Author: Σταύρος Παπασταυρίδης

Title: Πιθανότητα: Ιστορία, Θεωρία και Πράξη

Abstract: Ιστορική αναδρομή στη θεμελίωση της θεωρίας των Πιθανοτήτων. Γεωμετρικό παράδειγμα.

Creator: HDML

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ: ΙΣΤΟΡΙΑ, ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΗ

Σταύρος Παπασταυρίδης
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Για να μπορέσει να καταλάβει κανείς σε βάθος, έναν κλάδο της επιστήμης, είναι απαραίτητο να μάθει την ιστορία του. Εννοούμε την ιστορία των ιδεών και όχι βιογραφικές «λεπτομέρειες» των επιστημόνων που το ανέπτυξαν. Τα σύγχρονα βιβλία δίνουν μια «ωραιοποιημένα» παραμορφωμένη εικόνα. Όλα είναι γραμμένα με τάξη, έχουν εξομαλυνθεί όλες οι δυσκολίες. Σήμερα, θεμελιώνουμε την θεωρία των Πιθανοτήτων, με τα Αξιώματα του A.N. Kolmogorov (1933), που θα τα δούμε σε συντομία, πιο κάτω. Τα αξιώματα και οι πρώτες συνέπειες τους φαίνονται πολύ στρωτά, σχεδόν προφανή. Η εξωτερική αυτή ηρεμία κρύβει τον αγώνα πολλών γενεών Μαθηματικών για να φθάσουν μέχρι αυτό το σημείο, και το κυριότερο, κρύβει το βαθύτερο νόημα αυτών των αξιωμάτων, την σύνδεση τους με τον κόσμο που μας περιβάλλει, και την οργανική τους θέση μέσα στον κορμό της Μαθηματικής Επιστήμης αλλά και ως ανθρώπινης γνώσης γενικότερα. Όποιος θέλει να δει την ιστορία των πιθανοτήτων σε κάποιο βάθος θα πρέπει να συμβουλευθεί το κλασσικό σύγγραμμα του Todhunter, που καλύπτει την ιστορία μέχρι το 1865 και το νεώτερο σύγραμμα του Maistrov, που φθάνει μέχρι τον Kolmogorov. Εμείς εδώ μια σύντομη σκιαγραφία θα κάνουμε της εξέλιξης των ιδεών των Πιθανοτήτων, που έχει σκοπό να βοηθήσει την καλλίτερη κατανόηση αξιωματικού σχήματος του Kolmogorov.

Ιδέες που σχετίζονται με την Θεωρία των Πιθανοτήτων, βρίσκει κανείς πολύ παληά στην ιστορία. Όμως, σαν ανεξάρτητος κλάδος αρχίζει να εμφανίζεται από τον 17ο αιώνα. Σε πολλά Μαθηματικά βιβλία βλέπει κανείς τον ισχυρισμό ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων έχει τις ρίζες της στο χαρτοπαίγνιο και άλλα τυχερά παιγνίδια. Ο Maistrov αρνείται αυτή την ερμηνεία και αποδίδει την ανάπτυξη της θεωρίας των Πιθανοτήτων τον 17ο αιώνα, στις ανάγκες Ασφαλιστικών υπολογισμών που προήλθαν από την ανάπτυξή του του εμπορίου και των οικονομικών συναλλαγών καθώς και στις ανάγκες

των φυσικών επιστημών σχετικά με την Θεωρία των Σφαλμάτων. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι σήμερα η ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων, ουσιαστικά δεν έχει καμμιά σχέση με τα τυχερά παιχνίδια. Όμως και τότε και τώρα χρησιμοποιείται «χαρτοπαικτική» ορολογία στην διατύπωση πολλών προβλημάτων πιθανοτήτων, για λόγους διδακτικούς και μεθοδολογικούς, όπως επίσης διότι πολλές φορές και η λύση πολλών προβλημάτων διατυπώνεται καλλίτερα στην ορολογία τυχερών παιχνιδιών, η οποία προϋπάρχει και είναι κάπως αρκετά γνωστή και είναι αρκετά ευέλικτη.

Τα διάφορα τυχερά παιχνίδια, είτε αυτό σχετίζεται με ζάρια ή με ρουλέττα ή κάποιο παιχνίδι τράπουλας, έχουν κάποια γενικά χαρακτηριστικά, που τα αναφέρουμε πιο κάτω.

(α) Η εκτέλεση του παιχνιδιού δίνει κάποιο συγκεκριμένο **Εξαγόμενο**. Σε παιχνίδι με ζάρια, το εξαγόμενο αυτό εκφράζεται με τις έξη πλευρές του κύβου, στην ρουλέττα εκφράζεται με τις 37 θέσεις της ρουλέττας, στα χαρτοπαικτικά παιχνίδια εκφράζεται με τα 52 χαρτιά της τράπουλας.

(β) Το παιχνίδι έχει κάποια **Τυχαιότητα**. Εάν το παιχνίδι παίζεται σωστά, δεν πρέπει να είναι δυνατόν να προβλέψει κάποιος το ποιο θα είναι το εξαγόμενο μιας συγκεκριμένης εκτέλεσης του παιχνιδιού. Έτσι, αν ρίξουμε ένα ζάρι, και αν η ρίψη γίνει «τυχαία», τότε δεν θα μπορεί κανείς να προβλέψει το ποιά πλευρά του ζαριού θα εμφανισθεί, η αν επιλέξουμε «τυχαία» ένα χαρτί από μια τράπουλα, δεν θα μπορεί κανείς να προβλέψει το ποιο χαρτί επιλέγει κλπ.

(γ) Η απαίτηση της Τυχαιότητας, συμπληρώνεται από την απαίτηση τα διάφορα Εξαγόμενα του παιχνιδιού να είναι **Ισοπίθανα**. Αυτό συμαίνει, να υπάρχει μια συμμετρικότητα στα Εξαγόμενα μεταξύ τους, και από την οπτική γωνία του παίκτη, να είναι όλα τα εξαγόμενα ισοδύναμα.

Βασικά τον παίκτη τον ενδιαφέρει ένα πράγμα: αν θα κερδίσει ή θα χάσει. Υπάρχει λοιπόν ένα σύνολο Εξαγομένων Κ, που περιέχει εκείνα ακριβώς τα Εξαγόμενα που σημαίνουν κέρδος για τον παίκτη, και έστω ν (Κ) το σύνολο και έστω Ω το σύνολο όλων των δυνατών Εξαγομένων και ν (Ω) το πλήθος τους. Θεωρούμε λογικό να υποθέσουμε ότι το πηλίκο

$$\frac{\nu(K)}{\nu(\Omega)}$$

είναι ένα μέτρο του πόσο πιθανό είναι να κερδίσει ο παίκτης. Έτσι φθάνουμε στον περίφημο **Κλασσικό Ορισμό της Πιθανότητας**. Ονομάζουμε Πιθανότητα της εμφάνισης ενός γεγονότος το πηλίκο του πλήθους των ευνοϊκών για το γεγονός αυτό εξαγομένων, προς το συνολικό αριθμό των εξαγομένων

(υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει μια συμμετρία μεταξύ των εξαγομένων). Ο ορισμός αυτός, λίγο-πολύ όπως διατυπώθηκε εδώ, διατυπώνεται στο άρθρο του Thomas Bayes, «An Essay towards solving Problem in the Doctrine of Chances» που δημοσιεύθηκε το 1763 στο περιοδικό Philosophical Transactions of the Royal Society (53, 1763, pp. 269-271). Πάντως ο ορισμός αυτός σιωπηρά και χωρίς να αναφέρεται σαφώς, διέπει τις εξελίξεις των πιθανοτήτων και για τα προηγούμενα διακόσια χρόνια, π.χ. το΄εργο των Pascal, Fermat κλπ. Το Κ και το Ω εξαρτώνται από το είδος του παιχνιδιού και τους κανόνες του.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. ΄Εχουμε ένα παιχνίδι που παίζεται από δυο παίκτες τον Α και τον Β. Καθένας ρίχνει ένα ζάρι και ο Α κερδίζει ΑΝΝ το ζάρι του φέρει αριθμό μεγαλύτερο του ζαριού του Β και χάνει σε κάθε άλλη περίπτωση. ΄Ετσι το σύνολο Ω παριστάνεται από διατεταγμένα ζευγάρια (μ, ν), όπου μ ο αριθμός που έφερε το ζάρι του Α και ν ο αριθμός που έφερε το ζάρι του Β, δηλαδή

$$\Omega = \{(\mu, \nu): \mu, \nu = 1, 2,...,6\}$$

Το σύνολο που σημαίνει κέρδος για τον Α, είναι εκείνα τα ζευγάρια (μ, ν), που έχουν $\mu > \nu$, δηλαδή

$$K = \{(\mu, \nu) : \mu, \nu = 1, 2, ..., 6 \text{ και } \mu > \nu\}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\nu(\Omega) = 36$, $\nu(K) = 15$. ΄Αρα η πιθανότητα να κερδίσει ο Α είναι:

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Ας δούμε τώρα τι πρακτική αξία έχει αυτό. ΄Οσοι ασχολούνται με τυχερά παιχνίδια, είχαν από παλιά παρατηρήσει εμπειρικά ότι σε ένα μεγάλο πλήθος εκτελέσεων ενός παιχνιδιού, τα διάφορα εξαγόμενα εμφανιζόντουσαν εξ ίσου συχνά. ΄Ετσι αν ένα παιχνίδι εκτελεσθεί ν φορές, και το ν είναι πολύ μεγάλο, η πράξη έδειχνε ότι το σύνολο Κ, που αναφέρουμε πιο πάνω θα εμφανισθεί περίπου $\frac{\nu(K)}{\nu(\Omega)} \cdot \nu$ φορές. Που σημαίνει ότι αν η πιθανότητα εμφάνισης που Κ είναι $> 1/2$ τότε ο παίκτης θα κερδίσει περισσότερες φορές απ' ότι θα χάσει. Είναι πολύ γνωστό το παρακάτω ιστορικό ανέκδοτο. Ο Chevalier de Mére (1607-1684) ήταν αυλικός του Louis XIV στην Γαλλία και παίκτης τυχερών παιχνιδιών. Είχε σκεφθεί τον εξής κανόνα: έρριχνε ένα ζάρι 4 φορές και αν ερχόταν ένα τουλάχιστον 6, εκέρδιζε το de Méré, αλλοιώς εκέρδιζε ο αντίπαλος. Από την πείρα του ήξερε ότι τον συνέφερε να

παίζει αυτό το παιχνίδι, δηλαδή, με τον κανόνα αυτό, εκέρδιζε περισσότερες φορές ο de Méré απ' ότι ο αντίπαλος, όμως δεν μπορούσε να εξηγήσει το γιατί, και έθεσε το ερώτημα αυτό στον διάσημο Μαθηματικό και φιλόσοφο της εποχής B. Pascal (1623 — 1662). Ο Pascal, είδε ότι ήταν πιο εύκολο να υπολογίσει την πιθανότητα του συμπληρωματικού γεγονότος «χάνει ο de Méré» Αν ρίξουμε 4 φορές ένα κύβο, το να μην έλθει κανένα 6, μπορεί να γίνει κατά 5^4 τρόπους, ενώ το συνολικό πλήθος των δυνατοτήτων είναι 6^4, (διότι μιλάμε για 4 — Μεταθέσεις με επαναλήψεις). Άρα η πιθανότητα να χάσει ο de Méré είναι:

$$(5/6)^4 = 0,482$$

που είναι λίγο μικρότερο από το 1/2, και εξηγεί την διαίσθηση που είχε ο de Méré πάνω στο θέμα. Ένα άλλο πρόβλημα που έθεσε ο de Mére στον Pascal είναι το εξής: Ρίχνουμε δυο κύβους, 24 φορές, και αν έρθει τουλάχιστον ένα (5,5) κερδίζει ο de Méré, αλλοιώς κερδίζει ο αντίπαλος. Ας δούμε πως υπολογίζουμε την πιθανότητα να κερδίσει ο αντίπαλος: Το σύνολο των ζευγαριών (μ,κ) που μπορούν να έλθουν σε μια ρίψη δυο κύβων είναι $6 \cdot 6 = 36$, άρα οι 24 ρίψεις καθορίζουν σύνολο δυνατοτήτων περιπτώσεων με πλήθος στοιχείων 36^{24}. Εξ άλλου, το σύνολο των ζευγεριών (μ,κ) που μπορούν να έλθουν σε μια ρίψει που δεν έφερε (5,5), είναι προφανώς 35. Άρα οι 24 ρίψεις καθορίζουν σύνολο ευνοϊκών περιπτώσεων, (δηλαδή δυσμενών για τον de Méré) με πλήθος στοιχείων 35^{24}. Άρα η πιθανότητα να χάσει ο de Méré είναι $(35/36)^{24} = 0,509$ δηλαδή, ελάχιστα παραπάνω από το 1/2. Συνεπώς το παιχνίδι αυτό είναι ασύμφορο για τον de Méré. Με την ευκαιρία αυτή, αξίζει να σημειωθεί ότι σε πολλά βιβλία Πιθανοτήτων, Εγκυκλοπαίδιες κ.λ.π., στην αλληλογραφία de Méré — Pascal γύρω από προβλήματα σχετικά με τα παραπάνω, αποδίδεται ιστορικά η γέννηση της θεωρίας των πιθανοτήτων. Το αν αυτό είναι αλήθεια, είναι πολύ αμφισβητίσιμο, (βλέπε Maistrov) αλλά με το πολύ ενδιαφέρον αυτό ιστορικό ερώτημα δεν θα ασχοληθούμε εδώ. Όμως, όπως είπαμε και το πιο πάνω, πολλές φορές η ορολογία των τυχερών παιχνιδιών διευκολύνει την διατύπωση και λύση πολλών προβλημάτων και γι' αυτό την χρησιμοποιούμε πολλές φορές για διδακτικούς λόγους.

Επανερχόμενοι τώρα στο σημείο που διακόψαμε, για να αναφερθούμε στις ιστορίες του de Méré, υπάρχει μια πολύ σημαντική παρατήρηση που θα πρέπει να τονισθεί, η οποία προήλθε από εμπειρικές παρατηρήσεις όχι μόνο στα τυχερά παιχνίδια αλλά και στούς πιο σοβαρούς κλάδους της επιστή-

μης από τους οποίους προέκυψαν προβλήματα πιθανοτήτων, π.χ. Ασφαλιστικά Μαθηματικά, Στατιστική Πληθυσμών, Θεωρία σφαλμάτων κ.λ.π., κατά την διάρκεια του 17ου και 18ου αιώνα. Έστω ότι έχουμε κάποιο πείραμα που έχει ένα σύνολο δυνατών. Εξαγομένων Ω και εμάς, (για κάποιον λόγο), μας ενδιαφέρει ένα υποσύνολο εξαγομένων, το Ε. Έστω ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα ν φορές και έστω ν(Ε) το πλήθος των εμφανίσεων του Ε. Τότε το πηλίκο:

$$\frac{\nu(E)}{\nu}$$

λέγεται Συχνότητα (Frequency) η Σχετική Συχνότητα (Relafive Frequency) του Ε. Η εμπειρική παρατήρηση ήταν ότι το ν μεγαλώνει πολύ,τα διάφορα πηλίκα που σχηματίζονται προσεγγιστικά συγκλίνουν προς την Πιθανότητα εμφάνισης του Ε. Στην πολύ σημαντική αυτή παρατήρηση θα επανέλθουμε και αργότερα.

Ο κλασσικός ορισμός της Πιθανότητας, έχει ορισμένα σοβαρά μειονεκτήματα, που σιγά-σιγά άρχισαν να γίνονται αντιληπτά και να αποτελούν αντικείμενο κριτικής. Κατ' αρχήν δεν είναι σαφές το ποιά Εξαγόμενα θα θεωρούνται συμμετρικά μεταξύ τους και συνεπώς ισοπίθανα. Στο σημείο αυτό εμφανίσθηκαν διχογνωμίες από διάσημα ονόματα. Έτσι, ο D' Alembert (1717 — 1783) θεωρεί το παρακάτω πρόβλημα: Οι δυο όψεις ενός νομίσματος χαρακτηρίζονται με τα γράμματα Κ (κεφάλι) και Γ (γράμματα). Ρίχνουμε λοιπόν ένα νόμισμα 3 φορές, και ζητάμε την πιθανότητα να εμφανισθεί τουλάχιστον ένα Κ. Ο D' Alembeert έκανε τον παρακάτω πίνακα, για να περιγράψει το σύνολο των δυνατών περιπτώσεων.

	1η Ρίψη	2η Ρίψη	3η Ρίψη
(1)	Κ	οτιδήποτε	οτιδήποτε
(2)	Γ	Κ	οτιδήποτε
(3)	Γ	Γ	Κ
(4)	Γ	Γ	Γ

Εθεώρησε λοιπόν ότι οι τέσσερεις παραπάνω περιπτώσεις είναι ισοπίθανες, και επειδή τρείς απο αυτές είναι ευνοϊκές για το γεγονός που σηζητάμε, συμπαίρανε ότι η πιθανότητα να εμφανισθεί τουλάχιστον ένα Κ είναι 3/4, Βλέπε d' Alembert, «Groix ou pile» in ENCYCLOPEDIE vol.4 Paris 1754, pp. 512-513). Όμως ο συλλογισμός αυτός είναι λάθος, διότι ο Δειγματικός χώρος τριών ρίψεων του νομίσματος είναι όλες οι διατεταγμένες τριάδες απο Κ και Γ, που είναι πλήθος $2^3 = 8$. Εξάλλου από όλες αυτές τις τριάδες μόνο μία, η (Γ, Γ, Γ,) είναι έξω από το γεγονός που μας ενδιαφέρι, άρα οι ευνοϊκές

περιπτώσεις είναι 7 και η πιθανότητα να εμφανισθεί τουλάχιστον ένα Κ είναι 7/8. Ένα δεύτερο πρόβλημα με τον Κλασσικό Ορισμό Πιθανότητας είναι το ότι δεν μπορεί να εκφράσει περιπτώσεις που τα εξαγόμενα ενός πειράματος δεν είναι ισοπίθανα, π.χ. έχουμε ένα ζάρι που το βάρος του δεν είναι ομοιογενώς κατανεμημένο αλλά και συγκεντρωμένο προς μια από τις πλευρές, τότε η απέναντι πλευρά θα έχει την τάση να εμφανίζεται πολύ συχνότερα από τις άλλες. Το τρίτο και σημαντικότερο πρόβλημα με τον Κλασσικό Ορισμό Πιθανοτήτων ήταν ότι δεν μπορούσε να εκφράσει πολλά φαινόμενα πιθανοτήτων που ησαν στενά συνδεδεμένα με εφαρμογές της θεωρίας π.χ. (α) Οι υπηρεσίες στρατολογίας θα ήθελαν πολύ να ξέρουν, «ποιά είναι η πιθανότητα ένα παιδί που γεννιέται να είναι αγόρι;». (β) Οι ασφαλιστικές εταιρείες θα ήθελαν πολύ να ξέρουν, «ποιά είναι η πιθανότητα, ένα καράβι φορτωμένο εμπορεύματα που ξεκινάει από τις Ινδίες, θα φθασει σώο και αβλαβές στην Ολλαδία;», ή «ποιά είναι η πιθανότητα ένα άτομο που έφθασε στην ηλικία των 30 ετών, να πεθάνει προτού κλείσει τα 50;». (γ) Ο πειραματικός φυσικός θα ήθελε πολύ να ξέρει, «ποιά είναι η πιθανότητα, το λάθος στην μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, να είναι μικρότερο από το 1/10.000 του μεγέθους αυτού;» κ.λ.π.

Τέτοια ερωτήματα και πολλά άλλα παρεμφερή δεν μπορούσαν να χωρέσουν στον Κλασσικο Ορισμό Πιθανότητας, που χωρίς αμφιβολία δεν μπορούσε να εκφράσει καταστάσεις με άπειρο πλήθος δυνατών εξαγόμενων.

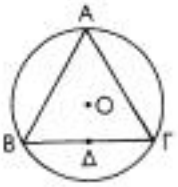
Παρά τις σοβαρότατες αυτές ελλείψεις στον τομέα της θεμελίωσης, η θεωρία των πιθανοτήτων γνώρισε μεγάλη άνθιση στον 18ον και 19ον αιώνα. Το φαινόμενο αυτό είναι γενικό στα Μαθηματικά της εποχής εκείνης. Η μεγάλη έμφαση ήτανε στην ανακάλυψη νέων θεωρημάτων και στη λυση προβλημάτων που έβαζαν οι εφαρμογές. Η αυστηρότητα των αποδείξεων ερχόταν σε δεύτερη μοίρα. Έτσι το Ars Conjectandi του James Bernoulli (1654-1705) δημοσιεύεται το 1713, οκτώ χρονια μετά τον θάνατό του. Στο σύγγραμα αυτό υπάρχουν το πρώτο γενικό θεώρημα της θεωρίας των πιθανοτήτων, που δεν αφορά συγκεκριμένες μόνο ειδικές περιπτώσεις. Είναι, στην σημερινή ορολογία, η ειδική περίπτωση του Νόμου των μεγάλων αριθμών (Law of Large Number) που αφορά την Διωνυμική κατανομή (Binomial Distribution). Περιέχει επίσης και πολλά στοιχεία Συνδιαστικής. Το Doctrine of Chance του De Moive (1667-1754) εμφανίζεται σε τρείς εκδόσεις το 1718, 1740 και 1756. Ο De Moive διατυπώνει την πολλαπλασιαστική ιδιότητα εμβαθύνει στον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών του Bernoulli (δίνει μια πρώτη μορφή του κεντρικού οριακού θεω-

ρήματος (Central Limit Theorem) και δίνει τα σπέρματα της κανονικής Κατανομής (Normal Distribution) που επρόκειτο να παίξει πολύ μεγάλο ρόλο, αργότερα. Κατά τον 18ον αιώνα η θεωρία των πιθανοτήτων αναπτύσσεται γύρω από διάφορες ανάγκες των εφαρμογών και συνδέεται στενά με τον κύριο κορμό των Μαθηματικών γνώσεων της εποχής. Οι εξελίξεις αυτές συγκεντρόνονται στο κλασσικό σύγγραμμα του Laplace (1749-1827), Theorie Analytique des Probabilités που πρωτοδημοσιεύθηκε το 1812. Το Βιβλίο αυτο είναι σταθμός στην εξέλιξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Σε αυτόν τον τόμο ο Laplace συνέδεσε την θεωρία των πιθανοτήτων με την Μαθηματική Ανάλυση συστηματοποίησε προηγούμενες σκόρπιες γνώσεις, εμβαθύνει στην Στατιστική των Πληθυσμών, διατυπώνει το κεντρικό Οριακό Θεώρημα (για την Διωνυμική Κατανομή), εισάγει τις άπειρες γεννήτριες σειρές, βάζει τις βάσεις της θεωρίας των Τυχαίων Λαθών κ.λ.π. Δεν τον απασχολούν θέματα θεμελιώσεως, και χρησιμοποιεί τόν Κλασσικό Ορισμό Πιθανοτήτων, αν και ο ορισμός αυτός δεν καλύπτει πολλά προβληματα που ο ίδιος ο Laplace εμελέτησε.

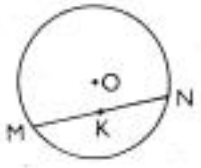
Στον 19ο αιώνα οι Θεωρία των πιθανοτήτων και η Στατιστική βρίσκουν ολοένα περισσότερες και βαθύτερες εφαρμογές. Ο Gauss (1777-1855) εμβαθύνει στην θεωρία των Τυχαίων Λαθών και διατυπώνει την μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων, ο Quetelet (1794-1874) συνδέει τις πιθανότητες με κοινωνικά φαινόμενα, οι Boltzmann (1844-1906) και Gibbs (1839-1903) διατυπώνουν την Στατιστική Μηχανική κ.λ.π.

Όμως, παρά τις επιτυχίες στην εξήγηση φαινομένων του φυσικού κόσμου και της κοινωνίας, τα προβλήματα της θεμελίωσης παραμένουν. Ο J. Bertrand το 1899 κάνει μερικές περίεργες διαπιστώσεις. Ας δούμε μια από αυτές. Θεωρούμε ένα κύκλο, κέντρου Ο και ακτίνος α και έστω ΑΒΓ το εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο. Αν Δ το ,μέσον της πλευράς ΒΓ, είναι γνωστο ότι ΟΔ = α/2. Διαλέγουμε «τυχαία» μια χορδή του κύκλου ΜΝ. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει αυτή η χορδή μήκος μεγαλύτερο της πλευράς ΑΒΓ.

Ανάλογα με την ερμηνεία που θα δώσουμε στην λέξη «τυχαία», θα πάρουμε και μιά αντίστοιχη απάντηση.



Πρώτη Λύση. Έστω Κ το μέσο της ΜΝ. Αν η απόσταση ΟΚ εκλεγεί τυχαία, τότε η ΜΝ είναι μεγαλύτερη της ΑΒ, ΑΝΝ ΟΚ < ΟΔ, και η πιθανότητα είναι 1/2



Δεύτερη Λύση. Αν το Κ τοποθετηθεί τυχαία μέσα στον κύκλο, τότε η ΜΝ είναι μεγαλύτερη της ΑΒ, ΑΝΝ το Κ βρεθεί εντός του κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ΟΔ,που έχει εμβαδό το 1/4 του εμβαδού του μεγάλου κύκλου, άρα η πιθανότητα είναι 1/4.

Τρίτη Λύση. Αν η γωνία του τόξου MN εκλεγεί τυχαία, επειδή η γωνία AB είνα 120°, ενώ η ημιπεριφέρεια έχει 180°, έχουμε πιθανότητα 1/3.

Τέταρτη Λύση. Ας πούμε ότι εκλέγουμε τυχαία το μήκος MN. Το μέγιστο μήκος χορδής είναι 2α, ενώ το μήκος

$$(AB) = \sqrt{3} \cdot \alpha.$$

Άρα η πιθανότητα είναι $(2 - \sqrt{3})/2$.

Αν κανείς ψάξει θα βρεί και άλλες «λύσεις». Τι να συμβαίνει άραγε; Το κλειδί βρίσκεται στην ερμηνεία της λέξης «τυχαία». Με την σύγχρονη αντίληψη της Αξιωματικής Θεμελίωσης, που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το θέμα είναι: ποιός είναι ο δειγματικός χώρος και ποια η πιθανότητα; Αν ξεκαθαρισθεί αυτό, όλα αποσαφηνίζονται. Με τα παραπάνω και άλλα παράδοξα που παρουσίασε, ο Bertrand δεν επεδίωκε να υπονομεύσει την θεωρία των πιθανοτήτων, αλλά να τονίσει την ανάγκη η της αυστηρής θεμελίωσης. Η πίεση για αυστηροποίηση των Πιθανοτήτων, έρχεται σαν απόηχος των γενικότερων εξελίξεων στα Μαθηματικά τον 19ον αιώνα. Κατά τον αιώνα αυτό, σαν αποτελεσμα μιας μακροχρόνιας διαδικασίας,μπαίνει σε αυστηρές βάσεις η Μαθηματική Ανάλυση (Bolzano, Cauchy Weierstrass) και αξιωματικοποιείται η Ευκλείδεια Γεωμετρία (Pasch, Hilbert) Έτσι ο Hilbert στην περί φημη λίστα των προβλημάτων, που έκανε το 1900, περιέλαβε και το πρόβλημα της Αξιωματικής Θεμελίωσης της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Η πρώτη σοβαρή προσπάθεια έγινε απο τον von Mises (1883-1953) το 1919. Παρ' όλο ότι η προσπάθεια αυτή δεν ήταν πλήρως ικανοποιητική, και σήμερα έχει κυρίως ιστορικό ενδιφέρον, εν τούτοις, συνέβαλε πολύ στο να επικεντρώσει το ενδιαφέρου των Μαθηματικών στο πρόβλημα. Η αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας των πιθανοτήτων, επετεύχθη από τον A.N Kolmogorov το 1933, Η θεωρία του οποίου είναι σήμερα γενικά αποδεκτή. Οι βάσεις της θεωρίας του Kolmogorov εκτίθενται στο σύγγραμμα του ίδιου που αναφέρεται στην βιβλιογραφία. Η θεωρία του Kolmogoτον έχει το πλεονέκτημα να είναι φυσική, απλή, και να ικανοποιεί τις σύγχρονες απαιτήσεις αυστηρότητας. Πέραν αυτών, συνδέοντας την Θεωρία των Πιθανοτήτων με τη θεωρία του Μέτρου και της ολοκλήρωσης, την έφερε στο κέντρο των Μαθημάτικών Εξελίξεων και έθεσε στην διάθεση της πολύ ισχυρά εργαλεία και τεχνικές, από άλλους ανεπτυγμένους Μαθημᾳτικούς κλάδους. Επι πλέον, η αυστηρή θεμελίωση επέτρεψε την αλματώδη περαιτέρω ανάπτυξη των Πιθανοτήτων. Για παράδειγμα, χωρίς γερά θεμέλια δεν θα μπορούσε να αναπτυχθεί η θεωρία των Στοχαστικών Διαδικασιών, που σε

πρωτογενή μορφή είχε εισάγει ο Bachelier (1912).

Στην συνέχεια θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε το τι είδους φαινόμενα εκφράζει η Αξιωματική Θεμελίωση του Θεωρίας των Πιθανοτήτων του Kolmogorov. Αρχίζουμε απο μια βασική εμπειρική έννοια, την ένοια του Τυχαίου Πειράματος (Random Experiment). Ένα Τυχαίο Πείραμα είναι μια διαδικασία, που έχει ένα τελείως ορισμένο σύνολο δυνατών Εξαγομένων (Outcome), το Ω. Σε κάθε εκτέλεση του πειράματος το εξαγόμενο είναι ένα στοιχείο του Ω. Το Ω μπορεί να είναι και απειροσύνολο. Ένα Τυχαίο Πείραμα, θα πρέπει να μπορεί να επαναληφθεί απεριόριστο αριθμό φορών, κάτω απο τις ίδιες ομοιογενείς συνθήκες. Επιπλέον, οι συνθήκες εκτέλεσεις του πειράματος περιέχουν ένα στοιχείο αβεβαιότητας, που δεν μπορεί να ελλεχθεί. Η αβεβαιότητα αυτή, είτε οφείλεται σε δική μας έλειψη πληροφόρησης είτε σε αντικειμενικούς λόγους (π.χ. Αρχη Αβεβαιότητας της Κβαντομηχανής), ουσιώδες στοιχείο του πειράματος, και έτσι τα Εξαγόμενα του πειράματος, ποικίλλουν, και δεν μπορούν να προβλεφθούν. Τυχαία πειράματα που πληρούν τις παραπάνω προδιαγραφές είναι (α) Το ρίξιμο του ζαριού, όπου τα δυνατά Εξαγόμενα είναι 1,2,3,...,6. (β) Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, οπότε το εξαγόμενο είναι κάποιος πραγματικός αριθμός. Εδώ θα πρέπει να τονισθεί ότι στις ποικίλλες μετρήσεις που γίνονται σε διάφορες πειραματικές επιστήμες, π.χ. φυσική, αστρονομία, βιολογία κ.λπ., το εξαγόμενο της μέτρησης ενός συγκεκριμένου μεγέθους, δεν είναι τελείως καθορισμένο αλλά υπόκειται σε αποκλίσεις που οφείλονται σε λάθη, (που μπορεί να είναι τυχαία η συστηματικά). (γ) Η μέτρηση των κλήσεων που φτάνουν σε ένα ορισμένο τηλέφωνο μεταξύ 1 – 2 μ.μ., οπότε το Εξαγώμενο είναι ένας φυσικός αριθμός. (δ) Η γέννηση ενός ανθρώπου, με Εξαγόμενα Αγόρι ή Κορίτσι. (ε) Η μέτρηση του πάχους μιάς βίδας, από τις πολλές όμοιες βίδες που παράγονται σε ένα εργοστάσιο. Εδώ πρέπει να επισημανθεί, παρά τις προθέσεις για ομοιογένεια του προϊόντος, θα υπάρχουν αποκλίσεις που οφείλονται σε αβέβαια στοιχεία της διαδικασίας της παραγωγής. (ζ) Η μέτρηση του χρόνου ζωής ενός ηλεκτρικού γλόμπου, από τους πολλούς, όμοιου τύπου, που παράγονται κ.λ.π.

Ανάλογα με το ποιό είναι το αντικείμενο του Τυχαίου Πειράματος, μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η εμφάνιση κάποιου υποσυνόλου Ε του Ω, τα στοιχεία του οποίου έχουν κάποια ιδιαίτερη σημασία, σε σχέση πάντα με τους στόχους του πειράματος. Ας πούμε ότι εκτελέσαμε το πείραμα ν φορές και έστω ν (Ε) είναι το πλήθος των εμφανίσεων του Ε, στις ν επαναλήψεις του πειράματος το πηλίκο:

$$\frac{\nu(E)}{\nu}$$

λέγεται Συχνότητα (Frequency) ή Σχετική Συχνότητα (Relative Frequency) του Ε. Για τις διάφορες τιμές ν = 1,2,..., οι Συχνότητες του Ε σχηματίζουν μια ακολουθία. Για πάρα πολλά πειράματα τύχης, (περιλαμβανομένων και αυτών που αναφέρουμε πιο πάνω), παρατηρείται **εμπειρικά**, ένα πολύ αξιόλογο γεγονός: Όταν το ν γίνεται πολύ μεγάλο, η συχνότητα του Ε, πλησιάζει προς κάποιον αριθμό, (δηλαδή, η ακολουθία $\frac{\nu(E)}{\nu}$, συγκλίνει). Το πολύ αξιοσημείωτο αυτό φαινόμενο, που μόνο εμπειρικά μπορεί να ελεγχθεί, είναι εκείνο που επιτρέπει την εφαρμογή των Θεωρημάτων των Πιθανοτήτων, σε πραγματικά προβλήματα. Το όριο της ακολουθίας των Συχνοτήτων του Ε, το ονομάζουμε Πιθανότητα του Ε. Ο von Mises (1883-1953) προσπαθησε το 1919, να στηρήξει αξιωματικά την Θεωρία των Πιθανοτήτων, πάνω στην ιδέα της σύγκλισης της Συχνότητας του γεγονότος Ε. Η θεωρία του von Mises δεν έγινε δεκτή, διότι δεν ήταν πλήρως αξωματική, περιείχε και κάποια εμπειρικά στοιχεία, από τα οποία δεν έγινε κατορθωτό να απαλλαγεί. Πέραν αυτού, σαν γενική φιλοσοφία, μιά Αξιωματική Θεωρία, θα πρέπει να βασίζεται σε εύλογα και «προφανή» αξιώματα, από τα οποία οι πιο πολύπλοκες αλήθειες θα συνάγονται σαν Θεωρήματα και όχι το αντίστροφο. Η σύγκλιση των συχνοτήτων, είναι με κάθε αντίληψη, μια υπόθεση αρκετά πολύπλοκη. Με την αξιωματική θεμελίωση του Kolmogorov, η σύγκλιση των συχνοτήτων εκφράζεται στο Νόμο των Μεγάλων Αριθμών, (Law of Large Numbers)

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στην καθημερινή φρασεολογία μας, χρησιμοποιούμε εκφράσεις για «πιθανότητες», που δεν συμπεριλαμβάνονται στα πλαίσια των Τυχαίων Πειραμάτων που περιγράφονται πιο πάνω, π.χ. «ποιά είναι η πιθανότητα η Ιλιάδα να γράφτηκε από περισσότερους από έναν ποιητές;», «ποιά είναι η πιθανότητα να νικήσει στο αυριανό ντέρμπυ, ο Παναθηναϊκός του Ολυμπιακό;», «ποιά είναι η πιθανότητα να υπάρχει ζωή στον Άρη;» κ.λ.π. Έχει γίνει πολύ συζήτηση από διάφορους συγγραφείς για την δυνατότητα μιας θεωρίας που να καλύπτει ερωτήματα τέτοιου τύπου, χωρίς γιά την ώρα, να έχει καταλήξει σε κάτι συγκεκριμένο. Η θεωρία που προκύπτει από τα Αξιώματα του Kolmogorov, είναι εφαρμόσιμη σε γεγονότα που εκφράζονται με τα Τυχαία Πειράματα, που περιγράφονται πιό πάνω.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ KOLMGOROV

Έστω Ω είναι ένα σύνολο, $U \subseteq P(\Omega)$ είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του Ω και $P : U \to R$ είναι μια μη-αρνητική πραγματική συνάρτηση. Λέμε ότι η τριάδα (Ω, U, P) είναι Χώρος Πιθανοτήτων όταν ισχύουν τα παρακάτω.

(α) $\Omega \in U$ και $P(\Omega) = 1$

(β) Αν $A \in U$ τότε και $(\Omega - A) \in U$

(γ) Αν $A_1, A_2, \ldots, \in U$, τότε και
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu \cup \ldots \in U$

(δ) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots \in U$ και $A_i \cup A_j = \varnothing$
για κάθε $i \neq j$ $i, j = 1, 2, \ldots \nu, \ldots,$ τότε θα είναι
$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu \cup \ldots) =$
$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu) + \ldots$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

L.Maistrov. Probability Theory: A Historical Sketch. Academic Press 1967.

I. Todhunter. History of the Mathematical Theory of Probability. Chelsea, 1961

A.N. Kolmogorov. Foundations of the Theory of Probability Chelsea, New York, 1950.

ΟΙ ΜΗ – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΙΣΤΟΡΙΟΥΛΕΣ ΣΤΗΝ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ;

– ΑΠΟΠΕΙΡΑ ΚΡΙΤΙΚΗΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ – α

Φ. Καλαβάσης
Μαθηματικός

Είναι πολύ συχνό το φαινόμενο: Σαν εισαγωγή ενός μαθηματικού κεφαλαίου χρησιμοποιούμε μια μη-μαθηματική ιστορία στην οποία υπεισέρχονται κάποιοι αριθμοί, κάποιες συγκρίσεις, αναλογίες και σχέσεις περιεκτικότητας. Θεωρώντας πως