Author: Φ. Καλαβάσης

Title: Οι μη Μαθηματικές Ιστοριούλες στην Υπηρεσία της Διδασκαλίας των Μαθηματικών;

Abstract: Πώς η διαδικασία της μη-μαθηματικής ιστοριούλας συμφιλιώνει τον μαθητή με τα μαθηματικά. Πώς η μαθηματικοποίηση μιας πραγματικής κατάστασης μας δίνει λύση σε κάποιο πρόβλημα.

Creator: HDML

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ KOLMGOROV

Έστω Ω είναι ένα σύνολο, $U \subseteq P(\Omega)$ είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του Ω και $P : U \to R$ είναι μια μη-αρνητική πραγματική συνάρτηση. Λέμε ότι η τριάδα (Ω, U, P) είναι Χώρος Πιθανοτήτων όταν ισχύουν τα παρακάτω.

(α) $\Omega \in U$ και $P(\Omega) = 1$

(β) Αν $A \in U$ τότε και $(\Omega - A) \in U$

(γ) Αν $A_1, A_2, \ldots, \in U$, τότε και
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu \cup \ldots \in U$

(δ) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots \in U$ και $A_i \cup A_j = \varnothing$
για κάθε $i \neq j$ $i, j = 1, 2, \ldots \nu, \ldots,$ τότε θα είναι
$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu \cup \ldots) =$
$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu) + \ldots$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

L.Maistrov. Probability Theory: A Historical Sketch. Academic Press 1967.

I. Todhunter. History of the Mathematical Theory of Probability. Chelsea, 1961

A.N. Kolmogorov. Foundations of the Theory of Probability Chelsea, New York, 1950.

ΟΙ ΜΗ – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΙΣΤΟΡΙΟΥΛΕΣ ΣΤΗΝ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ;

– ΑΠΟΠΕΙΡΑ ΚΡΙΤΙΚΗΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ – α

Φ. Καλαβάσης
Μαθηματικός

Είναι πολύ συχνό το φαινόμενο: Σαν εισαγωγή ενός μαθηματικού κεφαλαίου χρησιμοποιούμε μια μη-μαθηματική ιστορία στην οποία υπεισέρχονται κάποιοι αριθμοί, κάποιες συγκρίσεις, αναλογίες και σχέσεις περιεκτικότητας. Θεωρώντας πως

ο μαθητής βρίσκει πάντα ενδιαφέρουσα και "έξυπνη" αυτή τη μη-μαθηματική εισαγωγή, ελπίζουμε πως το βελησνεκές του ενδιαφέροντος του θα καλύψει και το μαθηματικό μέρος της διδασκαλίας. Έτσι, ξαφνικά οι "λακούβες" μετατρέπονται σε x οι "εργάτες" σε y και πολύ εύκολα υπολογίζουμε πόσοι "εργάτες" χρειάζονται για να σκάψουν τόσες "λακούβες".

Η διαδικασία αυτή (της μη-μαθηματικής ιστοριούλας) εξυπηρετεί δυό ειδών προθέσεις:

— Η μια είναι να συμφιλιώσουμε το μαθητή με τα μαθηματικά, δείχνοντας του ότι τα χρησιμοποιούμε (ανεξάρτητα απ' τη θέληση μας) στην καθημερινή ζωή μας (άρα μας συμφέρει να τα μάθουμε, και και να τα μάθουμε καλά).

— Η δεύτερη είναι να δείξουμε ότι η μαθηματικοποίηση (μοντελοποίηση, τυποποίηση) μιας πραγματικής κατάστασης, αν γίνει σωστά, ενδεχόμενα μας ανοίγει τις πόρτες μιας πληθώρας ιδεών και τεχνικών διαδικασιών που μπορούν να λύσουν κάποιο πρόβλημα το οποίο χωρίς αυτή τη μαθηματικοποίηση θά ήταν αδύνατο να λυθεί· και μετά βέβαια να επανέλθουμε μαζί με την λύση στην πραγματική κατάσταση.

Βέβαια κάθε φορά που απαντάται αυτό το φαινόμενο της ιστοριούλας σε μια εκπαιδευτική λειτουργία,δεν μπορούμε να ξέρουμε τις προθέσεις του διδάσκοντος. Έχουμε όμως καθήκον να ελέγχουμε το αποτέλεσμα.

Δυστυχώς στην Στοιχειώδη και τις πρώτες τάξεις της Μέσης Εκπαίδευσης, οι περισσότερες από αυτές τις μαθηματικές ιστοριούλες έχουν ελάχιστη σχέση τόσο με την καθημερινή πραγματικότητα όσο και με τα μαθηματικά, με αποτέλεσμα να περνάει στα παιδιά η λογική αντίδραση της «ηλικίας του Καπετάνιου» (1) εξ άλλου θα είχε αρκετο κοινωνιολογικό ενδιαφέρον μια έρευνα της εικόνας της κοινωνίας που δίνουν όλες αυτές οι ιστοριούλες.

Στο άρθρο αυτό θα ασχοληθούμε με δυο άρθρα που εμφανίστηκαν στο περιοδικό ευκλείδης α, τεύχος 3 (Γενάρης-Φλεβάρης 84) στις σελίδες 23 και 24 κάτω από τον γενικό τίτλο «Για την Β΄ τάξη».

Στο πρώτο άρθρο «ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΜΟΕΙΔΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ» η ιστοριούλα ούτε μαθηκοποιείται, ούτε αρκείται να δείξει την χρησιμοποίηση των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή. Ο συγγραφέας του άρθρου διατείνεται ότι η έννοια της «πρόσθεσης μόνο ομοειδών πραγμάτων» όχι μόνο ταυτίζεται με την έννοια της πράξης της πρόσθεσης στα μαθηματικά, αλλά ήδη ενυπάρχει στην σκέψη και την καθημερινή πρακτική του

Κωστάκη, και άρα αρκεί η κατανόηση της αντικατάστασης των λεμονιών από το $\sqrt{5}$ και των πορτοκαλιών από το $\sqrt{7}$ για να καταλάβει ο μαθητής πως μόνο ομοειδή ριζικά μπορεί να προσθέση (κι όμως 3 λεμόνια και 2 πορτοκάλια θα μπορούσαν να μας κάνουν 5 εσπεριδοειδή).

Στην δεύτερη παράγραφο του ίδιου άρθρου "ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ" βλέπουμε ότι μπορούμε να «προσθέσουμε» και μη **κατ' αρχήν** ομοειδή ριζικά, όταν αυτά είναι μετατρέψιμα σε **τελικά** ομοειδή (π.χ. $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$), καθώς επίσης και **μη ομοειδή ριζικά** όταν αυτά είναι ίσα με ακέραιους αριθμούς ή αριθμούς με περιορισμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων (π.χ. $\sqrt{25} + \sqrt{0,81} = 5,9$)

Έτσι λοπόν η στατιστική οντολογική αντίληψη για τα πράγματα που τα θέλει αμετάβλητα (ξύστρες, λεμόνια) δίνει τη θέση της σε μια δυναμική εξελικτική αντίληψη για τα ριζικά που είναι ευμετάβλητα ως προς την «εικόνα» τους, την οποία ο συγγραφέας ταυτίζει με το «είδος».

Δημιουργείται λοιπόν μια σύγχυση πάνω στην καθαυτή έννοια της τετραγωνικής ρίζας (ή ριζικού) ενός αριθμού που είναι ένας άλλος αριθμός, και του συμβόλου της που αντιστοιχεί σε μια υπολογιστική διαδικασία.

Όσο για την απάντηση του Κωστάκη στην ερώτηση «πόσα πράγματα έχεις μέσα στην τσάντα σου» παρατηρούμε ότι είναι ισοδύναμη με την υποθετική απάντηση «9 πράγματα», καλύπτοντας κάτω από την γενική έννοια «πράγματα» τις ξύστρες τα μολίβια, και τα τετράδια (αν δεν καλύπτονται τότε η σωστή απάντηση θα ήταν «μηδέν πράγματα»). Έτσι λοιπόν αν το «ομοειδές» ορίζεται με απόλυτο τρόπο από την ποιότητα του πράγματος στην σκέψη του συγγραφέα, στην πραγματικότητα μιας συζήτησης γίνονται «συμβάσεις του λόγου και της γλώσσας» οι οποίες ορίζουν πολλές φορές αλλοιώς το ομοειδές, ενώ πολλές φορές λαμβάνεται υπ' όψιν και το μέγεθος του «πράγματος» (δεν είναι τόσο εύκολο να πείσεις κάποιον ότι το άθροισμα μιας μπάλας του πιγκ-πογκ και μιας μπάλας του μπάσκετ μας κάνει δυό μπάλες!).

Για να ξαναγυρίσουμε όμως στο μαθηματικό μέρος του προβλήματος, μπορούμε να πούμε πως απ' τη στιγμή που επιτρέπεται να γράψουμε «$\sqrt{5} + \sqrt{7}$», η πράξη της πρόσθεσης μεταξύ δυο μη ομοειδών ριζικών είναι επιτρεπτή. Είναι ένα άλλο θέμα η μορφή που θα έχει το άθροισμα.

Έτσι λοιπόν, για να αποφύγουμε να πούμε ότι $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$ ενώ $\sqrt{\alpha} \times \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$, προσφεύγουμε στην χρή-

ση ιστοριών που συγχέουν τις έννοιες και πολλές φορές χωρίς να το καταλάβουμε τις διαστρεβλώνουν.

Στο δεύτερο άρθρο «ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ» , παρατηρούμε ότι ενώ η ιστοριούλα της ζυγαριάς έχει στόχο να δείξει πως "από συγκεκριμένα προβλήματα της ζωής **δημιουργούμε** εξισώσεις", τελικά δείχνει πως στην καθημερινή ζωή καταφέρνουμε **να λύνουμε** απλές εξισώσεις. Διότι εξίσωση είναι μάλλον η τυποποίηση ενός προβλήματος που εξαρτάται από μια ή περισσότερες μεταβλητές (στο x στην προκειμένη περίπτωση) και του οποίου αγνοούμε όχι μόνο τη λύση αλλά **και την ύπαρξη λύσης.**

Συνήθως δυο είναι οι τρόποι που ακολουθούνται για τον ορισμό της εξίσωσης. Ο ένας είναι της "δυνάμει ισότητας" που πολλές φορές εμφανίζεται με την χρησιμοποίηση του x_0 σαν υποθετικής λύσης.

Ο δεύτερος είναι της συνάρτησης, οπότε το αριστερό μέλος της εξίσωσης ($f(x) = 0$) θεωρείται σαν μια παράσταση για την οποία αναζητούμε αν και πότε μηδενίζεται.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις είμαστε καλυμένοι όταν χρησιμοποιούμε τις διάφορες ιδιότητες σχέσεων ισοδυναμίας κατά την διάρκεια της λύσης.

Στο παράδειγμα του άρθρου όταν ισοροπεί η ζυγαριά, σημαίνει ότι **εξίσωση έχει λυθεί**. Το να τίθεται εξάλου στην ίδια μεριά της ζυγαριάς το προς ζύγιση αντικείμενο και μερικά σταθμά μαζί, δεν νομίζω πως απαντάται συχνά εις το εμπόριο. Επίσης στο συγκεκριμένο παράδειγμα,το **x μένει αμετάβλητο** και αυτό που αλλάζει τιμές είναι τα σταθμά. Έτσι το ερώτημα "για ποιά τιμή του x ισοροπεί η ζυγαριά" που θα μπορούσε να αντιστοιχίσει σε εξίσωση, γίνεται "με δεδομένο το x να βρεθούν οι κατάλληλοι συντελεστές α και β έτσι ώστε $ax = \beta$".

Να λοιπόν που και στα δύο αυτά άρθρα βρίσκουμε διπλά αποτυχημένη την μη-μαθηματική ιστοριούλα: σε σχέση με την πραγματικότητα και σε σχέση με τα μαθηματικά. Στο ερώτημα "γιατί γράφονται τέτοιου είδους άρθρα" οι απαντήσεις είναι δύο: ή ο συγγραφέας έχει δοκιμάσει αυτή τη μέθοδο που αυτή στη τάξη διδάσκει χωρίς να έχει ελέξει τα αποτελέσματα της και τις συνέπειες στην αντιληπτική και συλλογιστική ικανότητα του μαθητή ή ο συγγραφέας θεωρεί a-priori επιτυχημένη αυτή τη "μέθοδο" συγχέοντας την δικιά του συλλογιστική (γνώση των εννοιών, αναζήτηση παραδειγμάτων) με την συλλογιστική διαδικασία του μαθητή (παράδειγμα αναζήτηση

της "αφηρημένης έννοιας" κατανόησή της) η οποία είναι αντίστροφη. Έτσι, η έλλειψη επιστημονικής αξιοπιστίας ή η έλλειψη υπαρκτής σχέσης με την καθημερινή ζωή, του παραδείγματος, μπορεί γιά τον καθηγητή να μην έχει τόση σημασία εφ' όσον του αφήνει ανεπηρέαστη την εικόνα του γνωστικού του αντικειμένου, αλλά για τον μαθητή μπορεί να είναι καταστροφική στην προσπάθεια σύλληψης του γνωστικού αντικειμένου.

Εξ άλλου το πέρασμα από ένα αισθητό αντικείμενο σε ένα νοητό απαιτεί αρκετά επίπονη προσπάθεια, ενώ η μεταφορά των σχέσεων μεταξύ αισθητών αντικειμένων σε νοητά με απόλυτο τρόπο ενέχει μια φιλοσοφικά αμφισβητούμενη ορθότητα και διδακτικά αμφισβητούμενη αποτελεσματικότητα. Διότι "το να κατηγορεί κανείς τα μαθηματικά πως είναι αφηρημένα αποτελεί δημαγωγία, μιας και τα μαθηματικά είναι αφηρημένα από τη φύση τους· αλλά το να κατηγορεί κανείς ότι η διδασκαλία των μαθηματικών δεν δείχνει με καθαρό και συγκεκριμένο τρόπο το γιατί, το από πού και πως τα μαθηματικά είναι αφηρημένα, καθώς και το που και πως εφαρμόζονται, αποτελεί πέρα από μια δίκαιη κατηγορία, ένα καθήκον κάθε μαθηματικού της εκπαίδευσης" (3).

Αναφορές

(1) Συχνά οι μαθητές αφήνουν κατά μέρος την ιστοριούλα και απλά προσπαθούν να διαβλέψουν τι θέλει να πεί ο καθηγητής μέσω της ιστοριούλας. Έτσι σε πειράματα που έγιναν στη Γαλλία δόθηκε η άσκηση: «Ενα πλοίο μεταφέρει 20 κατσίκια και 30 πρόβατα. Ποιά είναι η ηλικία του καπετάνιου» Αρκετοί μαθητές απάντησαν 50 χρόνων. Όταν μετά ζητήθηκαν εξηγήσεις γι' αυτή την απάντηση, είπαν πως ξέρουν ότι "δεν στέκει" αλλά εδώ ο καθηγητής ήθελε κατά τη γνώμη τους να ελέγξει αν ξέρουν να κάνουν πρόσθεση. Έτσι απάντησαν $30 + 20 = 50$.