Author: Τουμάσης Μπάμπης

Title: Μια διαφορετική αντίληψη για τη Μαθηματική Επαγωγή και τη διδασκαλία της.

Abstract: Ο κύριος ένοχος, υπεύθυνος για τη χαμηλή αποτελεσματικότητα στη διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής είναι: Η αρρωστημένη παραδοσιακή και ξεπερασμένη αντίληψη για την φύση των Μαθηματικών που διαπερνά τα κεφάλια των υπευθύνων σχεδιαστών της μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΜΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΓΙΑ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ

Μ. Τουμάσης

«Τώρα, το να γνωρίζουμε μαθηματικά είναι η μια πλευρά, και το να είμαστε ικανοί να τα διδάξουμε — να επικοινωνήσουμε με τους μαθητές μας σ' ένα χαμηλότερο εννοιολογικό επίπεδο — είναι κάτι το εντελώς διαφορετικό· και εγώ πιστεύω ότι το δεύτερο είναι εκείνο που μας λείπει αυτή τη στιγμή».

Richard Skemp ([21], p. 36)

1. Εισαγωγή: Δύσκολα θα βρίσκονταν καθηγητής των μαθηματικών σ' όλη την επικράτεια που θα διαφωνούσε μαζί μας στο ότι η έννοια της μαθηματικής επαγωγής είναι από τις πιο δύσκολες, ακατανόητες και «δύσπεπτες» για τον σημερινό μαθητή της Α΄ Λυκείου όπου διδάσκεται. Στην καλύτερη περίπτωση και μετά από ηρωϊκές προσπάθειες του καθηγητή επιτυγχάνεται μια τυποποιημένη μηχανιστική απομνημόνευση και αποστήθηση των σταδίων της διαδικασίας σε συγκεκριμένες ασκήσεις χωρίς τη δυνατότητα εφαρμογής και μεταφοράς της μεθόδου σε ανάλογες ασκήσεις και προβλήματα.

Η πλειοψηφία βέβαια των μαθητών δεν θα καταλάβουν ποτέ στη σχολική τους θητεία πως λειτουργεί αυτή η αποδεικτική μέθοδος, ποια η αναγκαιότητα της και γιατί η πιστή εφαρμογή της είναι αρκετή για την απόδειξη της αλήθειας μιας πρότασης.

Η επιβεβαίωση όμως όλης αυτής της θολούρας, της σύγχισης, του δέους και της ανασφάλειας που ξετυλίγεται γύρω από την έννοια αυτή έρχεται με την αφαίρεση της από την εξεταστέα ύλη στο τέλος του χρόνου, κατόπιν σφοδρής επιθυμίας των μαθητών και την καταγραφή της έτσι στο πάνθεο των άχρηστων, ανιαρών, περιττών και αχώνευτων γνώσεων που διανθίζουν τα αναλυτικά μας προγράμματα.

Αν απορρίψουμε την εύκολη, παραδοσιακή λύση για τα αίτια αυτού του αποκαρδιωτικού φαινομένου, την απονομή δηλαδή εύσημων βλακείας και τεμπελιάς στη συντριπτική πλειοψηφία των Ελληνόπαιδων και τίτλους αναγνώρισης της θείας προικοδότησης στα υπόλοιπα λιγοστά «ταλέντα», κάτι που βολεύει όλους τους ήδη βολεμένους και καθαγιάζει τη δοσμένη τάξη πραγμάτων, θα άξιζε τον κόπο να διερευνήσουμε με κάποια παιδαγωγική υπευθυνότητα τι κρύβεται κάτω από την επιφάνεια των γεγονότων.

Με την εργασία αυτή θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι ο κύριος ένοχος, υπεύθυνος για την χαμηλή αποτελεσματικότητα και τα τρομερά προβλήματα της διδασκαλίας της μαθηματικής επαγωγής είναι: Η αρρωστημένη, παραδοσιακή και ξεπερασμένη αντίληψη για τη φύση των μαθηματικών που διαπερνά τα κεφάλια των υπεύθυνων σχεδιαστών της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο διαποτισμός των αναλυτικών προγραμμάτων, μέσα απ' τα διδακτικά βιβλία, με την παραγωγική - Ευκλείδια παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων. Η άρνηση της πολιτείας, για ένα συνολικό πραγματικό εκσυγχρονισμό και αναβάθμηση της μαθηματικής εκπαίδευσης έτσι που ν' ανταποκρίνεται στο ευρύ φάσμα ενδιαφερόντων και αναγκών των μαθητών, με κύριο στόχο την οργάνωση της σκέψης και ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας, καθοδηγούμενη από τις σύγχρονες αντιλήψεις για τη δημιουργία της μαθηματικής γνώσης και τη διαδικασία εξέλιξης, ανάπτυξης και ανακάλυψης των μαθηματικών εννοιών. Επίσης μέσα στις προθέσεις μας είναι να δώσουμε ένα περίγραμμα των διδακτικών στόχων και αντίστοιχων μέσων, όπως νομίζουμε ότι προκύπτουν από την ανάλυση της αξίας της επαγωγής σαν ευρετικής - διαισθητικής μεθόδου ανακάλυψης νέων γνώσεων, σε συνδυασμό με την παραδοσιακή αναγκαιότητα παραγωγικής παρουσίασης των μαθηματικών προτάσεων και συμπερασμάτων, που κύρια συντελεί στη διαφοροποίηση των μαθηματικών από τις εμπειρικές - πειραματικές επιστήμες.

2. Σύντομη αναφορά στην εξέλιξη της έννοιας της επαγωγής: Είναι πια γενικά παραδεκτή και καταξιωμένη η τεράστια σημασία που έχει η γνώση της ιστορίας εξέλιξης και ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών για τη βαθύτερη κατανόηση τους και τη δημιουργία θετικών ενεργητικών στάσεων απέναντι στη μαθηματική επιστήμη ([1], [15]). Η μαθηματική εκπαίδευση εξάλλου θα είχε πολλά να ωφεληθεί από τη μελέτη και υιοθέτηση των παιδαγωγικών επιπτώσεων που μπορεί να έχει η γενετική - ιστορική αρχή της ανάπτυξης των μαθηματικών που περικλείεται στη φράση: «Η οντογένεση επαναλαμβάνει τη φυλογένεση». Το δίδαγμα αυτού του νόμου είναι: Για να διδάξουμε μια μαθηματική έννοια πρέπει να δώσουμε στο μαθητή την ευκαιρία μεσ' από ένα διανοητικό περίπατο, να ανατρέξει πίσω και να περάσει απ' όλα τα σημαντικά ιστορικά στάδια-φάσεις ανάπτυξης αυτής της έννοιας. ([4], [17]). Και αυτό κατά νου δεν θα ήταν άσκοπο να αναφέρουμε περιληπτικά κάποια ιστορικά στοιχεία. Η επαγωγή σαν τεχνική που ξεκινάει από το μερικό και ειδικό και σχηματίζει κρίσεις γενικού και καθολικού περιεχομένου χρησιμοποιούνταν ήδη από τους αρχαίους χρόνους σαν εργαλείο της επιχειρηματολογίας και συμπερασματολογίας. Ο Σωκράτης π.χ. πολλές φορές για να ορίσει έννοιες που αφορούσαν ανθρώπινους χαρακτηρισμούς (σοφία, δικαιοσύνη, εγκράτεια, αρετή, ανδρεία κ.α.) συνήθως διάλεγε κάποιες προσωπικότητες και ξεριζε τα κοινά χαρακτηριστικά των εννοιών προσδίδοντάς τους έπειτα γενική ισχύ.

Τον επαγωγικό λογισμό τον χρησιμοποίησε επίσης και ο Πλάτωνας, αλλά κυρίως οι Επικούριοι Φιλόσοφοι που τον μετέτρεψαν σε σύστημα φιλοσοφικής έρευνας. Στην ιστορία της φιλοσοφίας έγιναν απόπειρες να παρουσιασθεί ένας τύπος συλλογισμού σαν ο μοναδικά ορθός και αυθεντικός τρόπος απόκτησης νέων γνώσεων. Έτσι ο Αριστοτέλης ενώ υποστήριζε πως για τη γνώση του γενικού είναι απαραίτητο να ξεκινάμε απ' το μερικό και χρησιμοποιούσε την επαγωγή για την εξαγωγή κρίσεων, εντούτοις όπως ξέρουμε υπερτόνισε τη σημασία του παραγωγικού συλλογισμού σαν το μοναδικά ορθό τρόπο ασφαλούς σκέψης και θεμελίωσε την τυπική λογική, η οποία θεωρείται το απαραίτητο εργαλείο παραγωγικού διαλογισμού, που από την αλήθεια μιας πρότασης για ένα σύνολο συμπεραίνουμε την αλήθεια για τα επί μέρους στοιχεία ή υποσύνολά του.

Αντίθετα ο Φραγκίσκος Βάκων (16ος αιώνας) άσκησε οξύτατη κριτική στη «συνηθισμένη» λογική και τον παραγωγικό τρόπο σκέψης του Αριστοτέλη με το επιχείρημα ότι δεν στηρίζεται στην πείρα, στην πρακτική, και αφήνει από τα χέρια του τη φύση. Τεράστια θεωρείται η υπηρεσία του στην ανάπτυξη της επιστήμης της λογικής με την επεξεργασία της επαγωγής, παρόλο που το βήμα που έκανε προς τα εμπρός ήταν μονόπλευρο.

Επηρεασμένοι από την ανάπτυξη των φυσικών επιστημών οι επιστήμονες πείθονταν όλο και περισσότερο πως η παραγωγική - θεολογική σκέψη που θεωρούνταν το μεσαίωνα απ' τους σχολαστικούς σαν το κύριο εργαλείο γνώσης, δεν μπορούσε να είναι αποτελεσματικό μέσο επιστημονικής μελέτης γιατί δεν είχε τη δύναμη να τους οδηγήσει στην ανακάλυψη νέων αληθειών.

Ο Βάκων βλέπει στην επαγωγή με αποκλεισμό την κύρια μέθοδο πρόσκτησης νέων έγκυρων γνώσεων στην επιστήμη και την αντιπαραθέτει και στον παραγωγικό συλλογισμό και στην επαγωγή (με απαρίθμηση) του Αριστοτέλη. «Η επαγωγή που προχωράει με απλή απαρίθμηση είναι παιδαριώδης. Τα συμπεράσματα της είναι προσωρινά και εκτεθειμένα στον κίνδυνο αντιφατικών ενστάσεων, ενώ τις περισσότερες αποφάνσεις της τις στηρίζει σ' ένα πολύ μικρό αριθμό γεγονότων και μόνον αυτών που ελέγχονται άμεσα» ([22], σελ. 80).

Το συμπέρασμα στην επαγωγή με αποκλεισμό θα προκύψει κατά τον Βάκων όπως «κυνηγάμε ένα θήραμα σε ανοιχτό πεδίο» πρέπει δηλαδή να στενέψουμε και να κλείσουμε το πεδίο μας για να πιάσουμε τη λεία μας. Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει μια τεχνική για την ταξινόμηση των δεδομένων και τον αποκλεισμό των υποθέσεων έτσι ώστε με την προοδευτική απάλειψη πιθανών εξηγήσεων να μείνει στο τέλος μόνο μια ([5], σελ. 141).

Από τους μαθηματικούς όμως ο J. Bernoulli (17ος αιώνας) ήταν ο πρώτος που απέκρουσε συστηματικά την επαγωγή σαν μέθοδο εξαγωγής μαθηματικής γνώσης και δίνοντας αντιπαραδείγματα δεν τη δέχτηκε σαν αποδεικτική μέθοδο γενικών προτάσεων. Γεννήθηκε λοιπόν το ερώτημα πως θα βρεθεί μια αυστηρή συλλογιστική διαδικασία που θα αξιοποιούσε και θα διασφάλιζε την εγκυρότητα της επαγωγικής μεθόδου, ώστε από την αλήθεια ειδικών περιπτώσεων να καταλήγουμε σε αλήθεια γενικών περιπτώσεων. Έτσι δημιουργήθηκε η μαθηματική ή τέλεια επαγωγή όπως τη γνωρίζουμε σήμερα που εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε τέλεια μορφή από τον Pascal το 1654 στην απόδειξη μιας ιδιότητας του ομόνυμου τριγώνου Pascal.

Δείγματα της μεθόδου όμως εμφανίστηκαν και νωρίτερα στην εργασία του μαθηματικού της Αναγέννησης Φραγκίσκου Μαυρόλυκου (1495-1575). Το όνομα «μαθηματική επαγωγή» φαίνεται ότι δόθηκε στη μέθοδο αυτή πολύ αργότερα από τον De Morgan σ' έναν αρθρο του για την επαγωγή ([2], P:398). Αργότερα ο Giuseppe Peano (1852-1932) σε μια εντυπωσιακή προσπάθεια να τυποποιήσει την αριθμητική συμπεριέλαβε το 1889 στο έργο του «Arithmetices principia nova methodo exposita» την αρχή της μαθηματικής επαγωγής στα πέντε αξιώματα του για τη θεμελίωση της αριθμητικής. Τα αξιώματα είναι:

1. Το 1 είναι ένας φυσικός αριθμός
2. Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο που είναι επίσης φυσικός αριθμός, και μοναδικός.
3. Δεν υπάρχουν δυο φυσικοί αριθμοί που να έχουν τον ίδιο επόμενο

4. Το 1 δεν είναι ο επόμενος κανενός φυσικού αριθμού.

5. Αρχή της τέλειας επαγωγής: Εάν ένα σύνολο S αριθμών περιλαμβάνει το 1 και επίσης τον επόμενο κάθε αριθμού στο S, τότε κάθε αριθμός ανήκει στο S.

3. Η αξία της τέλειας επαγωγής για τη μαθηματική γνώση: Όπως αναφέραμε παραπάνω, η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής δημιουργήθηκε από την ανάγκη να ελεγχθούν τα αποτελέσματα της επαγωγικής μεθόδου. Για το λόγο αυτό η μέθοδος είναι μια μορφή παραγωγικού συλλογισμού και δεν μπορούσε να γίνει αλλιώς, αφού σύμφωνα με τα παραδεδεγμένα πρότυπα και στάνταρντ του παρελθόντος, κανένα μαθηματικό αποτέλεσμα δεν μπορούσε να θεωρηθεί έγκυρο εκτός εάν είχε βγει με παραγωγικό τρόπο με τις αρχές της τυπικής λογικής από τις υποθέσεις και τα αξιώματα.

Στην πραγματικότητα λοιπόν η μαθηματική επαγωγή δεν είναι καθόλου επαγωγική διαδικασία και το όνομα της το πήρε όπως μας λέει και ο Polya από το τυχαίο περιστατικό πως η πηγή του ισχυρισμού που ζητάμε ν' αποδείξουμε είναι η επαγωγή και η απόδειξη εμφανίζεται έτσι σαν μαθηματικό συμπλήρωμα του επαγωγικού πειραματισμού ([16], P:120).

Η απόδειξη λοιπόν μιας πρότασης με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής συνίσταται από δύο μέρη: α) τη βάση, την απόδειξη δηλαδή ότι η πρόταση αληθεύει για $\nu = 1$ ή τον ελάχιστο φυσικό αριθμό ν_0 και β) το επαγωγικό βήμα που συνιστά μια απόδειξη (παραγωγική) του γενικού ισχυρισμού πως εάν ισχύει η πρόταση για $\nu = \kappa$ τότε θα ισχύει και για $\nu = \kappa + 1$.

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής είναι μια ακριβώς διατυπωμένη πρόταση της οποίας η διαισθητική πειστικότητα θεωρείται από τους μαθηματικούς αναμφισβήτητη. Εμφανίζεται όμως και σαν αξίωμα στην αξιωματική κατασκευή της αριθμητικής, επιτρέποντας έτσι την εξαγωγή μιας καθαρά παραγωγικής απόδειξης για το ότι μια πρόταση που εξαρτάται από το φυσικό αριθμό ν ισχύει για όλους τους φυσικούς, από τη βάση και το επαγωγικό βήμα.

Η μαθηματική επαγωγή όμως σαν παραγωγική ή απαγωγική μέθοδος απόκτησης της γνώσης έχει τις αδυναμίες και τις ατέλειές της και με κανένα τρόπο δεν μπορεί να εκφράσει το ζηλευτό και αξιοθαύμαστο πλούτο των μορφών που χρησιμοποιεί η ανθρώπινη νόηση για την κατάκτηση της αλήθειας και της γνώσης του κόσμου που μας περιβάλλει.

Η μαθηματική επαγωγή όπως κι οποιαδήποτε παραγωγική μέθοδος συλλογισμού δεν είναι σε θέση από μόνη της ν' ανακαλύψει καινούργια γνώση, καινούργιες αλήθειες, για τον απλούστατο λόγο πως η αφετηρία από την οποία αρχίζει την κίνησή της, η γνώση δηλαδή του γενικού, έχει ανάγκη θεμελίωσης και είναι αποτέλεσμα κάποιων άλλων τρόπων γνώσης καθώς και της επαγωγής. Επομένως οι πηγές της ξεκινούν από κάτι που δεν είναι απαγωγή ([20], σελ. 294). Και είναι φυσικό βέβαια για ν' αποδειχτεί κάτι με παραγωγικό τρόπο να είναι γνωστό με άλλες μεθόδους προηγούμενα αυτό το κάτι.

Ο I. Lakatos ([10], P:9) μας παραθέτει αποσπάσματα των Πρόκλου, Πάππου, Χρύσιππου, Euler, Polya κ.α. που φαίνετια ότι ήταν κοινή πίστη στους μαθηματικούς όλων των εποχών πως οι εικασίες (ή τα θεωρήματα) προηγούνται των αποδείξεων τους στην ευρετική διάταξη. Η αντίληψη αυτή συνοψίζεται στα λόγια του Riemann: «Τα θεωρήματα να είχα μόνο και μετά θα εύρισκα αρκετά εύκολα τις αποδείξεις». Ή «Στείλε μου τα θεωρήματα και εγώ θα σου βρω τις αποδείξεις» του Χρύσιππου.

Πρέπει λοιπόν με κάποιους άλλους τρόπους και μεθόδους ν' ανακαλύψει κανείς πρώτα τα θεωρήματα και τις προτάσεις για να τις αποδείξει μετά με την μαθηματική επαγωγή ή με οποιονδήποτε άλλον παραγωγικό τρόπο. Αυτή είναι και η βασική αδυναμία της μαθηματικής επαγωγής και οποιασδήποτε παραγωγικής μεθόδου, ότι δηλαδή δεν επιτρέπει από μόνη της την ανακάλυψη νέων γνώσεων, το προχώρημα σε νέους παρθένους τομείς της πραγματικότητας.

Η απαγωγή, ή παραγωγική σκέψη δεν μπορεί να λύσει μόνη της αυτό το πρόβλημα, χρειάζονται μια σειρά άλλοι τρόποι και μέθοδοι γνώσης (ανάλυση - σύνθεση, πορεία από το αφηρημένο στο συγκεκριμένο, από το μερικό στο γενικό, επαγωγή, διαλεκτική λογική, κτλπ). για να πετύχουμε τον παραπάνω σκοπό. Ειδικά η μαθηματική επαγωγή πάνω στους φυσικούς αριθμούς είναι μια μέθοδος για την απόδειξη συμπερασμάτων που είναι αριθμητικά στη μορφή αλλά πιθανόν γεωμετρικής ή κάποιας άλλης φύσης στο περιεχόμενο (βλέπε π.χ. [9]).

Λόγω λοιπόν αυτής της ιδιαίτερης αριθμητικής φύσης, τις περισσότερες φορές οι προτάσεις την αλήθεια των οποίων καλείται να πιστοποιήσει η μαθηματική επαγωγή, είναι αποτέλεσμα της επαγωγικής μεθόδου γενίκευσης που έχει την πηγή της στην παρατήρηση και πειραματικό έλεγχο. Από το ότι δηλαδή, όπως π.χ. μας λέει ο Polya, παρατηρήσαμε τυχαία ίσως ότι:

$$1 = 1^2$$
$$1 + 2^3 = 3^2 = (1 + 2)^2$$
$$1 + 2^3 + 3^3 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$$
$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$$

κ.τ.λ.π.

και εντυπωσιαζόμενοι από την κανονικότητα αυτή, μας δημιουργείται η επιθυμία να ελέγξουμε αν ισχύει αυτό το πρότυπο γενικά για όλους τους φυσικούς και δεν είναι μόνο ένα τυχαίο περιστατικό. Έτσι διαμορφώνουμε μια εικασία, μια υπόθεση διατυπώνοντας τον ισχυρισμό ότι $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \nu^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + \nu)^2 \ \nu \ \nu \subset N^*$. Από δω και πέρα κινητοποιούμε τις παραδεδεγμένες αυστηρές μεθόδους παραγωγικού συλλογισμού, που στην περίπτωση μας είναι η μαθηματική επαγωγή, για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό ή να τον τροποποιήσουμε ή να τον αρνηθούμε.

Η μαθηματική επαγωγή έτσι φαίνεται ακατανόητη χωρίς την επαγωγή, γιατί η γενική θέση που χρησιμοποιείται σαν αφετηριακό σημείο της είναι αποτέλεσμα της επαγωγής. Η μαθηματική επαγωγή αρχίζει από κει που τελειώνει η εργασία της επαγωγής.

Η σωστή λύση του ζητήματος της ουσίας της επαγωγής και της απαγωγής, που μια μορφή της είναι και η μαθηματική επαγωγή, του ρόλου και της θέσης τους στη λειτουργία της γνώσης είναι δυνατή μόνο όταν υπολογίζουμε την αλληλοσυσχέτιση τους, την αμοιβαία εξάρτηση, τη διαλεκτική τους ενότητα. Σαν αντίθετα κατευθυνόμενες μέθοδες γνώσης συμπληρώνουν αμοιβαία και προϋποθέτουν η μία την άλλη. Κάθε μια τους έχει τα όριά της, τις θετικές και αρνητικές της πλευρές και γι' αυτό δεν μπορούν να υπάρξουν αυτοτελείς και μόνο η ενότητα της μιας με την άλλη αποτελεί τη λυδία λίθο πραγματοποίησης βέλτιστης αποδοτικότητας και εξάντλησης των δυνατοτήτων τους για γνώση.

«Αντί ν' ανεβάζουμε μονόπλευρα ως τα σύννεφα τη μια σε βάρος της άλλης, θα πρέπει να προσπαθούμε να δώσουμε στην κάθε μια τη θέση της· κι αυτό μπορεί να γίνει μόνον όταν θα έχουμε υπόψη μας πως αποτελούν δυάδα, πως η μια συμπληρώνει την άλλη». ([6], σελ. 337).

Η διαδικασία όμως της ανακάλυψης και του προχωρήματος της μαθηματικής γνώσης είναι ένα πληθωρικό φαινόμενο και σε καμιά περίπτωση δεν βολεύεται σε απόλυτα σχήματα και μεμονωμένα κλισέ του τύπου επαγωγής - μαθηματικής επαγωγής - ανάλυσης - σύνθεσης - παραγωγικής απόδειξης κτλπ. Η πορεία της ανθρώπινης νόησης για την κατάκτηση της γνώσης γίνεται με ζικ-ζακ με βήματα μπρος-πίσω, όπου τα κύρια όπλα και εργαλεία για την κατάκτηση του άγνωστου είναι όλος ο πλούτος των μορφών νόησης στη διαλεκτική τους σχέση και ενότητα. Συνολικά η πρόοδος είναι μια διακινδύνευση προς το άγνωστο, προς τις ανοιχτές δηλαδή δυνατότητες.

Η εξειδίκευση αυτής της φιλοσοφικής αντίληψης στο μαθηματικό χώρο εκφράζεται σήμερα από τη θεωρία επιστημονικής ανακάλυψης των Popper - Lakatos ([10], [19]), αν βέβαια την απαλλάξουμε από τις υπερβολικές ακρότητες και απολυτότητες (π.χ. υπερτονισμός του ρόλου του τυχαίου, θεοποίηση της μεθόδου δοκιμής - λάθους στη διαδικασία ανακάλυψης κ.α.).

Έτσι λοιπόν σύμφωνα με τον Popper η επιστήμη αρχίζει με τα προβλήματα. Στην προσπάθεια να λύσουμε τα προβλήματα αυτά προτείνουμε πολλές θεωρίες, συχνά αντιφατικές και αντιμαχόμενες μεταξύ τους. Οι θεωρίες αυτές υπόκεινται σε μια διαδικασία επιλογής με αποκλεισμό των λαθών μέσ' από κριτική διερεύνηση. Ο σκοπός του επιστήμονα είναι να διαψεύδει τις τολμηρές θεωρίες και όχι να τις επιβεβαιώνει. Τα αποτελέσματα της επιστημονικής έρευνας γεννούν ένα νέο κύκλο προβλημάτων και ο κύκλος επαναλαμβάνεται.

Στο μαθηματικό πεδίο η θεωρία αυτή αντικαθιστά την αυστηρή τυπική παραγωγική απόδειξη, με την αποδεικτική ανάλυση που αναπτύσσεται σ' ένα μη αυστηρό πλαίσιο. Δεν υπάρχουν αυστηροί κανόνες και περιορισμοί στα νοητικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται. Το μαθηματικό πρόβλημα που μας απασχολεί είναι αποτέλεσμα προηγούμενης έρευνας ή παρατήρησης και το πρώτο βήμα για τη λύση του είναι η διαμόρφωση μιας εικασίας. Κατόπι η εικασία αυτή υπόκειται σε κριτική, αποσυντίθεται σε υποεικασίες, αναζητούνται αντιπαραδείγματα για την ανασκευή των εικασιών ή επαναδιατύπωση των υποθέσεων.

Στο πρότυπο αυτό της μαθηματικής ανακάλυψης ο Lakatos διακρίνει 4 φάσεις: α) Διατύπωση πρωταρχικής εικασίας. β) Αποδεικτική ανάλυση όπου αποσυντίθεται η πρωταρχική εικασία σε υποεικασίες ή λήμματα. γ) Εμφάνιση σφαιρικών αντιπαραδειγμάτων για την αρχική εικασία. δ) Επανεξέταση της απόδειξης όπου συνήθως ανακαλύπτεται ένα ένοχο λήμμα σαν μια ουσιώδης υπόθεση που δεν διατυπώθηκε στην αρχική εικασία. Έτσι τροποποιείται η αρχική εικασία για να συμπεριλάβει το λήμμα σαν υπόθεση κτλπ.

Η διαδικασία με την οποία αναπτύσσονται τα μαθηματικά είναι εκείνη της απόδειξης και της ανασκευής. Όχι μόνο της απόδειξης. Η διαδικασία προχωράει όχι μόνο σε μια κατεύθυνση αλλά αμφίδρομα (μπρος-πίσω) έτσι που η αποδεικτική ανάλυση απέχει πολύ από το να είναι μόνο μια σειρά λογικών, αυστηρών παραγωγικών βημάτων. Απεναντίας είναι μια πρόσκληση για εφαρμογή ενός, εντυπωσιακού για τον πλούτο του, πλήθους από μεθόδους ανακάλυψης, ευριστικών ή συστηματικών που επιστρατεύονται για να επεξεργαστούν την αρχική εικασία, να την ραφινάρουν και βελτιώσουν και τελικά να την μετασχηματίσουν σε μια νέα μαθηματική αλήθεια (βλέπε και [18]).

4. Συμπεράσματα για τη διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής: Δυστυχώς η αμύθητης αξίας κληρονομιά του Ευκλείδη και του έργου του βαραίνει επικίνδυνα ακόμη και σήμερα στη διαμόρφωση νοοτροπίας και μορφής παρουσίασης στη μαθηματική εκπαίδευση, κυρίως στις χώρες που όπως η δική μας π.χ. είναι ανύπαρκτη η έρευνα για τη διδακτική των μαθηματικών. Έτσι έχει γίνει πια κατεστημένο, πάγιο, υποχρεωτικό θα λέγαμε το παραγωγικό στυλ παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών μέσ' από τα διδακτικά βιβλία ακολουθώντας τη σειρά: αξιώματα, ορισμοί, λήμματα, θεωρήματα, αποδείξεις, πορίσματα, ασκήσεις. Σύμφωνα με το Ευκλείδιο αυτό στυλ όλες οι προτάσεις εμφανίζονται ή μόνο αληθείς ή μόνο ψευδείς ενώ τα μαθηματικά παρουσιάζονται σαν ένα σύνολο αιώνιων, αμετάβλητων και αναλλοίωτων αληθειών. Καμιά αναφορά για το πως δημιουργήθηκαν αυτά τα αξιώματα και αναπτύχθηκαν οι ορισμοί. Κανένα φως ή σημάδι για το πως εμφανίστηκαν και διατυπώθηκαν αυτά τα θεωρήματα τα οποία καλούνται οι μαθητές ν' αποδείξουν. Πλήρης δηλαδή μυστικισμός και καλλιέργεια δέους που με τη σειρά της δημιουργεί φυσιολογικά στους μαθητές απέχθεια, φοβία, ανακατωμένη με αισθήματα αηδίας και αποστροφής για την επιστήμη που αποτέλεσε τη δόξα των προγόνων τους. Ο μύθος των πρωτοπλάστων επαναλαμβάνεται. Ο αγώνας και οι μαγευτικές συγκινήσεις της διανοητικής περιπέτειας προς την ανακάλυψη αποκρύπτονται με προσοχή και επιμέλεια σαν ένας άλλος σύγχρονος απαγορευμένος καρπός.

Έτσι για να παραφράσουμε λίγο τα λόγια του R. B. Braithwaite: «Ο καλός άγγελος των μαθηματικών και της ανιδιοτελούς επιστήμης, ο Ευκλείδης έχει γίνει ο κακός δαίμονας της μαθηματικής εκπαίδευσης και της φιλοσοφίας της επιστήμης ([3]).

Το κακό βέβαια συνεχίζεται με την μοιραία τις περισσότερες φορές ταύτιση της αρρωστημένης αυτής νοοτροπίας με τον καθηγητή των μαθηματικών που, όπως μας πληροφορεί η έρευνα ([23], p: 101), ακολουθεί πιστά το διδακτικό βιβλίο και συνειδητά ή όχι εμφανίζεται σαν το εκτελεστικό όργανο της πνευματοκτόνας αυτής στρατηγικής.

Δεν θα ήταν λογικό βέβαια να δημιουργούσε κανείς την εντύπωση πως θα ξέφευγε από τα παραπάνω πρότυπα και θα παρέκλινε κάπως από τα παραπάνω στάνταρντ η παρουσίαση της μαθηματικής επαγωγής από τα δικά μας σχολικά διδακτικά βιβλία. Κάθε άλλο· η μαθηματική επαγωγή σαν διαδικασία εμφανίζεται μονόπλευρα και αποκομένη από τη συμπληρωματική και αναπόσπαστη πηγή της την ατελή επαγωγή, με μια τάση υπερτίμησης και θεοποίησης της αξίας της σαν αποδεικτικής μεθόδου. Και στα δυο βιβλία (γενικού λυκείου — πολυκλαδικού, [13], [14]) γίνεται προσπάθεια να μυηθούν οι μαθητές στην αποδεικτική αυτή μέθοδο με το να αποδείξουν διάφορες προτάσεις του στυλ: "Ν' αποδειχτεί ότι το άθροισμα των $\nu + 1$ διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με $\frac{1}{2}\nu(\nu + 1)$". "Να αποδειχτεί ότι $0^2 + 1^2 + ... + \nu^2 = \frac{1}{6}\nu(\nu + 1)(2\nu + 1)$". "Ν' αποδειχτεί ότι $\forall \nu \in N$ ισχύει $2^\nu > 1 + \nu$". "Ν' αποδειχτεί ότι $\forall \nu \in N$ με $\nu \geqslant 4$ ισχύει $2^\nu \geq \nu^2$". κ.τ.λ. Επίσης όλες οι ασκήσεις (8 στο ένα και 17 στο άλλο) είναι της μορφής: "Ν' αποδειχτεί ότι..."

Το παν δηλαδή, η πεμπτουσία της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η απόδειξη. ʹΟταν ο μαθητής μπορεί να παπαγαλίζει μια απόδειξη (γιατί αυτό κάνει στην περίπτωση τουλάχιστο της μαθηματικής επαγωγής), ξανοίγονται μπροστά του οι λεωφόροι της ευημερίας και της προόδου κατά την άποψη των "δικών" μας "ειδικών".

Και ήταν φυσικό να επικρατήσει αυτή η μορφή παρουσίασης σαν η πιο "οικονομική" από πολλές πλευρές (ξεμπερδεύουμε λύνοντας τους λογαριασμούς μας στα γρήγορα με τους μαθητές), αφού ο πρωταρχικός σκοπός της μαθηματικής μας εκπαίδευσης είναι η πολυγνωσία που καλλιεργείται μέσ' από αρρωστημένα, επαρχιώτικα σύνδρομα μειονεκτικότητας μαζί με την άρνηση της πολιτείας να προσφέρει μαθηματική παιδεία που θα ικανοποιεί τα διαφορετικά ενδιαφέροντα των μαθητών.

Μα δεν σκέφτηκε τέλος πάντων κάποιος πως η απόδειξη με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής είναι σχεδόν άχρηστη όταν δεν ξέρουμε τι πρέπει ν' αποδείξουμε; Πως θ' αποδείξουμε με τη μαθηματική επαγωγή ότι π.χ. $2^\nu \geq \nu^2$ όταν προηγούμενα δεν έχουμε ανακαλύψει με μια ευρετική διαδικασία πως ίσως $2^\nu \geqslant \nu^2 \ \forall \nu \in N^*$. Και πως θα φτάσει ο μαθητής σ' αυτήν την ανακάλυψη; Μα πως αλλιώς, με την ειδίκευση, το πείραμα (επαγωγή) και το ότι $2^\nu \geq \nu^2$ και κατόπιν φυσιολογικά στην επιθυμία να σιγουρευτεί με ένα έγκυρο τρόπο, κάνοντας δηλαδή μια απόδειξη με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής.

Αυτά είναι τα στάδια που πρέπει να ακολουθήσει μια διδασκαλία που θα έχει σαν σκοπό της να διεγείρει τους μαθητές και να τους οδηγήσει σε μια μικρή περιπέτεια, ανταποκρινόμενη στην παιδική τους φύση για ενεργητική συμμετοχή σε διαδικασίες διερεύνησης και ανακάλυψης.

Δεν είναι δυνατόν τη σημερινή εποχή με τις διακηρύξεις για παροχή αντιαυταρχικής εκπαίδευσης να διατάζουμε τα παιδιά να αποδείξουν ότι $2^\nu \geq \nu^2$. Πρέπει εξάλλου να μη μας διαφεύγει ποτέ στη διδακτική μας πρακτική ότι μια κατάσταση που τη θεωρούμε εμείς πρόβλημα δεν είναι απαραίτητο να σημαίνει το ίδιο και για κάποιον άλλον. Μια κατάσταση γίνεται πρόβλημα για κάποιον απ' τη στιγμή που αισθανθεί την ανάγκη να τη διερευνήσει και να συμμετάσχει σε μια προσπάθεια για την επίλυσή του ([24]).

Το αποτέλεσμα λοιπόν αυτής της δογματικής, αλαζονικής συμπεριφοράς και νοοτροπίας που επιβάλλει στους μαθητές ν' αποδείξουν με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής διάφορες προτάσεις, χωρίς λειτουργική διασύνδεση με τον πλήρη κύκλο του νοητικού μηχανισμού διερεύνησης μιας προβληματικής κατάστασης, είναι "πλίνθοι, λίθοι και κέραμοι ατάκτως ερριμμέναι" μια απογοητευτική κατάσταση που μοιάζει με τη μάταιη προσπάθεια να ξεχωρίσεις το βόρειο από το νότιο πόλο ενός μαγνήτη.

5) Ειδικά διδακτικά προβλήματα: Όπως οποιαδήποτε μαθηματική έννοια ή μέθοδος έτσι και η μαθηματική επαγωγή παρουσιάζει ιδιαίτερα προβλήματα παρουσίασης που έχουν σχέση με το συγκεκριμένο κάθε φορά μαθηματικό υπόβαθρο και πεδίο γνώσεων των μαθητών. Είναι πολύ δύσκολο έως ακατόρθωτο π.χ. να δείξεις την τεχνική της μαθηματικής επαγωγής σε μαθητές που δεν έχουν κάποια ευχέρεια στις αλγεβρικές πράξεις για να μπορέσουν να κάνουν με επιτυχία το πέρασμα από το ν στο $\nu + 1$.

Το πρόβλημα αυτό έχει σχέση με τη στήριξη της καινούργιας γνώσης στην προηγούμενη αποκτηθείσα εμπειρία και κατανόηση και εμφανίζεται κατά τη διδασκαλία για την εκμάθηση κάποιας ικανότητας από μέρους του μαθητή ([25]).

Μια γνωστική ανάλυση της έννοιας είναι πολύ χρήσιμη πάντα στον καθηγητή γιατί τον βοηθάει ν' ανακαλύψει τις προαπαιτούμενες γνώσεις στηρίγματα και έτσι ν' αποφύγει τα γνωστικά κενά ή να επινοήσει κάποιους τρόπους για να τα καλύψει. Και τα δυο βιβλία μαθηματικών Α' λυκείου διαπραγματεύονται τη μαθηματική επαγωγή στην αρχή μετά ακριβώς το κεφάλαιο με τα στοιχεία της μαθηματικής λογικής. Έτσι ο μαθητής μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα μη επαφής με τις αλγεβρικές πράξεις και τεχνικές παραγοντοποίησης, συναντά μεγάλα εμπόδια όχι μόνο με το γενικό πλαίσιο κατανόησης της αποδεικτικής μεθόδου αλλά και με το τεχνικό, καθώς προσπαθεί να δείξει ότι αληθεύει η πρόταση για $\nu = \kappa + 1$ με την υπόθεση ότι αληθεύει για $\nu = \kappa$.

Ας δούμε όμως κάποιο συγκεκριμένο παράδειγμα: Οι συγγραφείς π.χ. του βιβλίου για το πολυκλαδικό έχουν φροντίσει με την πρώτη άσκηση που θα προσπαθήσει να λύσει ο ανυποψίαστος μαθητής να πάθει τέτοιο "σοκ" που να μη διανοηθεί ούτε καν να δημιουργήσει τη ψευδαίσθηση πως έχει έστω και 1% πιθανότητες να λύσει κάποια από τις επόμενες ασκήσεις.

Λέει λοιπόν η πρώτη άσκηση: "Ν' αποδειχθεί ότι

$$1^4 + 2^4 + \dots + \nu^4 = \frac{1}{30}\,\nu \cdot (\nu + 1) \cdot (6\nu^3 + 9\nu^2 + \nu - 1)".$$

Με την υπόθεση λοιπόν ότι ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλαδή

$$1^4 + 2^4 + \dots + \kappa^4 = \frac{1}{30}\,\kappa\,(\kappa + 1)(6\kappa^3 + 9\kappa^2 + \kappa - 1)$$

θα αποδείξει ότι

$$1^4 + 2^4 + \dots + \kappa^4 + (\kappa + 1)^4 = \frac{1}{30}\,(\kappa + 1)(\kappa + 2)$$

$$[6(\kappa + 1)^3 + 9(\kappa + 1)^2 + (\kappa + 1) - 1] =$$

$$= \frac{1}{30}\,(\kappa + 1)(\kappa + 2)(6\kappa^3 + 27\kappa^2 + 37\kappa + 15)$$

(αν καταφέρει να κάνει τις πράξεις).

Απόδειξη:

$$1^4 + 2^4 + \dots + \kappa^4 + (\kappa + 1)^4 = \frac{1}{30}\,\kappa\,(\kappa + 1)(6\kappa^3 + 9\kappa^2 + \kappa - 1) +$$

$$+ (\kappa + 1)^4 = \frac{\kappa \cdot (\kappa + 1) \cdot (6\kappa^3 + 9\kappa^2 + \kappa - 1) + 30\,(\kappa + 1)^4}{30} =$$

$$= \frac{\kappa + 1}{30} \cdot (6\kappa^4 + 39\kappa^3 + 91\kappa^2 + 89\kappa + 30)$$

πως θα παραγοντοποιήσει τώρα το πολυώνυμο

$$6\kappa^4 + 39\kappa^3 + 91\kappa^2 + 89\kappa + 30;$$

Και ο πιο ικανός μαθητής θ' αποτύχει σίγουρα. Αλλά κι αν καταφύγει στη λύση θα βρει την εξής "θεία χάριτι" ανάλυση:

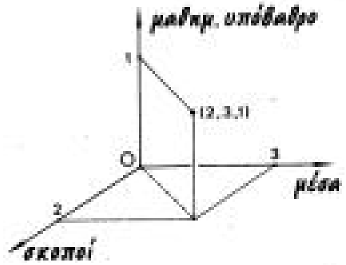
$$\frac{κ+1}{30}\,(6κ^4 + 39κ^3 + 91κ^2 + 89κ + 30) = \frac{κ+1}{30}$$

$$[κ\,(6κ^3 + 27κ^2 + 37κ + 15) + 2\,(6κ^3 + 27κ^2 + 37κ + 15)]!!! =$$

$$= \frac{1}{30}\,(κ + 1)(κ + 2)(6κ^3 + 27κ^2 + 37κ + 15)$$

που θα του δώσει τη χαριστική βολή για το τι μαθηματικά τον περιμένουν.

Αλλά και άλλες ασκήσεις που αναφέρονται σε πολ/σια ή σε ανισοτικές σχέσεις απαιτούν μια εμπειρία από τον μαθητή και μια ευχέρεια στον αλγεβρικό λογισμό που δεν διαθέτει, με αποτέλεσμα η διδασκαλία και γι' αυτό το λόγο να οδηγείται σε αποτυχία.



6) Ένα μοντέλο για τη διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής: Με βάση την αντίληψή μας για τη διαλεκτική σχέση επαγωγής — μαθηματικής επαγωγής και τη φιλοσοφία μας για τη φύση και δημιουργική ανάπτυξη των μαθηματικών, θα προτείνουμε ένα τρισδιάστατο απλό μοντέλο διδασκαλίας στο οποίο τα διδακτικά προϊόντα θα ορίζονται από τρεις συντεταγμένες (σκοποί, μέσα, μαθηματικό υπόβαθρο) όπως στο παρακάτω σχήμα:

Το διδακτικό π.χ. αποτέλεσμα (2, 3, 1) σημαίνει ότι επιτύχαμε τον σκοπό 2 με το μέσο 3 στηριζόμενοι στο μαθηματικό υπόβαθρο 1, κ.τ.λ.

Κάθε διδακτικός σκοπός δηλαδή μπορεί να επιτευχθεί με πολλά διδακτικά μέσα ανάλογα κάθε φορά με τις προαπαιτούμενες γνώσεις και το μαθηματικό υπόβαθρο του μαθητή. Παρακάτω θα παραθέσουμε κάποιους σκοπούς-στόχους και θα αναφέρουμε ταυτόχρονα και μια σειρά από μέσα που νομίζουμε ότι βοηθούν στην υλοποίησή τους. Έτσι δίνεται ταυτόχρονα και στον καθηγητή η ευκαιρία να διαλέξει αυτό που ταιριάζει καλύτερα στις ιδιομορφίες και ιδιαιτερότητες της τάξης αλλά και στο προσωπικό του στυλ.

Α) Βασικός σκοπός: Η διδασκαλία πρέπει ν' ακολουθεί και να επαναλαμβάνει τις ιστορικές φάσεις ανάπτυξης της έννοιας της μαθηματικής επαγωγής.

1. *Εξοικείωση του μαθητή με τον επαγωγικό συλλογισμό*

Μέσα: Το πιο πρόσφορο μέσο για το σκοπό αυτό είναι η μελέτη και παρατήρηση διαφόρων προτύπων που κρύβουν μια κανονικότητα και ένα νόμο σχηματισμού. Τα μαθηματικά κατά τον W.W. Sawyer είναι «η ταξινόμηση και η μελέτη όλων των δυνατών προτύπων» ([26], P:12), ενώ από πολλούς μαθηματικούς έχει τονιστεί η σπουδαιότητα της παρατήρησης που ανοίγει το δρόμο στις μαθηματικές ανακαλύψεις. "Μια από τις πιο ευχάριστες πλευρές των μαθηματικών είναι η πλούσια αφθονία των προτύπων που εμφανίζονται σ' όλους του κλάδους των» ([12], P: 89). Οι φυσικοί αριθμοί με τις ιδιότητές τους είναι μια ανεξάρτητη πηγή τέτοιων προτύπων, που η ανίχνευση τους βρίσκεται μέσα στις δυνατότητες των μαθητών που για πρώτη φορά ασχολούνται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

α) Ο καθηγητής γράφει στον πίνακα τις ισότητες:

$$1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$$

$$1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2}$$

Ρωτάει κατόπιν τους μαθητές αν μπορούν να συμπεράνουν ποια είναι η τιμή του αθροίσματος των ν διαδοχικών φυσικών αριθμών. Η απάντηση έρχεται γρήγορα:

$$1 + 2 + 3 + ... + \nu = \frac{\nu(\nu + 1)}{2} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$$

β) Με τον ίδιο τρόπο ξεκινώντας από το ότι:

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 \cdot 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

εύκολα μπορούν να συμπεράνουν ότι

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2\nu - 1) = \nu^2, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$$

γ) Ο καθηγητής ζωγραφίζει πολύγωνα με πλευρές 4, 5, 6, 7 και ζητάει απ' όλους τους μαθητές να βρουν το πρότυπο με το οποίο σχηματίζεται ο αριθμός των διαγωνίων τους.

Στην ερώτηση ποιός είναι τώρα ο αριθμός των διαγώνιων ενός πολυγώνου με ν πλευρές ($\nu \geq 4$) γενικά, θα απαντήσουν με ευκολία $\quad \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$

Σ' όλα αυτά τα παραδείγματα οι μαθητές έφτασαν σε κάποιο μαθηματικό συμπέρασμα, απόκτησαν κάποια γνώση με τη βοήθεια της ατελούς επαγωγής παρατηρώντας σε ειδικά παραδείγματα και γενικεύοντας. Δεν θα πρέπει όμως να δημιουργήσουν την εσφαλμένη εντύπωση πως η μέθοδος αυτή μας οδηγεί πάντα σε ασφαλή γνώση. Γι' αυτό ο δεύτερος στόχος πρέπει να είναι:

2) *Κατάδειξη της ανεπάρκειας του επαγωγικού συλλογισμού:* Οι μαθητές πρέπει να πεισθούν ότι ένας ισχυρισμός μπορεί να είναι σωστός για μια ολόκληρη σειρά ειδικών περιπτώσεων και όμως να μην ισχύει γενικά.

Μέσα:

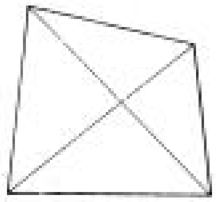
α) Ο καθηγητής για να εντυπωσιάσει τους μαθητές του αναφέρει μια ιστορία για το μεγάλο μαθηματικό Euler που σκεφτόμενος όπως στα προηγούμενα παραδείγματα ισχυρίστηκε ότι ο τύπος $\nu^2 + \nu + 41$ μας δίνει πρώτους αριθμούς $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Πράγματι μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να ελέγξουν τον ισχυρισμό αυτό για $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ μέχρι και 39 που βρίσκεται πρώτος αριθμός. Για $\nu = 40$ όμως έχουμε

$$40^2 + 40 + 41 = 40\,(40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41$$

σύνθετος.

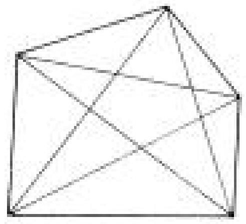
β) Με παρόμοιο τρόπο μπορεί ν' αναφέρει κανείς την πλάνη του Fermat που μελέτησε τους φυσικούς αριθμούς της μορφής $x_\nu = 2^{2^\nu} + 1$. Για $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ οι αριθμοί $x_0 = 3$, $x_1 = 5$, $x_2 = 17$, $x_3 = 257$, $x_4 = 65537$ είναι πρώτοι.

4 πλευρές,



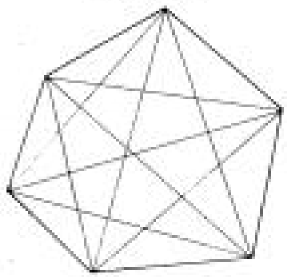
διαγώνιοι $2 = \dfrac{4\,(4-3)}{2}$

5 πλευρές,



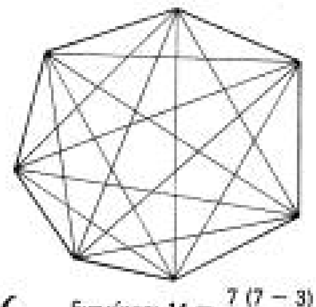
διαγώνιοι $5 = \dfrac{5\,(5-3)}{2}$

6 πλευρές,



διαγώνιοι $9 = \dfrac{6\,(6-3)}{2}$

7 πλευρές



διαγώνιοι $14 = \dfrac{7\,(7-3)}{2}$

Τον 18ο αιώνα όμως ο Euler ανακάλυψε ότι

$$x_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

δηλαδή σύνθετος.

γ) Ο G. W. Leibnitz επίσης παρατήρησε και απόδειξε ότι για κάθε φυσικό ν, ο αριθμός $\nu^3 - \nu$ διαιρείται με το 3, ο αριθμός $\nu^5 - \nu$ διαιρείται με το 5, ο $\nu^7 - \nu$ διαιρείται με το 7. Έτσι συμπέρανε ότι για κάθε περιττό κ και οποιονδήποτε φυσικό αριθ. ν, ο $\nu^\kappa - \nu$ διαιρείται με το κ. Γρήγορα όμως κατάλαβε ότι το πρότυπο αυτό δεν ήταν σωστό γιατί $2^9 - 2 = 510$ που δεν διαιρείται με το 9.

δ) Ένα άλλο παράδειγμα που σίγουρα πείθει τους μαθητές για την ανασφάλεια της επαγωγικής μεθόδου, γιατί μας δίνει σωστά αποτελέσματα για πολύ μεγάλο αριθμό περιπτώσεων, είναι το εξής: Εάν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς ν = 1, 2, 3, 4... στην έκφραση $991\nu^2 + 1$ ουδέποτε θα πάρουμε αριθμό που να είναι τέλειο τετράγωνο όσες μέρες κι αν ψάχνουμε. Και αυτό γιατί η ελάχιστη τιμή του ν για την οποία ο αριθμός $991\nu^2 + 1$ είναι τέλειο τετράγωνο είναι: ν = 12055 735 790 331 359 447 442 538 767 (βλέπε και [27]).

3) *Αναζήτηση μιας έγκυρης μεθόδου για την ασφαλή εξαγωγή συμπερασμάτων: Η μαθηματική επαγωγή:* Από τα τελευταία παραδείγματα θα έχει κλονιστεί η εμπιστοσύνη των μαθητών για την αποτελεσματικότητα της επαγωγικής μεθόδου και θα αρχίζουν ν' αμφισβητούν και την ορθότητα και των προηγούμενων συμπερασμάτων της, δηλαδή ότι $1 + 2 + 3 + \ldots$

$$+ \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2},\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2\nu - 1) = \nu^2$$ κ.τ.λ. Θ' αρχίσουν βέβαια να ρωτούν τον καθηγητή με αισθήματα έντονης περιέργειας τι πρέπει να γίνει για να βγουν από το αδιέξοδο. Αυτό το σημείο είναι από παιδαγωγικής άποψης και το πιο κατάλληλο για να αναπτύξει κανείς την κεντρική ιδέα της μαθηματικής επαγωγής.

Ο καθηγητής δηλαδή θα τους εξηγήσει ότι είναι ασύμφορο και αδύνατο συγχρόνως να ελέγξει κανείς όλες τις δυνατές περιπτώσεις κάθε φορά γιατί είναι άπειρες. Επομένως ένας σύντομος απλός και ασφαλής τρόπος είναι να ελέγξει κάποιος πρώτα εάν η πρόταση ισχύει για ν = 1 ή να βρει τον ελάχιστο φυσικό αριθμό για τον οποίο ισχύει. Κατόπιν να προσπαθήσει ν' αποδείξει μ' ένα γενικό όμως τρόπο πως εάν ισχύει για κάποιον φυσικό αριθμό θα ισχύει και για τον επόμενο του. Αν το κάνει αυτό τότε αφού ισχύει για $\nu = 1$ μπορεί να εφαρμόσει την απόδειξή του για να δείξει ότι θα ισχύει και για $\nu = 2$. Και αφού ισχύει για $\nu = 2$ μπορεί θεωρητικά να εφαρμόσει πάλι την γενική του απόδειξη και δείχνει ότι ισχύει για $\nu = 3$ κ.τ.λ.π. Αυτή τη μέθοδο την εφαρμόζει κατόπι στα προηγούμενα απλά παραδείγματα.

4)*Εξοικείωση του μαθητή στον πλήρη κύκλο της μαθηματικής δημιουργίας και ανακάλυψης.*

Την ενότητα της μαθηματικής επαγωγής πρέπει να τη δούμε σαν μια από τις λίγες, μοναδικές ίσως ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές να μυηθούν στη διαδικασία έρευνας και να πάρουν μια γεύση του πως μπορεί να διερευνήσει κανείς ένα πρόβλημα και να πραγματοποιήσει μια μικροανακάλυψη στα μαθηματικά. Μια εμπειρία ασφαλώς πολύτιμη αφού η αξία των μαθηματικών δεν βρίσκεται στη διανοητική τέρψη που προσφέρουν αλλά στις δυνατότητες που παρέχουν για ερμηνεία και κατανόηση της φύσης και του κόσμου που μας περιβάλλει.

Κεντρικό σημείο για την επιτυχία του σκοπού αυτού αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο καθοδηγούμε την ανακάλυψη, ο τρόπος με τον οποίο δίνουμε ένα πρόβλημα για διερεύνηση. Δεν πρέπει να ξεκινάμε στην αρχή τουλάχιστον με το στερεότυπο αυταρχικό πρόσταγμα "ν' αποδείξετε ότι...". Ο τρόπος με τον οποίο ρωτούμε αποτελεί την καρδιά της διδασκαλίας. Οι ερωτήσεις του καθηγητή των μαθηματικών πρέπει να παρέχουν κίνητρα στους μαθητές, να τους διεγείρουν, να προκαλούν την ενεργητική τους συμμετοχή, να ενθαρρύνουν και καλλιεργούν την ερευνητική στάση και να ενισχύουν την παρατήρηση ([28], P: 43).

Μέσα:

α) Ο καθηγητής ρωτάει τους μαθητές ποιος είναι κατά τη γνώμη τους μεγαλύτερος ο 2^ν ή ν^2 για όλες τις τιμές του $\nu \in \mathbb{N}$ και εάν μπορούν να τεκμηριώσουν την απάντησή τους.

Καθοδηγώντας στη συνέχεια τους μαθητές του προτείνει να φτιάξουν ένα πίνακα όπου θα ελέγξουν τους αριθμούς αυτούς για τις διάφορες τιμές του ν για να δημιουργήσουν μια πρώτη αντίληψη.

ν	$2^ν$	$ν^2$
1	2	1
2	4	4
3	8	9
4	16	16
5	32	25
6	64	36
7	128	49
8	256	64
9	512	81
10	1024	100

Ενώ λοιπόν για $ν = 1, 2, 3, 4$ είναι άλλοτε ο $ν^2$ μεγαλύτερος, άλλοτε ίσος και άλλοτε μικρότερος, για $ν \geq 5$ φαίνεται ότι γίνεται μεγαλύτερος ο $2^ν$ και δείχνει την τάση να παραμένει σταθερά για όλα τα ν.

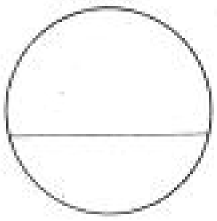
Προτρέπει στη συνέχεια λοιπόν ο καθηγητής τους μαθητές να δημιουργήσουν μια εικασία, τον ισχυρισμό ότι $2^ν > ν^2$ $\forall ν \geq 5$. Ο ισχυρισμός όμως αυτός θα πρέπει να ελεγθεί με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής για να γίνει εντελώς αποδεκτός.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να γενικευτεί: Αναθέτουμε στους μαθητές να πιστοποιήσουν σαν άσκηση στο σπίτι ότι $2^ν > ν$ $\forall ν > 1$, $2^ν > ν^2$ $\forall ν > 4$, $2^ν > ν^3$ $\forall ν > 9$, $2^ν > ν^4$ $\forall ν > 16$, $2^ν > ν^5$ $\forall ν > 25$ και βάσει αυτού να γενικεύσουν διατυπώνοντας το θεώρημα ότι για κάθε φυσικό αριθμό λ υπάρχει ένας τουλάχιστον φυσικός κ (που εξαρτάται από το λ) τέτοιος ώστε $2^ν > ν^λ$ $\forall ν > κ$ όπου $κ = λ^2$ (βλέπε και [30], Ρ: 110).

β) Ο καθηγητής ζητάει από τους μαθητές να σκεφτούν ένα μικρό αριθμό (μονοψήφιο ή διψήφιο κατά προτίμηση) και αφού τον υψώσουν στον κύβο να προσθέσουν στο αποτέλεσμα το διπλάσιο του αριθμού. Γράφουν μετά στον πίνακα τα τελικά αποτελέσματα. Αυτά μπορεί να είναι: 3, 12, 33, 72, 135, 528, 2223, 4947, 42945 κ.τ.λ.

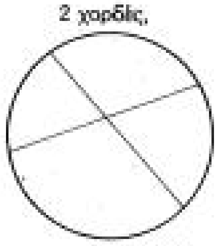
Αφού παρατηρήσουν εύκολα ότι οι αριθμοί αυτοί είναι πολ/σια του 3, ο καθηγητής τους προτρέπει να γενικεύσουν τις μερικές τους παρατηρήσεις και να διατυπώσουν μόνοι τους την υπόθεση — εικασία ότι ο αριθμός $ν^3 + 2ν$ διαιρείται με το 3 για κάθε $ν \in \mathbb{N}^*$. Μετά όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα θα ακολουθήσει ο έλεγχος με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

1 χορδή,



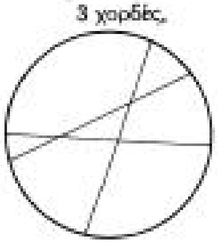
2 τμήματα

2 χορδές,



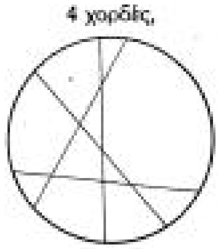
4 τμήματα

3 χορδές,



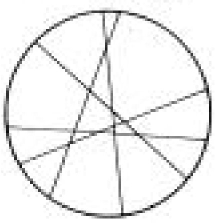
7 τμήματα

4 χορδές,



11 τμήματα

5 χορδές,



16 τμήματα

γ) Ο καθηγητής προτρέπει τους μαθητές να διερευνήσουν το πρόβλημα του καθορισμού του μέγιστου αριθμού των τμημάτων στα οποία μπορεί να διαιρεθεί ένας κύκλος από ν χορδές... Στην αρχή τους ενθαρρύνει να πειραματιστούν σε ειδικές περιπτώσεις για $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ όπου βρίσκονται τα εξής:

Εδώ ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει ότι ο αριθμός των τμημάτων 2, 4, 7, 11, 16 σχηματίζεται αν σε προηγούμενο αριθμό τμημάτων προσθέσουμε τον αριθμό των χορδών της αμέσως επόμενης περίπτωσης ($4 = 2 + 2$, $7 = 4 + 3$, $11 = 7 + 4$, κ.τ.λ.). Έτσι μπορεί να βρει ότι ο αριθμός τμημάτων για 6 χορδές είναι $16 + 6 = 22$, αλλά είναι δύσκολο να μαντεύσει τον αριθμό των τμημάτων για ν χορδές. Στο σημείο αυτό ο καθηγητής βοηθάει τους μαθητές ν' ανακαλύψουν τον γενικό τύπο που συνδέει τον αριθμό τμημάτων με τον αριθμό ν των χορδών με την παρακάτω ευρετική διαδικασία:

Αριθ. χορδών ν:	0	1	2	3	4	5	...	ν
Αριθ. τμημάτων Τ(ν):	1	2	4	7	11	16	...	Τ(ν)
Διαφ. δυο διαδοχ. όρων:	1	2	3	4	5			

παρατηρούμε ότι σε κάθε αριθμό χορδών αντιστοιχεί αριθμός τμημάτων ίσος με το άθροισμα των διαδοχικών διαφορών συν ένα. Π.χ. για $\nu = 5$ έχουμε αριθμό τμημάτων

$$T(5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 1 = 16$$

Μ' αυτό σαν βάση εύκολα μπορούν να συμπεράνουν οι μαθητές ότι ν χορδές διαιρούν τον κύκλο σε

$$(1 + 2 + 3 + ... + \nu) + 1 = \frac{\nu(\nu + 1)}{2} + 1 = \frac{\nu^2 + \nu + 2}{2}$$

τμήματα.

Βέβαια ο τύπος $T(\nu) = \dfrac{\nu_2 + \nu + 2}{2} \;\forall \nu \in \mathbb{N}$ είναι μόνο μια καλή εικασία που χρειάζεται να αποδειχτεί με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής. Πράγματι εάν υποθέσουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλ. $T(K) = \dfrac{\kappa_2 + \kappa + 2}{2}$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι: α) προσθέτοντας μια νέα χορδή στον κύκλο των κ χορδών πρέπει να τη φέρουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να τμήσει κάθε μια από τις κ χορδές.

β) Τα κ αυτά σημεία τομής διαιρούν τη χορδή σε $\kappa + 1$ μέρη. γ) Κάθε ένα απ' αυτά τα $\kappa + 1$ μέρη διαιρεί κάποιο από τα Τ(κ) τμήματα του κύκλου σε δύο μέρη. Έτσι

$$T(\kappa+1) = = T(\kappa) + \kappa + 1 = \frac{\kappa^2+\kappa+2}{2} + \kappa + 1 =$$

$$= \frac{\kappa^2+\kappa+2+2\kappa+2}{2} = \frac{(\kappa+1)^2+(\kappa+1)+2}{2}$$

(βλέπε και [11], [29]).

Β) Επί μέρους σκοποί

1) *Κατανόηση της μεθόδου αυτής καθ' εαυτής*: Πολλοί είναι οι μαθητές που για διαφορετικούς κάθε φορά λόγους αδυνατούν να κατανοήσουν πως λειτουργεί η μαθηματική επαγωγή σαν αποδεικτική μέθοδος, γιατί εάν την εφαρμόσουμε, σωστά έχουμε αποδείξει ότι η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό, ποια είναι η αναγκαιότητα των σταδίων κ.τ.λ.

Κάποιοι συγγραφείς χωρίζουν τη διαδικασία σε τρία στάδια: α) έλεγχος για $\nu = 1$ β) υπόθεση ότι ισχύει για $\nu = \kappa$ γ) απόδειξη ότι ισχύει για $\nu = \kappa + 1$.

Νομίζουμε όμως ότι αυτή η αντιμετώπιση ευνοεί τη μηχανοποίηση της σκέψης, ενισχύει τον κίνδυνο μη σφαιρικής κατανόησης της μεθόδου και δεν βοηθάει το μαθητή στην απαραίτητη σύνδεση του β και γ σταδίου. Γι' αυτό πιστεύουμε ότι πρέπει να επιμένουμε στα δυο στάδια: α) για τη βάση και β) το πέρασμα στο $\nu + 1$ με την υπόθεση ότι ισχύει για το ν.

Για να τονίσουμε τη σπουδαιότητα και αναγκαιότητα και των δυο σταδίων στην εφαρμογή της αποδεικτικής μεθόδου καλό είναι να εντυπωσιάσουμε τους μαθητές με παραδείγματα που αγνοούν κάποιο στάδιο και καταλήγουν σε παράλογα συμπεράσματα.

Παράδειγμα παραβίασης του 1ου σταδίου: θ' αποδείξουμε ότι κάθε φυσικός είναι ίσος με οποιονδήποτε επόμενό του, π.χ. ότι $\nu = \nu + 30$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa$ δηλαδή $\kappa = \kappa + 30$ (1). Τότε από (1) $\Rightarrow (\kappa + 1) = (\kappa + 1) + 30$ ισχύει και για $\kappa + 1$. Δηλαδή συμπεραίνουμε ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι ίσοι!!!

Σαν παράδειγμα παραβίασης του 2ου σταδίου μπορούν ν' αναφερθούν όλα τα παραδείγματα που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω για να δείξουμε την ανεπάρκεια του επαγωγικού συλλογισμού.

Στην προσπάθεια κατανόησης της λειτουργίας της μεθόδου βοηθάει το να επικαλεστεί κάποιος τη δύναμη της εποπτικής εικόνας, για μια διαισθητική αντίληψη από μέρους του μαθητή του αποδεικτικού μηχανισμού της μαθηματικής επαγωγής, "αφού ακόμη και στο επίπεδο των καθαρά τυπικών εννοιών, η παραγωγική σκέψη χρειάζεται τέτοιους τύπους διαισθητικών, συναισθηματικών, απεικονίσεων" ([7]).

Δυο καλές εικόνες εποπτικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής είναι:

α) Τα βιβλία στη σειρά έτσι ώστε αν κάποιο απ' αυτά πέσει να ριχτεί και το επόμενο του, (Δηλ. αν π.χ. αληθεύει για $\nu = \kappa$ τότε αληθεύει για $\nu = \kappa + 1$). Αν φανταστούμε πως έχουμε τοποθετήσει άπειρα βιβλία (το $\nu \in \mathbb{N}^*$) και σπρώξουμε κάποιο απ' αυτά έτσι που να πέσει, τότε θα πέσουν τελικά όλα.

β) Μια φάλαγγα αυτοκινήτων μπροστά από ένα φωτεινό σηματοδότη. Όταν ανάβει κίτρινο, το πρώτο αυτοκίνητο που βλέπει το σήμα σταματά ($\nu = 1$). Αν υποθέσουμε ότι σταματά και κάποιο από τα αυτοκίνητα της σειράς, το αμέσως επόμενο σταματά επίσης (εάν αληθεύει για $\nu = \kappa$ τότε αληθεύει και για $\nu = \kappa + 1$), τότε θα σταματούν όλα.

Το παράδειγμα αυτό αντιστοιχεί απόλυτα με το αξίωμα της μαθημ. επαγωγής εάν θεωρήσουμε το πλήθος των αυτοκινήτων σαν ένα σύνολο και εξομοιώσουμε το κάθε αυτοκίνητο με τον αριθμό θέσης που κατέχει στη φάλαγγα κυκλοφορίας.

2) *Απομυθοποίηση της μεθόδου:* Σε καμιά περίπτωση δεν πρέπει να δημιουργείται η εσφαλμένη εντύπωση στους μαθητές ότι τα μαθηματικά είναι ένα πακέτο κονσερβαρισμένων, τυποποιημένων, έτοιμων γνώσεων και μεθόδων που κάθε μια τους αποτελεί τη συνταγή για τη λύση κάποιου τύπου προβλημάτων.

Αυτή η αντίληψη είναι εντελώς μηχανιστική, χρησιμοθηρική και στερεί τα μαθηματικά από τη ζωντάνια, των πρωτοτυπία και τη γοητεία της έρευνας για την ανακάλυψη του καινούργιου, ενώ περιορίζει αφάνταστα, και αδικεί συνάμα τις τεράστιες δυνατότητες του αστείρευτου πλούτου των μορφών της νόησης.

Ειδικά για τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής υπάρχει σοβαρός κίνδυνος να συνδέσουν τη μέθοδο με κάποια μορφή ασκήσεων ή προβλημάτων στη διατύπωση των οποίων υπάρχει ο φυσικός αριθμός ν, έτσι ώστε να θεωρούν αδιανόητο να ψάχνουν για κάποια άλλη διαφορετική λύση.

Παιδαγωγικοί όμως λόγοι απαιτούν να καλλιεργούμε και ενθαρρύνουμε τη λεγόμενη πλουραλιστική στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και να μην τους εγκλωβίζουμε σε τυποποιημένα κλισέ και μπλοκ σκέψης. Ιδιαίτερα όσο αφορά τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, που ένας τέτοιος κίνδυνος εμφανίζεται μεγαλύτερος, προτείνουμε τα παρακάτω μέσα για το σκοπό αυτό.

α) Η ιστορία (άσχετα αν είναι αληθινή ή ψεύτικη) για το πως ο νεαρός Gauss, μαθητής ακόμα του δημοτικού, βρήκε το άθροισμα των πρώτων 100 φυσικών αριθμών, εντυπωσιάζει πάντα τους μαθητές: Κάποτε ο δάσκαλος του Gauss θεώρησε καλό να απασχολήσει τους μαθητές του μ' ένα πρόβλημα για να βρει χρόνο να τελειώσει κάποια δουλειά του. Έτσι τους είπε να γράψουν τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 100 και να βρουν το άθροισμά τους. Σ' ένα λεπτό ο Gauss έδωσε την απάντηση 5050! χαλώντας τα σχέδια του δασκάλου. Ο ίδιος όταν ρωτήθηκε εξήγησε πως βρήκε το αποτέλεσμα προσθέτοντας ανά δυο τους αριθμούς που απείχαν εξίσου από τα άκρα και παρατηρώντας ότι:

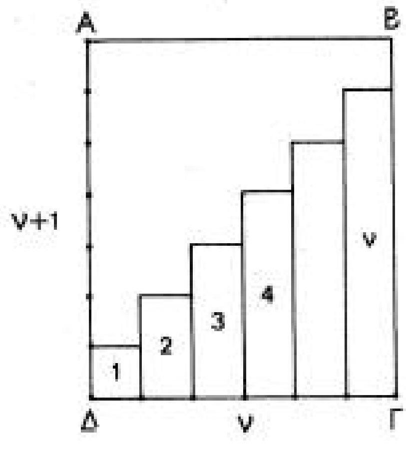
$$1 + 100 = 101,\ 2 + 99 = 101,\ 3 + 98 = 101 \text{ κ.τ.λ.}$$

αφού δε υπάρχουν 50 ζεύγη με άθροισμα 101, το ολικό άθροισμα θα είναι $50 \times 101 = 5050$.

Αυτή η μέθοδος γενικεύεται για την εύρεση του αθροίσματος

$$1 + 2 + 3 + \dots + (\nu - 2) + (\nu - 1) + \nu = \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{2}$$

β) Για την εύρεση του ίδιου αθροίσματος μπορεί ν' αναφέρει κανείς και το γνωστό ευρετικό γεωμετρικό πρότυπο του παρακάτω σχήματος:



$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \nu = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2} = \frac{\nu(\nu + 1)}{2}$$

γ) Για να αποδείξουμε ότι:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2 = \frac{1}{6}\nu(\nu + 1)(2\nu + 1),$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε την ταυτότητα

$$(\nu + 1)^3 = \nu^3 + 3\nu^2 + 3\nu + 1 \quad \text{για} \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Έτσι έχουμε:

$$1^3 = 1^3$$
$$2^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$$
$$3^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1$$
$$4^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1$$
$$\vdots$$
$$(\nu + 1)^3 = \nu^3 + 3\nu^2 + 3\cdot\nu + 1$$

προσθέτοντας:

$$(\nu + 1)^3 = 1 + 3\,(1^2 + 2 + 3^2 + \ldots + \nu^2) + {}$$
$$+ 3\,(1 + 2 + 3 + \ldots + \nu) + \nu \Rightarrow$$

$$(1^2 + 2^2 + \ldots + \nu^2) = \frac{(\nu+1)^3}{3} - \frac{(\nu+1)}{3} = \frac{\nu(\nu+1)}{2} =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\nu(\nu+1)(2\nu+1)$$

Τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εφαρμόσουμε για να βρούμε διάφορα δυναμοαθροίσματα.

δ) Με τη βοήθεια γνωστών από τα πριν προτάσεων μπορούμε ν' αποδείξουμε π.χ. ότι

$$\Sigma_\nu = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + \nu\cdot(\nu+1) = \frac{1}{3}\nu\,(\nu+1)(\nu+2)$$

Πράγματι: Εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$\nu(\nu + 1) = \nu^2 + \nu = (\nu + 1)^2 - (\nu + 1)$ για $\nu = 1, 2, 3\ldots$

$$1\cdot 2 = 2^2 - 2$$
$$2\cdot 3 = 3^2 - 3$$
$$3\cdot 4 = 4^2 - 4$$
$$\vdots$$
$$\nu(\nu+1) = (\nu+1)^2 - (\nu+1)$$

άρα

$$\Sigma_\nu = 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (\nu+1)^2 - (2 + 3 + 4 + \ldots + (\nu+1)) =$$
$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (\nu+1)^2 - (1 + 2 + 3 + \ldots + (\nu+1)) =$$
$$= \frac{1}{6}(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+3) - \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} = \frac{1}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)$$

ε) Το ότι ο αριθμός $2^{4\nu}-1$ είναι διαρετός με το 15 φαίνεται πολύ εύκολα με παραγοντοποίηση:

$$2^{4\nu}-1=(2^4)^\nu-1=16^\nu-1=(16-1)\cdot(16^{\nu-1}+\ldots+1)=\text{πολ. }15$$

ζ) Επίσης η απόδειξη του τύπου $\dfrac{\nu(\nu-3)}{2}$ για τον αριθμό των διαγωνίων ενός πολυγώνου με ν πλευρές $(\nu \geq 3)$ γίνεται πιο εύκολα εάν παρατηρήσει κανείς ότι από κάθε κορυφή φέρονται $\nu-3$ διαγώνιοι και ότι έτσι κάθε μια λογαριάζεται δυο φορές.

7) Επίλογος

Στην εργασία αυτή δεν ασχοληθήκαμε καθόλου με τις άλλες μορφές μαθημ. επαγωγής, γιατί δεν θεωρούμε τη μέθοδο αυτή σαν αυτοσκοπό της διδασκαλίας στη μέση εκπαίδευση αλλά σαν μια ανεπανάληπτη ίσως ευκαιρία, ένα εξαιρετικό μέσο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιδεξιότητα από τον καθηγητή σαν μοχλός, που θα διεγείρει ένα πλήθος πολύτιμων δεξιοτήτων, ικανοτήτων και θετικών στάσεων των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά.

Γενικά τα μέσα που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο καθηγητής για να επιτύχει τους διδακτικούς σκοπούς είναι ποικίλα και εξαρτώνται κάθε φορά από το γνωστικό υπόβαθρο, τα ενδιαφέροντα, το στάδιο διανοητικής ανάπτυξης των μαθητών καθώς και από το επίπεδο εμβάθυνσης της διδασκαλίας.

Η διδασκαλία της μαθημ. επαγωγής και η θέση της σ' ένα αναλυτικό πρόγραμμα και κατά συνέπεια σ' ένα διδακτικό βιβλίο δεν θα έπρεπε νομίζουμε να συνδέεται με το ανύπαρκτο για τους μαθητές πρόβλημα της θεμελίωσης των φυσικών αριθμών που προκύπτουν από την εμπειρία τους, ούτε με τους κανόνες της μαθηματικής λογικής που είναι σε τελευταία ανάλυση επέκταση και παραπέρα ανάπτυξη της τυπικής λογικής. Γιατί και αυτοί είναι αντανάκλαση του υλικού κόσμου και όχι τεχνητά βοηθήματα που δημιουργούνται αυθαίρετα από το ανθρώπινο λογικό. Εκφράζουν επομένως τη φύση του ανθρώπου και δεν είναι υποχρεωτικό να ταλαιπωρούμε το μαθητή να μάθει σώνει και καλά λογική, όπως δεν χρειάζεται να ξέρει τη φυσιολογία και λειτουργία της αναπνοής για ν' αναπνέει.

Εκείνο που θα πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη είναι το μαθηματικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο θα στηριχθεί όλη η μορφή της διδασκαλίας. Απ' αυτή την άποψη θεωρούμε ακατάλληλα ανεπιτυχή και άστοχη την παρουσίαση της μαθημ. επαγωγής, από τα υπάρχοντα σχολικά βιβλία της Α΄ Λυκείου, μετά ακριβώς από το κεφάλαιο της μαθημ. λογικής και θα προτείναμε η διδασκαλία να γίνει αφού δοθεί μια ευκαιρία στους μαθητές να επαναλάβουν κάποιες γνώσεις στον αλγεβρικό λογισμό (πραγματικοί αριθμοί, διάταξη στο R).

Τέλος γνωρίζουμε ότι η ανακαλυπτική αυτή μέθοδος διδασκαλίας που προτείνουμε χρειάζεται χρόνο για να δοθεί η ευκαιρία στο μαθητή να σκεφτεί και να δημιουργήσει. Γνωρίζουμε επίσης πως η διδακτέα ύλη των μαθηματικών στη μέση εκπαίδευση σχεδιάζεται με τέτοιο τρόπο και σε τέτοια έκταση που είναι σχεδόν αδύνατο να εξευρεθεί χρόνος για δημιουργική σκέψη και ενεργητική συμμετοχή των μαθητών στη διδασκαλία.

Είναι κι αυτό όμως μια επιλογή της πολιτείας. Εξάλλου όπως πολύ χαρακτηριστικά αναφέρει ο Munir Fasheh ([8]), «η διδασκαλία των μαθηματικών όπως και κάθε άλλου μαθήματος στα σχολεία είναι μια πολιτική δραστηριότητα». Ή βοηθάει τους μαθητές ν' αναπτύξουν την κρίση τους και οργανώσουν τη σκέψη τους ή τους αποβλακώνει όπως στη δική μας περίπτωση. Μπορούμε ν' ανατρέψουμε αυτή την επιλογή; Ας δοκιμάσουμε πάντως σίγουρα αξίζει τον κόπο.

Βιβλιογραφία

1. **Arcavi A, Bruckhemer. M. Ben - zvi. R.**: «Maybe a mathem. Teacher can profit from the study of the history of mathematics». For the Learning of mathematics 3(1) [P: 30-37]

2. **Boyer carl:** «History of mathematics» John Wiley & sons, 1968.

3. **Braithawaite R.B.**: «Scientific Explanation». Cambridge Univ. press, 1953. (Αναφέρεται στο [10])

4. **Δρόσος Κ.**: «Τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών και η πιθανότητα και στατιστική ειδικότερα». Υπό έκδοση.

5. **Durant Will:** «Η Ιστορία της Φιλοσοφίας». Εκδόσεις Συρόπουλοι Ο.Ε., 1971

6. ʹΕνγκελς Φ: «Διαλεκτική της φύσης». Εκδόσεις Αναγνωστίδης.

7. **Fischbein E.** «Intuition and proof» For the Larning of Math ematics, 3(2), [P: 9-18].

8. **Fasheh - Munir:** «Mathematics, culture, and Authority». For thw Learning of Math, 3 (2), [P: 2-8].

9. **Geloniva L.I., Yaglom I.M.:** «Induction in Geometry» Mir publishers Moscow, 1979.

10. **Lakatos Imre:** «Proofs and Refutations» Cambridge Univ. Press, 1984.

11. **Long Calvin:** «Pascal's triangle, Difference Tables and Arithmetic Sequences of orde N». The college Mathem. Journal 15(4). [P: 290-298].

12. **Mason J. Burton, L. Stacey K:** «Thinking Mathematically» Addisonwesley Publishing, 1982.

13. **Ο.Ε.Δ.Β:** «Μαθηματικά Α΄ τάξη Ε.Π.Λ., ʹΑλγεβρα»

14. » «Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, ʹΑλγεβρα»

15. **Pimm David:** «Why the history and Philosophy of Mathematics Should not be Rated C» For the Learning of Math 3(1), [P: 12-15].

16. **Polya G.:** «How to Solve it». Princeton Univ Press, 1973.

17. **Polya G.:** «The Teaching of mathematics and the biogebetic law».
In: Good 1.3 (ed): «The Scientist Speculates» (Αναφέρεται στο [15]).

18. **Παπασταυρίδης Σ.:** «Η διαδικασία της μαθηματικής ανακάλυψης». Ευκλείδης Γ΄ 1(1). [σελ. 74-93].

19. **Popper K.P.:** «The logic of Scientific Discovery» London 1959.

20. **Ρόζενταλ. Μ.Μ.** «Αρχές διαλεχτικής λογικής» Εκδόσεις «Γκαγκάριν», Αθήνα 1962.

21. **Skemp. Richard:** «The Psychology of Learning Mathematics» Renguin Books, 1981.

22. **Συλλογικό έργο νέων Φιλοσόφων του Πανεπιστ. Λο-**

μονόσοφ της Μόσχας: «Φιλοσοφία και επιστήμη». Gutemberg, 1984.

23. **Suydam M. & Osborne A:** «The status of pre-college Science, Mathematics and Social Science Education: 1955-1975, Vol II». ERIC Publications, 1977.

24. **Schoenfeld A.H.:** «The wild, wild, wild, wild, wild world of problem Solving For the Learning of Math. 3(3) [P: 40-47].

25. **Shulman L.S.:** «Psychological contiroversies in the Teaching of Mathematics»
In: «Readings in Secondary School Mathematics» D.B. Alchele & R.E. Reys, Prindee Weber and Schimidt, Inc.

26. **Sawyer W.W.** «Prelude to Mathemaitics». Dever Publications, 1982.

27. **Sominsky I.S.:** «The method of Mathematical Induction» Mir Publishers, Moscow, 1975.

28. **Sowder Larry:** «Didactis and Mathematics» Ψρεατιωε Ρθβλιψατ. 1978.

29. **Sober M.A. & Maletsky E:** «Teaching - Mathematics» Prentice - Hall, 1975.

30. **Zippin - Leo:** «Uses of infinity». The M.A.A. publicatiory, 1962.

Υπεύθυνος Κρίσης: Δ. Ζέρβας