\Gamma}H$.

Επειδή το υποπρόβλημα είναι νέο πρόβλημα, η σπειροειδής μέθοδος μα παραπέμπει στις ευρετικές. Η πρώτη ευρετική στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η ανάδρομη πορεία (αναλυτική μέθοδος).

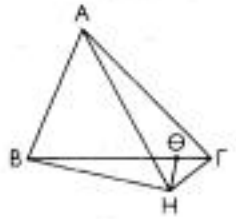
Ας δοκιμάσουμε.



Σχ. 3

Βήμα 3

Γιά να είναι $B\hat{H}\Gamma > B\hat{\Gamma}H$, αρκεί η $B\hat{\Gamma}H$ να καταλαμβάνει ένα μέρος της $B\hat{H}\Gamma$ αν τοποθετηθεί επάνω. Έτσι, φέρνουμε την ΘΗ ώστε $\Theta\hat{H}\Gamma = \Theta\hat{\Gamma}H$ (σχήμα 4).



Σχ. 4

Βήμα 4

Ποιό είναι το επόμενο ανάδρομο βήμα; Να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο Θ πάνω στη ΒΓ ώστε $\Theta H = \Theta\Gamma$.

Βήμα 5

Ανάδρομο βήμα; Έχουμε $\Theta H = \Theta\Gamma$. Όταν ο Η.Υ. "κολλάει" εντελώς, καταφεύγει πάλι στη μέθοδο της περιγραφής, μέρος της οποίας ήταν το βήμα 1 (γιαυτό λέγεται "σπειροειδής μέθοδος"). Ανατρέχοντας γρήγορα στα "αν...., τότε..." επισημαίνει ότι το $\Theta H = \Theta\Gamma$, έχει ισοδύναμη έκφραση: Το Θ κείται πάνω στη μεσοκάθετη της ΜΓ**

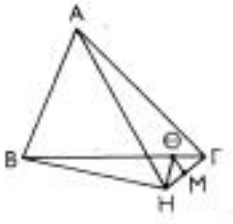
Βήμα 6

Ανάδρομο βήμα;

Αρκεί η μεσοκάθετη της ΗΓ να τέμνει την ΒΓ, όχι την προεκτασή της.

Αρκεί η μεσοκάθετη ΜΘ, να μην βγαίνει αριστερά του Β (σχήμα 5)

(Έστω ότι κολλήσαμε εδώ).



Σχ. 5

Βήμα 7

Η σπειροεισής μέθοδος, σέ ένα από τα βήματα της, όταν

** Η σειρά με την οποία μπαίνουν τα θεωρήματα στή μνήμη του Η.Υ. δεν είναι κατ' ανάγκη η σειρά του σχολικού βιβλίου. Εδώ έχει γίνει μερική αναδιάταξη, με την αυστηρή προϋπόθεση όλα τα επόμενα να μπορείνα αποδειχθούν από τα προηγούμενα.

ερχόμαστε σε αδιέξοδο, ελέγχει αν έγινε πλήρης χρήσης όλων των δεδομένων.

Ελέξτε αν πράγματι χρησιμοποιήσαμε όλα τά δεδομένα. Πάρτε τα ένα-ένα.

$AB = \Delta E$ χρησιμοποιήθηκε
$\hat{A} > \hat{\Delta}$ χρησιμοποιήθηκε
$A\Gamma = \Delta Z$ ή $A\Gamma = AH$ — όχι δεν έχει χρησιμοποιηθεί.

Μήπως αυτό λύνει το πρόβλημα μας;

Το ΑΗΓ είναι ισοσκελές, άρα η μεσοκάθετος ΜΘ θα διχοτομεί την ΗΑΓ, άρα δεν πηγαίνει αριστερα του Β. **Η απόδειξη τελείωσε**. Βρήκαμε μια διαφορετική απόδειξη από αυτήν που περιέχουν τα σχολικά βιβλία*. Όμως τώρα, με την παρατήρηση ότι η ΜΘ είναι και διχοτόμος της $H\hat{A}\Gamma$, ξαναβρίσκουμε αν συνεχίσουμε και την απόδειξη των σχολικών βιβλίων. Μια απόδειξη που ίσως βασάνιζε τους μαθητές επι ημέρες, και χωρίς αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί σε λίγα λεπτά.

Απεριόριστο αριθμό απο προβλήματα μπορούμε να αντιμετωπίζουμε με την μέθοδο που αναφέραμε προηγουμένως. Εφαρμόστε τη σε δικά σας προβλήματα, σε οποιαδήποτε προβλήματα. Για την πλήρη βέβαια κατανόηση της μεθοδου καθώς και άλλων αντιστοίχων μεθόδων που έχουν ελεχθεί τα τελευταία χρόνια με Η.Υ., χρειάζονται ολοκληρα σεμινάρια, όπου θα γίνονταν πολλά παραδείγματα και πολύ συζήτηση. Γιατί η επίλυση προβλημάτων δεν είναι καθόλου εύκολη διαδικασία, και η κάθε μέθοδος χρειάζεται πολλή εξάσκηση για να λέμε ότι έγινε κατανοητή. Τελειώνοντας, επιρέψτε μου να πω, ότι οι Η.Υ. με τον τρόπο εφαρμογής τους που αναπτύξαμε γιά την επίλυση προβλημάτων θα μπορούσαν να γίνουν ένας παράδεισος γιά τη Διδακτική των Μαθηματικών. Είναι το δυναμικότερο εργαλείο της ψυχολογίας με το οποίο πειθαρχείται η σκέψη, και έτσι βοηθείται ο δάσκαλος να μειώνει τα "κενά" που συχνά παρουσιάζονται σε κάθε μάθημα.

Βιβλιογραφία

1. Spyrow Kalomitsines "Two methods for sobving problems". Joyrnal "Educational studies in Mathematics" Vol, 14, 1983.
2. Spyrow Kalomitsines "The spiral method for solving proble-s". International Joyrnal of Mathematical Education in Science and Techuology, 1985, Vol.16, No.4

*** Με μικροαλλαγές στην πορεία ή στην κατασκευή του προγράμματος του Η.Υ. μπορεί να βρούμε κατ' ευθείαν την απόδειξη των σχολικών βιβλίων, ή ακόμα και άλλες διαφορετικές αποδείξεις.