Author: Μιχάλης Βόσκογλου

Title: Ορίζουσες

Abstract: Παρουσίαση ορισμένων στοιχείων από τη θεωρία των οριζουσών παράλληλα με τη διδασκαλία των Γραμμικών συστημάτων.

Creator: HDML

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο*

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Μιχάλης Βοσκόγλου
Διευθυντής Μεταλυκειακών

2.1. Γενικά σχόλια

Στο σχολικό βιβλίο (Κεφ. 1) η παρουσίαση ορισμένων στοιχείων από την θεωρία των οριζουσών γίνεται παράλληλα με την διδασκαλία των γραμμικών συστημάτων.

Στόχος των συγγραφέων είναι να δικαιολογήσουν με τον τρόπο αυτό την αναγκαιότητα της εισαγωγής της έννοιας της ορίζουσας σαν ενός "εργαλείου", που θα μας βοηθήσει αποτελεσματικά σε μια πιο κομψή και εμπεριστατωμένη παρουσίαση των αποτελεσμάτων της θεωρίας των γραμμικών συστημάτων.

Ωστόσο η πείρα στην πράξη δείχνει ότι το «ανακάτεμα» αυτό δημιουργεί σύγχυση στους μαθητές και δυσχεραίνει τον διδάσκοντα για μια πιο συστηματική παρουσίαση της ενότητας.

Γνώμη μας λοιπόν είναι ότι η διδασκαλία των οριζουσών πρέπει να προηγηθεί των γραμμικών συστημάτων και ανάλογη είναι και η παρουσίαση των θεμάτων στην εργασία σε ξεχωριστά κεφάλαια.

Στο κεφάλαιο αυτό, που αναφέρεται στις ορίζουσες, παρουσιάζονται και ορισμένα θέματα, που δεν θα διδαχθούν ίσως στην τάξη, αλλά που βοηθούν (κατά την άποψή μας) τον διδάσκοντα να δει το αντικείμενό του κάπως πιο σφαιρικά.

Πάντως πιστεύουμε ότι τουλάχιστο η εύρεση των χαρακτηριστικών τιμών και διανυσμάτων ενός τετραγωνικού πίνακα μέχρι 3ης τάξης, θα έπρεπε να διδάσκεται, αφού βρίσκεις εφαρμογές στην φυσική και σε άλλες θετικές επιστήμες.

* Το κεφάλαιο 1, του άρθρου αυτού δημοσιεύθηκε στο τεύχος 9 του Ε.Γ.

2.2. Ορισμοί — Ιδιότητες

Η έννοια της ορίζουσας 2ης τάξης είναι γνωστή από την Α΄ Λυκείου ([10], παραγρ. 7.12, σελ. 206).

Μετά την υπενθύμιση στην τάξη μπορεί να δοθεί αμέσως η έννοια της ορίζουσας 3ης τάξης, εξηγώντας τον μηχανισμό με τον οποίο την αναπτύσσουμε, π.χ. κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής.

Με εκτέλεση των πράξων οι μαθητές θα βεβαιωθούν ότι στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε, αν αναπτύξουμε την D κατά τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε άλλης γραμμής ή στήλης και σαν φυσική συνέπεια θα ακολουθήσει ο γνωστός κανόνας υπολογισμού του Sarrus.

Στο σημείο αυτό βέβαια θα δοθούν και η έννοια της ελάσσονος ορίζουσας A_{ij} του στοιχείου a_{ij} της D, καθώς και του αλγεβρικού συμπληρώματος, που είναι το $(-1)^{i+j}$ Aij.

Η αναφορά στις ορίζουσες 4ης τάξης, που ανάγονται στον υπολογισμό οριζουσών 3ης τάξης, θα προλειάνει το έδαφος για τον επαγωγικό ορισμό της ορίζουσας ν-τάξης με την βοήθεια των οριζουσών $\nu - 1$ τάξης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μια ορίζουσα ν-τάξης ανάγεται στον υπολογισμό $\frac{\nu!}{2}$ οριζουσών 2ης τάξης (π.χ. μιας ορίζουσας 5ης τάξης ανάγεται στον υπολογισμό 5 οριζουσών 4ης τάξης, άρα 5.4. οριζουσών 3ης τάξης και τελικά στον υπολογισμό 5.4.3. οριζουσών 2ης τάξης).

Πρέπει κατά συνέπεια να τονισθεί στους μαθητές ότι ο υπολογισμός μιας ορίζουσας ν-τάξης ($\nu > 3$) με τον τρόπο αυτό είναι ιδιαίτερα επίπονος (π.χ. για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας 2ης τάξης με Η.Υ., που κάνει 10^6 πράξεις/sec, χρειάζονται 10^3 αιώνες!).

Γι αυτό σε ειδικές περιπτώσεις τέτοιες ορίζουσες προσπαθούμε να τις υπολογίσουμε με διάφορα τεχνάσματα, που στηρίζονται στις γενικές ιδιότητες των οριζουσών (π.χ. δες ακήσεις 40, 41, 42, 48 και 49 στο κεφ. 1 του [11]).

Σημειώνουμε ότι ο συνοπτικός τρόπος γραφής μιας ορίζουσας μας βοηθά πολλές φορές να λύσουμε πολύ πιο σύντομα τέτοιου είδους ασκήσεις. Π.χ. στην άσκηση 40ii του Κεφ. 1 του [11] μπορούμε απλά να γράψουμε:

$$|1 + \psi i \quad 1 + xi \quad xi + \psi i| \quad i = 1, 2, 3$$
$$= |1 + \psi i \quad 1 + xi \quad 2(1 + xi + \psi i)|$$

(πρόσθεσα 1η και 2η στήλη στην 3η)

$$= 2\ |1 + \psi i \quad 1 + xi \quad 1 + xi + \psi i| =$$

$$= 2\ |1 + \psi i \quad 1 + xi \quad -1|$$

(αφαίρεσα από την 3η το άθροισμα 1ης + 2ης στήλης)

$$= 2\ |\psi i,\ xi,\ -1| = -2\ |\psi i\ xi\ 1| = 2\ |xi\ \psi i\ 1|.$$

Οι γενικές ιδιότητες των ορισουζών ν-τάξης παρουσιάζονται συνοπτικά στο Παράρτημα, όχι με την φυσική τους σειρά, αλλά με ένα τρόπο, που είναι ίσως πιο εύκολα για τον μαθητή να τις απομνημονεύσει.

Οι ιδιότητες αυτές ή θα πρέπει να δοθούν στους μαθητές με παραδείγματα και χωρίς απόδειξη, ή θα πρέπει να προσπαθήσουμε να τις δικαιολογήσουμε αποδεικνύοντας τις για $\nu = 3$ (δες [11], παραγρ. 1.24). Η επόμενη παράγραφος προορίζεται κύρια για την ενημέρωση του διδάσκοντα.

2.3. Γενικός ορισμός της ορίζουσας ν-τάξης

Ορίζουσα ν-τάξης ενός πίνακα $A = [\alpha ij] \in \Pi_\nu$ λέγεται το άθροισμα όλων των γινομένων της μορφής $(-1)^\kappa\ a_{1x1} \ldots a_{\nu x\nu}$, το οποίο επεκτείνεται στις ν! μεταθέσεις $x_1, \ldots, x_\nu$ των αριθμών 1, 2, ... , ν και γράφεται συμβολικά

$$D(A) = |a_{ij}| = \sum_{x_1 \ldots x_\nu} (-1)^\kappa\ a_{1x1} \ldots a_{\nu x\nu},$$

όπου $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ ανάλογα αν η μετάθεση $x_1, \ldots, x_\nu$ είναι άρτια ή περιττή.

Υπενθυμίζουμε ότι άρτια (περιττή) λέγεται μια μετάθεση, όταν παρουσιάζει άρτιο (περιττό) πλήθος αντιστροφών, δηλαδή ζεύγη αριθμών, που δεν είναι στην φυσική τους σειρά.

Π.χ. για $\nu = 9$ στην μετάθεση 5, 2, 8, 3, 7, 1, 9, 6, 4 μετρώ πόσοι αριθμοί δεξιά κάθε αριθμού είναι μικρότεροι του και βρίσκω ότι παρουσιάζει $4 + 1 + 5 + 1 + 3 + 0 + 2 + 1 = 17$ αντιστροφές, δηλαδή είναι περιττή.

Όλες οι ιδιότητες των οριζουσών, που δίδονται στο παράρτημα, μπορούν να αποδειχθούν με την βοήθεια του παραπάνω ορισμού.

Π.χ. ας αποδείξουμε την ιδιότητα Γ_2: "Αν η ορίζουσα D′ προκύπτει από την D με αμοιβαία εναλλαγή 2 γραμμών (στηλών), τότε $D' = -D$.

Πράγματι, έστω ότι εναλλάσσω την λ με την μ γραμμή

$(\lambda < \mu)$. Τότε, αν $D = \sum_{x_1 \ldots x_\nu} (-1)^\kappa \, a_{1x1} \ldots a_{\lambda x\lambda} \ldots a_{\mu x\mu} \ldots a_{\nu x\nu}$, θα είναι

$$D' = \sum_{x_1 \ldots x_\nu} (-1)^{\kappa'} \, a_{1x1} \ldots a_{\lambda-1x\lambda-1} \, a_{\mu x\mu} \ldots a_{\lambda x\lambda} \, a_{\mu+1x\mu+1} \ldots a_{\nu x\nu}$$

Είναι όμως γνωστό από την Συνδυαστική ότι, αν αντιμεταθέσουμε 2 στοιχεία μιας άρτιας (περιττής) μετάθεσης, η νέα μετάθεση που προκύπτει είναι περιττή (άρτια).

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι αν $\kappa = 0 \Rightarrow \kappa' = 1$, ενώ αν $\kappa = 1 \Rightarrow \kappa' = 0$ και κατά συνέπεια $D' = -D$.

Για τις αποδείξεις των υπολοίπων ιδιοτήτων δες π.χ. [1], Κεφ. 10.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

1) Να υπολογισθεί η τιμή της ορίζουσας

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -9 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 10 & -1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 15 & -6 \\ 1 & -4 & -9 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Λύση: Αφαιρώντας από την 4η στήλη το άθροισμα της 1ης + 2ης στήλης, η στήλη αυτή γίνεται 0, άρα $D = 0$.

2) Να υποβιβασθεί η τάξη της ορίζουσας:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2x & x^2 \\ 2 & x + \psi & x\psi \\ 2 & 2\psi & \psi^2 \end{vmatrix}$$

και στην συνέχεια να υπολογιστεί η τιμή της.

Λύση: Αφαιρώντας από την 1η και από την 2η γραμμή την 3η παίρνω

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2(x-\psi) & x^2 - \psi^2 \\ 0 & x - \psi & x\psi - \psi^2 \\ 2 & 2\psi & \psi^2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2(x-\psi) & x^2 - \psi^2 \\ x - \psi & \psi(x-\psi) \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,[2\psi(x-\psi)^2 - (x-\psi)(x^2-\psi^2)] = 2(x-\psi)^2\,[2\psi - (\chi + \psi)] =$$

$$= 2(x-\psi)^2\,(\psi - x) = 2\,(\psi - x)^3.$$

3) Δείξτε ότι σε μια ορίζουσα D το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων μιας γραμμής (στήλης) επί τα αλγεβρικά συμπληρώματα των αντίστοιχων στοιχείων μιας άλλης γραμμής (στήλης) είναι μηδέν.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της λ γραμμής επί τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της μ-γραμμής. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτω $\lambda < \mu$.

Αν στην $D = |a_{ij}|$ αντικαταστήσω των λ-γραμμή με την μ γραμμή θα προκύψει η ορίζουσα

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & \dots & a_{\mu\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & \dots & a_{\mu\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

η οποία έχει τιμή μηδέν αφού δυο γραμμές της ταυτίζονται. Αναπτύσσοντας την D΄ κατά τα στοιχεία της λ-γραμμής βρίσκω ότι:

$$0 = D' = (-1)^{\lambda+1} a_{\mu 1} A_{\lambda 1} + (-1)^{\lambda+2} a_{\mu 2} A_{\lambda 2} + \dots + (-1)^{\lambda+\nu} a_{\mu\nu} A_{\lambda\nu},$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. Όμοια γίνεται η απόδειξη και για τις στήλες.

2.4. Αναγωγή ορίζουσας στην τριγωνική μορφή

Όπως αναφέρθηκε στην Παραγρ. 2.2, ο υπολογισμός της τιμής μιας ορίζουσας ν-τάξης με τον κλασσικό τρόπο είναι ιδιαίτερα επίπονος. Όμως υπάρχει μια γενική μέθοδος (ουσιαστικά η ίδια με την μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών του Gauss για την λύση γραμμικών συστημάτων), με την οποία κάθε ορίζουσα μπορεί να αναχθεί σε τριγωνική μορφή, δηλαδή με μηδενικά όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω (ή πάνω) από την κύρια διαγώνιο.

Η τιμή της ορίζουσας είναι τότε ίση με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων της.

Πράγματι αν $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ 0 & 0 & a_{33} \dots & a_{3\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$, αναπτύσσοντας συνέ-

χεια κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης έχουμε

$$D = \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22}.....\alpha_{2v} \\ 0\ \alpha_{33}...\alpha_{3v} \\ 0\ \ 0...\ \alpha_{vv} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\,\alpha_{22}\begin{vmatrix} \alpha_{33}.....\alpha_{3v} \\ 0\ \alpha_{44}...\alpha_{4v} \\ 0\ \ 0...\ \alpha_{vv} \end{vmatrix} = ... = \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,...\,\alpha_{vv}$$

Επειδή η μέθοδος αυτή υπολογισμού της D είναι κατά πολύ συντομώτερη και αφού η μέθοδος του Gauss διδάσκεται στα γραμμικά συστήματα, νομίζουμε ότι θα πρέπει να διδαχθεί στους μαθητές, όχι στην γενική περίπτωση με άσκοπη χρήση συμβολισμών, αλλά με παραδείγματα, όπως αυτό της άσκ. 14 των οριζουσών στο Παραρτ. 1, όπου έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

(πολλαπλασίασα την 1η γραμμή με κατάλληλους αριθμούς, εδώ -2, -1 και -3 αντίστοιχα, ώστε προσθέτοντάς των διαδοχικά στην 2η, 3η και 4η γραμμή, τα στοιχεία της 1ης στήλης των γραμμών αυτών να γίνουν 0).

Επαναλαμβάνω τώρα την ίδια εργασία με την 2η γραμμή (την προσθέτω στην 3η και 4η γραμμή) και την 2η στήλη, οπότε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot (-7) = -63$$

Αν στην αρχική ορίζουσα το στοιχείο α_{11} είναι 0 αλλάσσω την θέση δυο γραμμών (τις 1ης και τις i-οσής με $\alpha_{i1} \neq 0$), οπότε προκύπτει ορίζουσα με αντίθετο πρόσημο και εργάζομαι όπως παραπάνω, αφού πρώτα πολλαπλασιάσω την ορίζουσα με -1.

Αν, $\forall i = 1, ... \nu$, είναι $\alpha_{ij} = 0$, τότε $D = 0$.

Το ίδιο κάμω και στην 2η φάση αν συμβεί να είναι $\alpha'_{22} = 0$. Αν συμβεί, $\forall i = 2, ... \nu$, να είναι $\alpha_{i2} = 0$, τότε εργάζομαι με το στοιχείο α'_{23}.

2.5. Ορίζουσα τετραγωνικού πίνακα — Υπολογισμός του αντιστρόφου πίνακα

Όπως προκύπτει και από τον ορισμό της παραγράφου 2.3, αν $A = [\alpha_{ij}] \in \Pi_\nu$, η ορίζουσα του πίνακα A είναι η $D(A) = |\alpha_{ij}|$. Γίνεται αμέσως φανερό ότι $D(A^*) = D(A)$.

Ακόμη, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει $D(\kappa A) = \kappa^\nu D(A)$ (βγάζω από κάθε γραμμή της ορίζουσας $D(\kappa A)$ το κ έξω από την ορίζουσα, δες ιδιότητα Γ.3 στο Παράρτ. Ι).

Με την εκτέλεση των πράξεων και στα δυο μέλη αποδεικνύεται ότι $\forall A, B \in \Pi_\nu$, $D(AB) = D(A) \cdot D(B)$ (δες άσκ. 32 στο Κεφ. 1 του [11] για $\nu = 2$), ενώ γενικά $D(A \pm B) \neq D(A) \pm D(B)$.

Από την σχέση $AA^{-1} = I_\nu$ εύκολα προκύπτει ότι

$$D(A^{-1}) = \frac{1}{D(A)}$$

και ότι η αναγκαία συνθήκη για να είναι ο A αντιστρέψιμος είναι $D(A) \neq 0$, δηλαδή ο A να είναι ένας μη ιδιάζων, όπως συνηθίζεται να λέγεται, πίνακας.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η συνθήκη αυτή είναι και ικανή. Πράγματι θεωρούμε τον πίνακα $\widetilde{A} = [(-1)^{i+j} A_{ji}]$, που λέγεται προσαρτημένος (adjoint) του A.

Θέτοντας $\widetilde{A} = [\alpha_{ij}]$ και $B = A \cdot \widetilde{A} = [\beta_{ij}]$, είναι

$$\beta_{ij} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} a_{i\kappa}\, \alpha_{\kappa j} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (-1)^{\kappa+j}\, a_{i\kappa}\, A_{j\kappa}$$

Δηλαδή το β_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της i-γραμμής επί τα αλγεβρικά συμπληρώματα των αντιστοίχων στοιχείων της j-γραμμής του A και κατά συνέπεια, σύμφωνα με την εφ. 3 της παραγράφου 2.3., είναι

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} D(A), & \text{όταν } i = j \\ 0, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$$

Άρα $B = [\beta_{ij}] = [D(A)\, \delta_{ij}] = D(A)\, [\delta_{ij}] = D(A)\, I_\nu$ και κατά συνέπεια

$$A \cdot \frac{\widetilde{A}}{D(A)} = I_\nu$$

Εντελώς όμοια αποδεικνύεται ότι $\frac{\widetilde{A}}{D(A)} \cdot A = I_\nu$ και κατά συνέπεια $A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{D(A)}$ (1)

Η μέθοδος αυτή υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα εφαρμόζεται και στην παραγρ. 1.26 του [ ] για ν = 3, όπου όμως ο πίνακας $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}$ δίδεται τελείως αυθαίρετα, χωρίς δηλαδή να προηγηθεί ο ορισμός του προσαρτημένου πίνακα του $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$

Πρέπει να σημειωθεί ότι, επειδή στην σχέση (1) απαιτείται η εύρεση τις τιμής της D(A), αλλά και των A_{ij}, ο υπολογισμός του A^{-1} με τον τρόπο αυτό είναι ιδιαίτερα δυσχερής για $\nu > 3$.

Για τον λόγο αυτό χρήσιμη είναι η παρατήρηση ότι, θεωρώντας τον ιδεατό σύστημα AX = B (1), όπου

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$ και εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος, προκύπτει ότι $X = A^{-1} B$.

Κατά συνέπεια λύνοντας το Γ.Σ. (1), δηλαδή εκφράζοντας τα $x_1, \ldots x_\nu$ με την βοήθεια των $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, οι συντελεστές των $\beta_1, \ldots \beta_\nu$ στην έκφραση αυτή θα δίνουν τον A^{-1} (δες παραγρ. 3, παραδ. 3.3.).

Μια παραλλαγή της παραπάνω παρατήρησης είναι και ο υπολογισμός του A^{-1} με αναγωγή του πίνακα $[A \mid I_\nu]$ σε κλιμακωτή μορφή (π.χ. δες [8], σελ. 45). Πράγματι από την σχέση $AX = I_\nu B \Rightarrow I_\nu X = A^{-1}B$ "παρατηρούμε" ότι οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί, με τους οποίους από τον A παίρνουμε τον I_ν, είναι οι ίδιοι με τους οποίους από τον I_ν παίρνουμε τον A^{-1}.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

1. Δείξτε ότι αν $A \in \Pi_\nu$ και υπάρχει $A' \in \Pi_\nu$: $A \cdot A' = I_\nu$ (ή $A' \cdot A = I_\nu$), τότε $A' = A^{-1}$.

Απόδειξη: $A \cdot A' = I_\nu \Rightarrow D(A) \cdot D(A') = 1 \Rightarrow D(A) \neq 0$, άρα ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε $A^{-1}(AA') = A^{-1} I_\nu \Rightarrow$ $\Rightarrow (A^{-1}A) A' = A^{-1}$, άρα $A' = A^{-1}$.

2) Δείξτε ότι η ορίζουσα κάθε ορθογώνιου πίνακα είναι ίση με ± 1. Ισχύει το αντίστροφο;

Απόδειξη: Ισχύει $A^* = A^{-1}$. Άρα $D(A^*) = \frac{1}{D(A)}$ και κατά συνέπεια $D^2(A) = 1 \Rightarrow D(A) = \pm 1$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Π.χ. ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ δεν είναι ορθογώνιος (αφού $1^2 + 2^2 \neq 1$), όμως $D(A) = -1$.

3) Δείξτε ότι η ορίζουσα κάθε αντισυμμετρικού πίνακα περιττής τάξης είναι μηδέν.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $A \in \Pi_{2\kappa+1}$ και $A^* = -A$. Τότε $D(A^*) = -D(A) \Rightarrow D(A) = -D(A) \Rightarrow 2 \cdot D(A) = 0 \Rightarrow D(A) = 0$.

Σημείωση: Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει αν τα στοιχεία του Α ανήκουν σε κάποιο σώμα χαρακτηριστικής 2 (π.χ. στο $\mathbb{Z}_2$), οπότε $2D(A) = 0 \not\Rightarrow D(A) = 0$

2.6. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο πίνακα — Εφαρμογές

Αν $A = [\alpha_{ij}] \in \Pi_3$, τότε $D(A - XI) =$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - x \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_{11} - x) \begin{vmatrix} \alpha_{22} - x & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} - x \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} - x \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} - x \\ a_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} = (\alpha_{11} - x)(\alpha_{22} - x)(\alpha_{33} - x) + \phi(x),$$ όπου το $\Phi(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ≤ 1.

Άρα $D(A - XI) = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{11}x - \alpha_{22}x + x^2)(\alpha_{33} - x) + \phi(x) =$
$= -x^3 + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})x^2 + g(x)$ με βαθμ. $g(x) \leq 1$.

Τελικά λοιπόν $(-1)^3 D(A - XI) = x^3 - (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})x^2 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Γενικώτερα αν $A = [\alpha_{ij}] \in \Pi_\nu$, εργαζόμενος με τον ίδιο τρόπο και εφαρμόζοντας επαγωγή για το ν βρίσκω

$D(A - XI) = (-1)^\nu x^\nu - (-1)^\nu (\alpha_{11} + \ldots + \alpha_{\nu\nu}) x^{\nu-1} + g(x)$,

με βαθμ. $g(x) \leq \nu - 2$ και κατά συνέπεια

$$(-1)^{\nu} D(A - XI) = x^{\nu} + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0,$$

με $\beta_{\nu-1} = -(\alpha_{11} + \ldots + \alpha_{\nu\nu})$.

Η σχέση αυτή για $x = 0$ δίδει $\beta_0 (-1)^{\nu} D(A)$.

Το πολυώνυμο $f(x) = (-1)^{\nu} D(A - XI)$ ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, η εξίσωση $f(x) = 0$ χαρακτηριστική εξίσωση του A και οι ρίζες της χαρακτηριστικές τιμές, ή ιδιοτιμές, του A (eigenralues).

Ισχύει το παρακάτω:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Κάθε συμμετρικός πίνακας έχει πραγματικές χαρακτηριστικές τιμές.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε ένα πίνακα $A \in \Pi_{\nu}$ με $A^* = A$. Υποθέτοντας ότι $D[A - (\alpha + bi) I] = 0$ θα δείξουμε $b = 0$. Πράγματι, επειδή τότε και $D[A - (\alpha - bi) I] = 0$, αν θεωρήσουμε τον πίνακα $B = [A - (\alpha + bi) I] - [A - (\alpha - bi) I]$, θα είναι $D(B) = 0$.

Όμως $B = [(A - \alpha I) + bi] \cdot [(A - \alpha I) - bi] = (A - \alpha I)^2 + b^2 I$.

Επειδή $D(B) = 0$, το ομογενές σύστημα $BX = 0$ έχει λύση

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\nu} \end{bmatrix}$ διάφορο της προφανούς μηδενικής (δες Κεφ. 3).

Τότε $X^* Bx = 0$, δηλαδή $X^*(A - \alpha I)^2 X + X^* b^2 x = 0$ (1).
Θέτω $(A - \alpha I)X = K \Rightarrow K^* = X^*(A - \alpha I)^* = X^*(A - \alpha I)$.

Έτσι η (1) γράφεται $[X^*(A - \alpha I)] \cdot [(A - \alpha I)X] + X^* \beta^2 x = K^* K + X^* b^2 x = 0$ (2).

Επειδή $X \in \Pi_{\nu x 1} \Rightarrow K \in \Pi_{\nu x 1}$, έστω $K = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_{\nu} \end{bmatrix}$, οπότε $K^* K = [\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \ldots + \kappa_{\nu}^2]$. Επίσης $X^* b^2 X^* x = \beta^2 [x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{\nu}^2]$ οπότε η (2) δίδει

$$\kappa_1^2 + (bx_1)^2 + \ldots + \kappa_{\nu}^2 + (bx_{\nu})^2 = 0 \Rightarrow \kappa_i = 0 \quad \text{και} \quad bx_i = 0,$$

για όλα τα $i = 1, \ldots \nu$.

Όμως $X \neq 0$, άρα $\exists\, \kappa$, $0 < \kappa \leqslant \nu$ με $x_{\kappa} \neq 0$, οπότε από την $bx_{\kappa} = 0$ προκύπτει το ζητούμενο.

Στα επόμενα αν $f(x) = \alpha_{\kappa} x^{\kappa} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και $A \in \Pi_{\nu}$ με $f(A)$ θα συμβολίζουμε τον πίνακα $\alpha_{\kappa} A^{\kappa} + \ldots \alpha_1 A + \alpha_0 I_{\nu}$.

Για $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι

$f(x) = x^2 - (\alpha + \delta)x + D(A) = 0.$

Παρατηρούμε τότε ότι $f(A) = 0$ (δες και [11], εφ. 3, σελ. 38), δηλαδή ότι ο πίνακας A "επαληθεύει" την χαρακτηριστική του εξίσωση.

Γενικώτερα ισχύει το παρακάτω θεώρημα, γνωστό σαν θεώρημα των Hamilton-Cayley.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Αν $A \in \Pi_\nu$ και $f(x) = (-1)^\nu D(A - XI) = 0$ είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του A, τότε $f(A) = 0$.

Απόδειξη: Θέλω $g(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 =$ $= D(A - XI) = (-1)^\nu f(x)$. Είναι φανερό ότι $g(A) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$.

Ισχύει $(A - XI) \cdot (A - XI) = D(A - XI)I$ (δες παραγρ. 2.5, σελ. 34). Θέτω $B = A - XI = [\beta_{ij}]$.

Είναι προφανές ότι κάθε στοιχείο του B είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq \nu - 1$.

Άρα $\beta_{ij} = \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \rho_{(ij)\kappa}\, x^\kappa$ και $B = [\rho_{(ij)0} + \rho_{(ij)1}\, x + ... + \rho_{(ij)\nu-1}x^{\nu-1}] =$ $= B_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + B_1 x + B_0$ (2).

Όμως η (1) δίδει $BA - BX = g(x)\, I$ ή λόγω της (2)

$$(B_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + ... + B_1 x + B_0)A - (B_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + B_1 x + B_0)x =$$
$$= (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0)I.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμων όρων ως προς x στην παραπάνω σχέση και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} -B_{\nu-1} &= \alpha_\nu I \\ -B_{\nu-2} + B_{\nu-1}A &= \alpha_{\nu-1} I \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -B_0 + B_1 A &= \alpha_1 I \\ B_0 A &= \alpha_0 I \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την 1η από τις παραπάνω ισότητες επί A^ν, την 2η επί $A^{\nu-1}$, ..., την προτελευταία επί A, την τελευταία επί I και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$0 = \alpha_\nu A^\nu + \alpha_{\nu-1} A^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = g(A).$$

Άρα και $f(A) = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ: 1) Αν $A \in \Pi_\nu$ με $D(A) \neq 0$ και

$f(x)=(-1)^\nu D(A-XI)=x^\nu+\beta_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\beta_1 x+(-1)^\nu D(A)$,

δείξτε ότι

$$A^{-1} = (-1)^{\nu+1} \frac{A^{\nu-1} + \beta_{\nu-1} A^{\nu-2} + \ldots + \beta_2 A + \alpha_1 I}{D(A)}$$

Απόδειξη: Θέτω

$$A' = (-1)^{\nu+1} \frac{A^{\nu-1} + \beta_{\nu-1} A^{\nu-2} + \ldots + \beta_2 A + \beta_1 I}{D(A)}$$

Τότε

$$AA' = (-1)^{\nu+1} \frac{A^\nu + \beta_{\nu-1} A^{\nu-1} + \ldots + \beta_2 A^2 + \beta_1 A}{D(A)} \quad (1)$$

Όμως $f(A) = 0$ και κατά συνέπεια

$-(A^\nu + \beta_{\nu-1}A^{\nu-1} + \ldots + \beta_2 A^2 + \beta_1 A) = (-1)^\nu D(A)I$ ή

$(-1)^{\nu+1}(A^\nu + \beta_{\nu-1}A^{\nu-1} + \ldots + \beta^2 A^2 + \beta_1 A) = D(A)I$ (2)

Η (1) λόγω της (2) δίδει $AA' = I$. Άρα $A' = A^{-1}$ (δες και εφ. 1, σελ. 35).

2) Αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ να δειχθεί ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{2} A^2 + A - \frac{1}{2} I.$$

Απόδειξη: 1ος τρόπος: Υπολογίζουμε τον A^2 και τον A^{-1} με την βοήθεια της σχέσης (1) της παραγρ. 2.5 και επαληθεύουμε την ισότητα προσθέτοντας τους πίνακες του 2ου μέλους.

2ος τρόπος: $(-1)^3 D(A - XI) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 2 & x & -2-x \end{vmatrix} =$

$$= x^3 + 2x^2 - x - 2 = f(x)$$

όμως $f(A) = 0 \Rightarrow A^3 + 2A^2 - A = 2I$ ή $A(A^2 + 2A - I) = 2I$

$$\Rightarrow A \cdot A' = I, \text{ όπου } A' = \frac{1}{2}(A^2 + 2A - I) =$$

$$= \frac{1}{2}A^2 + A - \frac{1}{2}I = A^{-1}.$$

Σημείωση: Οι χαρακτηριστικές τιμές και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα (δες παραγρ. 3.7) ενός τετραγωνικού πίνακα Α παίζουν αποφασιστικό ρόλο σε προβλήματα συντονισμού, που προκύπτουν συχνά σε ηλεκτρικά και μηχανικά συστήματα, στην κλασική και ατομική φυσική και σε πολλούς άλλους κλάδους της Επιστήμης και της Τεχνολογίας.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ

Σμαρώ Αλεξάνδρου

Υπεύθυνος κρίσης:

Η αξιολόγηση της σχολικής επίδοσης είναι ένα μέρος της εκπαιδευτικής αξιολόγησης, είναι η συστηματική διαδικασία που καθορίζει την έκταση κατά την οποία οι στόχοι διδασκαλίας έχουν επιτευχθεί (συνεπάγεται ότι αποκλείει την τυχαία και ανεξέλεγκτη έκφραση κρίσεων γιά τους μαθητές) με βασική προϋπόθεση ότι οι στόχοι διδασκαλίας έχουν από πρίν καθοριστεί.

Η αξιολόγηση της σχολικής επίδοσης με σκοπό την επιλογή δεν συντελεί στη διαδικασία της μάθησης, δεν εξυπηρετεί παιδαγωγικούς σκοπούς που συνίστανται στη διαπίστωση ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών των ατόμων και στην βελτίωση της συμπεριφοράς, μέσω της παιδαγωγικής παρέμβασης, αλλά από τη διαπίστωση προχωρεί στην επιλογή. Ως παιδαγω-