Author: I. Αγγελής

Title: Προσανατολισμένη γωνία δύο ευθειών__

Creator: HDML

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

Ὑπὸ Ι. Μ. Ἀγγελῆ, Ἐπιτ. Γυμνασιάρχου

(Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου)

6.6 Θεώρημα. *Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ προσανατολισμένης γωνίας δύο εὐθειῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν κάθε μία ἐκ τῶν εὐθειῶν ἀντικατασταθῇ μὲ οἱανδήποτε κάθετον αὐτῆς ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν.*

Πράγματι: Ἔστωσαν: Α, Β δύο εὐθεῖαι προσανατολισμένου ἐπιπέδου Π, μία εὐθεῖα Γ τοῦ Π κάθετος τῆς Α καὶ μία εὐθεῖα Δ τοῦ Π κάθετος τῆς Β.

Ἔχομεν:

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \equiv (\mathrm{A}, \Gamma) + (\Gamma, \Delta) + (\Delta, \mathrm{B}) \quad (1)$$

$$(\bmod \pi) \quad (\text{σχέσις Chasles}).$$

Ἀλλὰ ὅταν δύο εὐθεῖαι προσανατολισμένου ἐπιπέδου εἶναι κάθετοι, τότε ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας των εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\pi}{2}$, ἀκόμη δὲ καὶ ὁ $-\frac{\pi}{2}$, διότι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{\pi}{2}$ καὶ $-\frac{\pi}{2}$, ἀνήκουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κλάσιν modulo π ἐπειδὴ ἡ διαφορά των εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ π:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi\right).$$

Μὲ τὸ νὰ εἶναι λοιπὸν $\mathrm{A} \perp \Gamma$ καὶ $\Delta \perp \mathrm{B}$, δύναται νὰ τεθῇ:

$$(\mathrm{A}, \Gamma) \equiv \frac{\pi}{2} \ (\bmod \pi) \quad \text{καὶ} \quad (\Delta, \mathrm{B}) \equiv -\frac{\pi}{2} \bmod \pi.$$

Ἔτσι ἡ (1) δίδει:

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\Gamma, \Delta) - \frac{\pi}{2} \ (\bmod \pi)$$

$$\text{δηλ.} \quad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \equiv (\Gamma, \Delta) \quad (\bmod \pi) \quad (2).$$

Ἡ (2) ἐκφράζει τὸ θεώρημα, διότι εἶναι:

$$\Gamma \perp \mathrm{A} \quad \text{καὶ} \quad \Delta \perp \mathrm{B}.$$

6.7 Θεώρημα. *Εἰς μίαν ἰσότητα δύο ἀλγεβρικῶν τιμῶν προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου Π, δύνανται δύο ὁμόλογοι ἐκ τῶν εὐθειῶν νὰ ἀντικατασταθοῦν ἢ κάθε μία μὲ οἱανδήποτε κάθετόν της ἐντὸς τοῦ Π.*

Δηλαδή:

$$\text{Ἂν} \quad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \equiv (\Gamma, \Delta) \quad (1) \quad (\bmod \pi) \quad \text{καὶ}$$

$$\mathrm{E} \perp \mathrm{B}, \quad \mathrm{Z} \perp \Delta$$

ἐντὸς τοῦ Π, τότε θὰ εἶναι καί:

$$(\mathrm{A}, \mathrm{E}) \equiv (\Gamma, \mathrm{Z}) \quad \bmod \pi.$$

Πράγματι: Μὲ τὸ εἶναι $\mathrm{E} \perp \mathrm{B}$, ἕπεται ὅτι:

$$(\mathrm{B}, \mathrm{E}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (\bmod \pi).$$

Ὁμοίως:

$$(\mathrm{Z} \perp \Delta) \Rightarrow (\Delta, \mathrm{Z}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (\bmod \pi).$$

Ἄρα $\quad (\mathrm{B}, \mathrm{E}) \equiv (\Delta, \mathrm{Z}) \quad (2) \quad (\bmod \pi).$

Ἀπὸ (1) καὶ (2) διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, συνάγεται ὅτι:

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) + (\mathrm{B}, \mathrm{E}) \equiv (\Gamma, \Delta) + (\Delta, \mathrm{Z}) \quad (3) \quad (\bmod \pi).$$

Ἂν ἐφαρμοσθῇ εἰς τὰ μέλη τῆς (3) ἡ σχέσις Chasles διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν, ἡ (3) δίδει:

$$(\mathrm{A}, \mathrm{E}) \equiv (\Gamma, \mathrm{Z}) \quad (\bmod \pi) \qquad (4).$$

Ἡ (4) προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὴν (1) ἂν αἱ δεύτεραι εὐθεῖαι εἰς τὰ δύο ζεύγη τῆς (1) ἀντικατασταθοῦν ἢ κάθε μία μὲ τὴν κάθετόν της ἐντὸς τοῦ Π.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἐντὸς τοῦ Π καθέτους τῶν πρώτων εὐθειῶν Α καὶ Γ, π. χ. $\mathrm{H} \perp \mathrm{A}$ καὶ $\Theta \perp \Gamma$, τότε ἔχομεν:

$$(\mathrm{H}, \mathrm{A}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (\bmod \pi), \ (\Theta, \Gamma) \equiv \frac{\pi}{2} \ (\bmod \pi), \ \text{ἄρα},$$

$$(\mathrm{H}, \mathrm{A}) \equiv (\Theta, \Gamma) \ (\bmod \pi) \qquad (5).$$

Ἂν εἰς τὰ μέλη τῆς (5) προστεθοῦν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς (1), ἔχομεν:

$$(\mathrm{H}, \mathrm{A}) + (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \equiv (\Theta, \Gamma) + (\Gamma, \Delta) \quad (\bmod \pi), \ \text{δηλ.}$$

$$(\mathrm{H}, \mathrm{B}) \equiv (\Theta, \Delta) \quad (\bmod \pi) \qquad (6),$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν (1), ἂν αἱ πρῶται εὐθεῖαι εἰς τὰ δύο ζεύγη τῆς (1) ἀντικατασταθοῦν ἢ κάθε μία μὲ τὴν δοθεῖσαν κάθετόν της ἐντὸς τοῦ Π.

Ἔτσι, αἱ (5) καὶ (6) ἐκφράζουν τὸ θεώρημα.

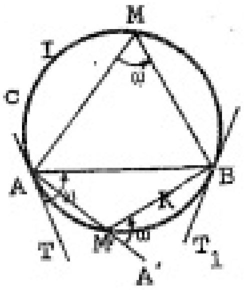
7. Σύνολον σημείων Μ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, τοιούτων ὥστε $(\mathrm{MA}, \mathrm{MB}) \equiv \alpha \ (\bmod \pi)$

7.1. Θεμελιῶδες θεώρημα. *Ἂν Α, Β εἶναι δύο σταθερὰ σημεῖα ἑνὸς κύκλου (C) ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου, τότε διὰ κάθε σημεῖον Μ τοῦ κύκλου (C) ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς προσανατολισμένης γωνίας εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ Μ καὶ ἀντιστοίχως ἀπὸ Α καὶ Β, δὲν μεταβάλλεται ἂν ἀντι-*

κατασταθοῦν: ἡ πρώτη ἐκ τῶν εὐθειῶν μὲ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου (C) κατὰ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς ἐκ τῶν σημείων A, B ἡ δὲ δευτέρα μὲ τὴν εὐθεῖαν, ποὺ ὁρίζουν τὰ A, B.

Δηλαδή: $(MA, MB) \equiv (AT, AB) \pmod{\pi}$, διὰ κάθε $M \in (C)$, ὅταν AT εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (C) κατὰ τὸ A.

Ἐπίσης: $(MB, MA) \equiv (BT_1, BA) \pmod{\pi}$, διὰ κάθε $M \in (C)$, ὅταν BT_1 εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (C) κατὰ τὸ B.



Πράγματι: Ἡ εὐθεῖα AB χωρίζει τὸν κύκλον (C) εἰς δύο τόξα, τὰ $\overset{\frown}{AIB}$ καὶ $\overset{\frown}{AKB}$. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον M ἐντὸς τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AIB}$ καὶ τυχὸν σημεῖον M' ἐντὸς τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AKB}$.

Αἱ γεωμετρικαὶ γωνίαι $\widehat{AMB}$, $\widehat{TAB}$, $\widehat{A'M'B}$ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν, ὡς γνωστόν, μέτρον ἴσον μὲ τὸ μέτρον $\frac{1}{2}$ τοξ. AM B.

Ἐπὶ πλέον, ὅταν προσανατολισθοῦν ὥστε νὰ ἔχουν ἀρχικὴν πλευρὰν ἀντιστοίχως τὰς ἡμιευθείας [M, A), [A, Γ), [M', A'), εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἔχουν ἑπομένως τὴν αὐτὴν ἀλγεβρικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν ἂς ὀνομάσωμεν ω ἀκτίνια.

Αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς ω, ὡς προσημασμένον μέτρον τῆς κυρτῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ ἡμιευθεῖα [M, A) στρεφομένη περὶ τὸ M μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας MB εἶναι, ὡς γνωστόν, ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας (MA, MB) (ὁ πρατεύων προσδιορισμός).

Ἄρα, $(MA, MB) \equiv \omega \pmod{\pi}$ (1).

Ὁμοίως, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ω, ὡς προσημασμένον μέτρον τῆς κυρτῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ ἡμιευθεῖα AT στρεφομένη περὶ τὸ A μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας AB, εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας (AT, AB) καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$(AT, AB) \equiv \omega \pmod{\pi} \quad (2).$$

Τέλος, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ω, ὡς προσημασμένον μέτρον τῆς κυρτῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν γράφει μία ἐκ τῶν ἡμιευθειῶν εἰς τὰς ὁποίας χωρίζεται ἡ εὐθεῖα M'A τεμνομένη ὑπὸ τῆς M B (ἡ ἡμιευθεῖα [M', A')) διὰ στροφῆς περὶ τὸ M', μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας M'B, εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας $(M'A, M'B) \equiv \omega \pmod{\pi}$ (3),

Ἀπὸ τὰς (1), (2) καὶ (3) φαίνεται ὅτι:

$$(MA, MB) \equiv (AT, AB) \pmod{\pi} \quad (4)$$

$$(M'A, M'B) \equiv (AT, AB) \pmod{\pi} \quad (5).$$

Παρατηροῦμεν δηλαδὴ ὅτι ὅταν τὸ M διατρέχῃ τὸ τόξον $\overset{\frown}{AIB}$ ἀληθεύει ἡ (4) καὶ ὅταν διατρέχῃ τὸ τόξον $\overset{\frown}{AKB}$ ἀληθεύει ἡ (5).

Δηλαδή: Διὰ κάθε σημεῖον M τοῦ κύκλου (C) διάφορον τοῦ A καὶ B ἀληθεύει τὸ θεώρημα.

Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι τὸ M εὑρίσκεται εἰς τὸ A. Τότε ἡ MA γίνεται ἡ ἐφαπτομένη τοῦ (C) εἰς τὸ A, ἄρα συμπίπτει μὲ τὴν AT, ἡ δὲ MB γίνεται ἡ AB. Ἔτσι ἡ (MA, MB) ταυτίζεται μὲ τὴν (AT, AB).

Ἄρα, καὶ ὅταν τὸ M εἶναι εἰς τὸ A, ἀληθεύει τὸ θεώρημα.

Τέλος, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ M εἶναι εἰς τὸ B. Τότε ἡ MA γίνεται ἡ BA, ἡ δὲ MB γίνεται ἡ ἐφαπτομένη BT_1 τοῦ (C) εἰς τὸ B. Ἔτσι ἡ (MA, MB), ταυτίζεται μὲ τὴν (BA, BT_1).

Ἀλλά, ἐπειδὴ ἡ διάμετρος τοῦ (C) ἡ κάθετος τῆς χορδῆς AB εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν A, B καὶ τῶν ἐφαπτομένων τοῦ (C) εἰς τὰ A, B, συνάγεται ὅτι ἡ γωνία (BA, BT_1) εἶναι συμμετρικὴ πρὸς ἄξονα τῆς γωνίας (AB, AT) καὶ συνεπῶς ἀντίθετος αὐτῆς.

Ἄρα, $(BA, BT_1) \equiv -(AB, AT) \equiv (AT, AB) \pmod{\pi}$ καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

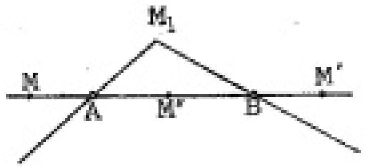
$$(BA, BT_1) \equiv (AT, AB) \pmod{\pi} \quad (6).$$

Ἡ (6) φανερώνει ὅτι, ὅταν τὸ M εὑρεθῇ εἰς τὸ B, ἀληθεύει τὸ θεώρημα.

Ἄρα τὸ θεώρημα ἀληθεύει πράγματι διὰ κάθε σημεῖον M τοῦ κύκλου (C).

7.2. Θεώρημα. *Ἂν A, B εἶναι δύο σταθερὰ σημεῖα προσανατολισμένου ἐπιπέδου Π, τὸ σύνολον τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, τοιούτων ὥστε $(MA, MB) \equiv 0 \pmod{\pi}$, εἶναι ἡ εὐθεῖα AB ἀπεστερημένη ἀπὸ τὰ A, B.*

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον M τῆς εὐθείας AB ἐξωτερικῶς τοῦ τμήματος AB, τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι τὸ A μεταξὺ B καὶ M, τυχὸν ἄλλο M', τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι τὸ B μεταξὺ A καὶ M' καὶ τυχὸν M'' μεταξὺ A καὶ B. Ἐπειδὴ τὰ A καὶ B εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ M, ἡ γεωμετρικὴ γωνία $\widehat{AMB}$ εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία, καὶ ἔτσι ὁ ἀριθμὸς 0 εἶναι προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας (MA, MB).



Ἄρα, $(MA, MB) \equiv 0 \pmod{\pi}$ (1).

Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὰ A καὶ B εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ M′, ἡ γεωμετρικὴ γωνία $\widehat{AM'B}$ εἶναι μηδενικὴ καὶ ὁ 0 εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας (M′A, M′B).

Ἄρα, $(M'A, M'B) \equiv 0 \pmod{\pi}$ (2).

Τέλος, ἐπειδὴ τὰ A καὶ B εἶναι εἰς ἀντίθετα μέρη τοῦ M″, ἡ γεωμετρικὴ γωνία $\widehat{AM''B}$ εἶναι εὐθυγραμμισμένη γωνία καὶ ἔχει μέτρον εἰς ἀκτίνια ἴσον μὲ π.

Ἔτσι ὁ π εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας (M″A, M″B) καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$(M''A, M''B) \equiv \pi \pmod{\pi} \quad (3).$$

Ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ π καὶ 0 εἶναι ἰσότιμοι modulo π, διότι ἡ διαφορὰ αὐτῶν $\pi - 0 = \pi$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ π.

Διὰ τοῦτο καὶ ὁ ἀριθμὸς 0 εἶναι ἐπίσης ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας (M″A, M″B) καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$(M''A, M''B) \equiv 0 \pmod{\pi} \quad (4).$$

Ἂν ὀνομάσωμεν K τὸ σύνολον τῶν σημείων M τοῦ Π, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν:

$$(MA, MB) \equiv 0 \pmod{\pi},$$

τότε ἀπὸ τὰς (1), (2) καὶ (4) φαίνεται ὅτι κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας AB, διάφορον τῶν A καὶ B ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον K.

Θεωροῦμεν τώρα τυχὸν σημεῖον M_1 τοῦ Π μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας AB. Τότε αἱ εὐθεῖαι M_1A, M_1B εἶναι διαφορετικῆς διευθύνσεως καὶ συνεπῶς ἡ γεωμετρικὴ γωνία $\widehat{AM_1B}$ εἶναι διάφορος τῆς μηδενικῆς καὶ διάφορος τῆς εὐθυγραμμισμένης. Ἔτσι οὔτε ὁ 0 οὔτε ὁ π εἶναι ἕνας προσδιορισμὸς τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῆς προσανατολισμένης γωνίας (M_1A, M_1B). Δηλαδὴ εἶναι:

$$(M_1A, M_1B) \not\equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Ἄρα, σημεῖον τοῦ Π μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας AB, δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον K.

Συνεπῶς τὸ σύνολον K ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς AB τὰ διάφορα τῶν A, B καὶ μόνον ἀπὸ αὐτά.

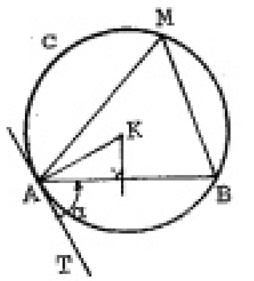
$$\text{Ἄρα:} \quad \{ M : (MA, MB) \equiv 0 \pmod{\pi} \} = (AB) - \{A, B\}.$$

Αὐτὸ ἐκφράζει τὸ θεώρημα.

7.3 Θεώρημα. *Ἂν A, B εἶναι δύο σταθερὰ σημεῖα ἐντὸς προσανατολισμένου ἐπιπέδου Π, τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου Π, τοιούτων ὥστε $(MA, MB) \equiv \alpha \pmod{\pi}$, ὅπου α δεδομένος ἀριθμός, τοιοῦτος ὥστε $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ εἶναι κύκλος διερχόμενος ἀπὸ τὰ A, B καὶ ἐφαπτόμενος τῆς AT τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῆς σχέσεως:*

$$(AT, AB) \equiv \alpha \pmod{\pi}.$$

Λύσις. Ἐπειδὴ οἱ ἰσότιμοι ἑνὸς ἀριθμοῦ ὡς πρὸς μέτρον τὸν π (δηλ. modulo π) διαφέρουν ἀπὸ ἐκεῖνον κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ π θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, δύναται διὰ προσθέσεως καταλλήλου πολλαπλασίου τοῦ π νὰ ὑποτεθῇ ὅτι εἶναι $0 < \alpha < \pi$, ἀφοῦ εἶναι $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.



Ἔπειτα εἶναι εὔκολον νὰ κατασκευασθῇ μὲ κορυφὴν A καὶ μὲ πλευρὰν τὴν AB γεωμετρικὴ γωνία $\widehat{TAB}$ ἔχουσα μέτρον τὸν δεδομένον θετικὸν ἀριθμὸν α καὶ συνάμα νὰ εἶναι θετικῆς φορᾶς ὅταν προσανατολισθῇ μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν AT. Αὐτὴ ἡ AT εἶναι μοναδική.

Μετὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ἀνωτέρω εὐθείας AT, κατασκευάζεται καὶ κύκλος (C) διερχόμενος ἀπὸ A, B καὶ ἐφαπτόμενος τῆς AT. Ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον K ὅπου τέμνονται ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος AB καὶ ἡ κάθετος τῆς AT κατὰ τὸ A.

Αὐταὶ αἱ δύο κάθετοι, μὲ τὸ νὰ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως δύο τεμνομένων εὐθειῶν AB, AT, τέμνονται, καὶ ἔτσι ὁ κύκλος (C) εἶναι μοναδικός, ἀφοῦ καὶ ἡ AT εἶναι μοναδική.

Διὰ κάθε σημεῖον M τοῦ κύκλου (C), ἔχομεν, ὡς γνωστόν, (θεμελιῶδες θεώρημα 7.1) ὅτι:

$$(MA, MB) \equiv (AT, AB) \mod \pi, \quad \text{ἄρα}$$

$$(MA, MB) \equiv \alpha \pmod{\pi},$$

ἀφοῦ ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\widehat{TAB} = \alpha$.

Ἄρα κάθε σημεῖον τοῦ κύκλου (C) ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τῶν σημείων M, τῶν ἀναφερομένων εἰς τὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον σύνολον ἂς ὀνομάσωμεν σύνολον Σ. Ἔτσι:

$$M \in (C) \Rightarrow M \in \Sigma \quad (1)$$

Θεωροῦμεν τώρα τυχὸν σημεῖον M_1, διάφορον τῶν A, B, τοιοῦτον ὥστε $M_1 \in \Sigma$. Ὑπάρχουν ἄπειρα. Ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ ἐντὸς τοῦ Π γεωμετρικὴ γωνία $x\widehat{O}y$, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ Ox, Oy νὰ εἶναι διαφόρου διευθύνσεως τῶν AT, AB ἀντιστοίχως, ἔχουσα μέτρον τὸν θετικὸν ἀριθμὸν α καὶ τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι θετικῆς φορᾶς ὅταν προσανατολισθῇ μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν Ox.

Τότε ἡ παράλληλος τῆς Ox ἀπὸ A καὶ ἡ παράλληλος τῆς Oy ἀπὸ B θὰ τέμνωνται εἰς σημεῖον M_1 ἐξωτερικῶς τῆς εὐθείας AB. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι:

$$(Ox, Oy) \equiv \alpha \mod \pi,$$

ἡ δὲ ἀλγεβρικὴ τιμὴ προσανατολισμένης γωνίας εὐθειῶν δὲν μεταβάλλεται ἂν αἱ εὐθεῖαι ἀντικατασταθοῦν διὰ παραλλήλων των, ἔχομεν:

$$(M_1A, M_1B) \equiv \alpha \mod \pi \quad (2), \quad \text{ἄρα} \quad M_1 \in \Sigma.$$

Ἐπειδὴ τὸ M_1 δὲν εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας AB, ἔχομεν τρία σημεῖα A, M_1, B τὰ ὁποῖα δὲν εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας καὶ συνεπῶς ὁρίζουν ἕνα κύκλον (C').

Ἂν χαραχθῇ ἡ AT_1 ἐφαπτομένη τοῦ (C') κατὰ τὸ A, τότε, ὡς γνωστόν, θὰ ἔχωμεν:

$$(M_1A, M_1B) \equiv (AT_1, AB) \mod \pi),$$

ἡ ὁποία, λόγῳ τῆς (2) γίνεται:

$$(AT_1, AB) \equiv \alpha \pmod{\pi}.$$

Εἶναι ὅμως καί:

$$(AT, AB) \equiv \alpha \pmod{\pi},$$

καὶ ἀπὸ αὐτὸ συνάγεται ὅτι:

$$(AT_1, AB) \equiv (AT, AB) \mod \pi$$

ἀπὸ ὅπου διὰ ἀντιμεταθέσεως τῶν μέσων συνάγεται ὅτι:

$$(AT_1, AT) \equiv (AB, AB) \pmod{\pi}$$

$$\text{δηλ.} \quad (AT, AT) \equiv 0 \pmod{\pi} \quad (3).$$

Ἀπὸ τὴν (3) συνάγεται ὅτι αἱ AT_1 καὶ AT ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν.

Καὶ ἐπειδὴ ἔχουν κοινὸν ἕνα σημεῖον, τὸ A, ἕπεται ὅτι ταυτίζονται. Ἔτσι ὁ κύκλος (C') ἐφαπτόμενος τῆς AT_1 εἰς τὸ A, εἶναι κύκλος ἐφαπτόμενος τῆς AT εἰς τὸ A, διερχόμενος ταυτοχρόνως ἀπὸ B. Κύκλος ὅμως διερχόμενος ἀπὸ A, B καὶ ἐφαπτόμενος τῆς AT εἶναι ὁ (C) καὶ τέτοιος κύκλος εἶναι μοναδικός.

Ἄρα ὁ (C') ταυτίζεται μὲ τὸν (C), καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον M_1, σημεῖον τοῦ (C'), εἶναι σημεῖον τοῦ (C)

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ συνόλου Σ ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον (C).

Ἰσχύει λοιπὸν τελικὰ ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία:

$$M \in (C) \Leftrightarrow M \in \Sigma. \quad \text{Ἄρα} \quad \Sigma = (C) \quad (4)$$

Ἡ (4) ἐκφράζεται τὸ θεώρημα.

Παρατήρησις 1η. Ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ κύκλος (C) εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων M τοῦ Π, τοιούτων ὥστε:

$$(MA, MB) \equiv \alpha \pmod{\pi} \quad \alpha \not\equiv 0 \mod \pi,$$

συνάγεται ὅτι ὁ κύκλος αὐτὸς εἶναι ὁ κύκλος τὸν ὁποῖον ὁρίζουν τὰ A, B μαζὺ μὲ ἕνα οἱονδήποτε ἐκ τῶν ἀνωτέρω σημείων M, διότι αὐτὸς ὁ τελευταῖος καὶ ὁ (C) ἔχουν κοινὰ τρία σημεῖα, τὰ A, B καὶ ἕνα ἐκ τῶν M. Εἶναι δυνατὸν λοιπὸν νὰ λέγωμεν:

«Τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων M προσανατολισμένου ἐπιπέδου Π, τοιούτων ὥστε:

$$(MA, MB) \equiv \alpha \pmod{\pi}, \quad \alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi},$$

ὅπου A, B δεδομένα σημεῖα, εἶναι ὁ κύκλος, τὸν ὁποῖον ὁρίζουν τὰ A, B μαζὺ μὲ ἕνα οἱονδήποτε ἐκ τῶν M.

Παρατήρησις 2α. Θεωροῦντες τὸν περίκυκλον τριγώνου ΑΒΓ, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι κύκλος, διερχόμενος ἀπὸ δύο σημεῖα B καὶ Γ, ὁ ὁποῖος περιέχει καὶ ἕνα σημεῖον A, ποὺ ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου του, τοιούτων ὥστε:

$$(MB, M\Gamma) \equiv (AB, A\Gamma) \pmod{\pi},$$

$$(AB, A\Gamma) \not\equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Διὰ τοῦτο θὰ εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων M, τοιούτων ὥστε:

$$(MB, M\Gamma) \equiv (AB, A\Gamma) \pmod{\pi}.$$

Ὁ αὐτὸς κύκλος εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων M' τοῦ ἐπιπέδου του τοιούτων ὥστε:

$$(M'A, MB') \equiv (\Gamma A, \Gamma B) \pmod{\pi}$$

καθὼς καὶ ὅλων τῶν σημείων M'' τοῦ ἐπιπέδου του, τοιούτων ὥστε:

$$(M''A, M''\Gamma \equiv (BA, B\Gamma) \pmod{\pi}.$$

7.4 *Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ τὸ ὁμόκυκλον 4 σημείων προσανατολισμένου ἐπιπέδου.*

Θεώρημα. *Τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ ἐντὸς* *προσανατολισμένου ἐπιπέδου θὰ εἶναι ὁμόκυκλα ἄν καὶ μόνον ἄν, ἡ προσανατολισμένη γωνία τῶν δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται διὰ τῆς συνδέσεως ἑνὸς ἐξ αὐτῶν τῶν σημείων μὲ δύο οἱαδήποτε ἐκ τῶν ἄλλων, ἔχῃ ἀλγεβρικὴν τιμὴν $\not\equiv 0 \pmod{\pi}$ καὶ ἴσην μὲ τῆς προσανατολισμένης γωνίας τῶν δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται διὰ τῆς συνδέσεως τοῦ τετάρτου σημείου μὲ τὰ αὐτὰ ἀνωτέρω δύο ψηφία κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.*

Ἀπόδειξις. Ἂς ἐπιλεγῇ πρὸς ὁρισμὸν τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὸ θεώρημα μεταξὺ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ ὡς διατεταγμένον ζεῦγος σημείων τὸ (Α, Β).

Τότε, ἡ σύνδεσις αὐτῶν μὲ τὸ Γ ὁρίζει ὡς διατεταγμένον ζεῦγος εὐθειῶν τὸ (ΓΑ, ΓΒ), ἡ δὲ σύνδεσίς του μὲ τὸ σημεῖον ποὺ ὑπολείπεται, ὁρίζει τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (ΔΑ, ΔΒ).

Ἂν ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$(\Gamma A, \Gamma B) \equiv (\Delta A, \Delta B) \not\equiv 0 \pmod{\pi} \quad (1)$$

τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$(\Gamma A, \Gamma B) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

συνάγεται ὅτι τὸ σημεῖον Γ δὲν ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Ἔτσι τὰ Α, Β, Γ θὰ εἶναι τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ συνεπῶς ὁρίζουν ἕνα κύκλον (C).

Αὐτὸς ὁ κύκλος (C), περίκυκλος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου του, τοιούτων ὥστε:

$$(MA, MB) \equiv (\Gamma A, \Gamma B) \bmod \pi \quad (2)$$

Ἔτσι ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$(\Gamma A, \Gamma B) \equiv (\Delta A, \Delta B) \pmod{\pi}$$

συνάγεται ὅτι ἡ (2) ἀληθεύει διὰ Μ = Δ. Ἑπομένως τὸ Δ ἀνήκει εἰς τὸ ἀνωτέρω σύνολον τῶν σημείων Μ, δηλαδὴ εἰς τὸν κύκλον (C) τῶν Α, Β, Γ, καὶ ἔτσι τὰ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμόκυκλα. Ὥστε, ἂν ἀληθεύῃ ἡ (1), τότε τὰ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμόκυκλα.

Ἀντιστρόφως: Ἂν τὰ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμόκυκλα, αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀνὰ τρία δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ὅτι ἕνα οἱονδήποτε ἐξ αὐτῶν ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον, τὸν ὁποῖον ὁρίζουν τὰ ὑπόλοιπα τρία.

Ἔτσι τὸ Δ θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν κύκλον τῶν Α, Β, Γ, περίκυκλον τριγώνου ΑΒΓ, ὁπότε ἐπειδὴ τὸ Γ δὲν ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, θὰ ἰσχύῃ:

$$(\Gamma A, \Gamma B) \not\equiv 0 \pmod{\pi} \quad (3)$$

ὁ δὲ κύκλος αὐτὸς θὰ εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων Μ' τοῦ ἐπιπέδου του, τοιούτων ὥστε:

$$(M'A, M'B) \equiv (\Gamma A; \Gamma B) \pmod{\pi} \quad (4)$$

Ἐπειδὴ τὸ Δ ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον αὐτόν, δηλαδὴ εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀνωτέρω σημείων Μ', ἕπεται ὅτι ἡ (4) θὰ ἀληθεύῃ διὰ Μ' = Δ καὶ θὰ ἰσχύῃ:

$$(\Delta A, \Delta B) \equiv (\Gamma A, \Gamma B) \pmod{\pi} \quad (5)$$

Ὥστε ἂν τὰ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμόκυκλα, τότε θὰ ἀληθεύουν αἱ (4) καὶ (5), ποὺ δὲν εἶναι παρὰ αἱ (1).

Ἄρα, τὰ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμόκυκλα ἄν, καὶ μόνον ἂν ἀληθεύουν αἱ (1).

Παρατήρησις. Ἂν μεταξὺ τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐπιλεγῇ πρὸς ὁρισμὸν τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὸ θεώρημα ὡς διατεταγμένον ζεῦγος σημείων ἄλλο ζεῦγος σημείων διάφορον τοῦ (Α, Β) εὑρίσκονται, σύμφωνα μὲ τὸ ἀποδεδειγμένον θεώρημα, καὶ ἄλλαι συνθῆκαι ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι διὰ τὸ ὁμόκυκλον τῶν Α, Β, Γ, Δ, αἱ ἑξῆς:

$$(BA, B\Gamma) \equiv (\Delta A, \Delta\Gamma) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

ἂν ἐπιλεγῇ τὸ ζεῦγος (Α, Γ)

$$(BA, B\Delta) \equiv (\Gamma A, \Gamma\Delta) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

ἂν ἐπιλεγῇ τὸ ζεῦγος (Α, Δ)

$$(AB, A\Gamma) \equiv (\Delta B, \Delta\Gamma) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

ἂν ἐπιλεγῇ τὸ ζεῦγος (Β, Γ)

$$(AB, A\Delta) \equiv (\Gamma B, \Gamma\Delta) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

ἂν ἐπιλεγῇ τὸ ζεῦγος (Β, Δ)

$$(A\Gamma, A\Delta) \equiv (B\Gamma, B\Delta) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

ἂν ἐπιλεγῇ τὸ ζεῦγος (Γ, Δ).

Ἡ πρότασις τὴν ὁποίαν ἐκφράζει τὸ θεώρημα ὀνομάζεται: *«Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης κύκλου διὰ τέσσαρα σημεῖα του»*.

8. Μερικαὶ Ἐφαρμογαί

8.1 *Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἔχουν χαραχθῆ τὰ ὕψη του ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὸν πόδα ἑνὸς ὕψους καὶ τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων ὑψῶν, εἶναι ὅμοιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὑπὸ τὴν ἀντιστοιχίαν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ μέσα τῶν ὑψῶν ἔχουν ὁμόλογον τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.*

Δηλαδὴ τὸ τρίγωνον $A'B_1\Gamma_1$, ὅπου B_1, Γ_1 εἶναι τὰ μέσα τῶν ὑψῶν ΒΒ', ΓΓ' εἶναι ὅμοιον τοῦ ΑΒΓ ὑπὸ τὴν ἀντιστοιχίαν:

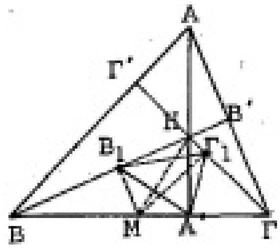
$$\left.\begin{matrix} A'B_1\Gamma_1 \\ AB\Gamma \end{matrix}\right\}.$$

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι ἂν σημειωθῇ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τότε ἡ εὐθεῖα MB_1, διερχομένη ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΒΒ' τοῦ τριγώνου ΒΓΒ' εἶναι παράλληλος τῆς τρίτης πλευρᾶς Β'Γ, καὶ ἔτσι εἶναι MB_1 κάθετος τῆς ΒΒ', ἀφοῦ καὶ ἡ παράλληλος τῆς MB_1, ἡ Β'Γ, εἶναι κάθετος τῆς ΒΒ'.

Ὁμοίως, μὲ τὸ νὰ εἶναι τὰ M, Γ_1 μέσα τῶν πλευρῶν ΓB, $\Gamma\Gamma'$ τοῦ τριγώνου $B\Gamma\Gamma'$ ἡ δὲ $B\Gamma'$ κάθετος τῆς $\Gamma\Gamma'$, ἔπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα $M\Gamma_1$ εἶναι παράλληλος τῆς $B\Gamma'$ καὶ κάθετος τῆς $\Gamma\Gamma'$.

Ἂν λοιπὸν σημειωθῇ τὸ ὀρθόκεντρον H τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, αἱ γωνίαι:

$$M\widehat{B_1}H,\ M\widehat{\Gamma_1}H,\ M\widehat{A'}H$$



θὰ εἶναι ὀρθαί, καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα MH θὰ φαίνεται ἀπὸ B_1, Γ_1, A' ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Διὰ τοῦτο τά:

$$M,\ A',\ B_1,\ \Gamma_1$$

εἶναι ὁμόκυκλα, ἀνήκοντα εἰς κύκλον διαμέτρου MH.

Διὰ νὰ ἔχωμεν γενικὴν ἀπόδειξιν, δηλαδὴ ἀπόδειξιν ἀνεξάρτητον ἀπὸ σχῆμα, χρησιμοποιοῦμεν ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν, καὶ ἐξετάζομεν τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου $A'B_1\Gamma_1$.

Πρὸς τοῦτο ἐπωφελούμεθα ἀπὸ τὸ ὁμόκυκλον τῶν:

$$A',\ M,\ B_1,\ \Gamma_1,$$

ἀπὸ ὅπου, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις τοῦ A' ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ ὡς πρὸς τὸ M, συμπεραίνομεν ὅτι θὰ εἶναι:

$$(A'B_1,\ A'\Gamma_1) \equiv (MB_1,\ M\Gamma_1) \pmod{\pi}$$
$$\equiv (A\Gamma,\ AB) \pmod{\pi},$$

διότι $A\Gamma \parallel MB_1$, $AB \parallel M\Gamma_1$

ἄρα $(A'B_1,\ A'\Gamma_1) \equiv (A\Gamma,\ AB)$ mod π (1).

Ἐπίσης, λόγῳ τοῦ ὁμοκύκλου τῶν:

$$A',\ M,\ B_1,\ \Gamma_1,$$

ἔχομεν:

$$(B_1A',\ B_1\Gamma_1) \equiv (MA',\ M\Gamma_1) \pmod{\pi}$$
$$\equiv (B\Gamma,\ BA) \pmod{\pi},$$

διότι ἡ εὐθεῖα MA' ταυτίζεται μὲ τήν:

$B\Gamma$ καὶ $BA \parallel M\Gamma_1$

ἄρα $(B_1A',\ B_1\Gamma_1) = (B\Gamma,\ BA)$ mod π (2).

Τέλος, λόγῳ πάλιν τοῦ ὁμοκύκλου τῶν:

$$A',\ M,\ B_1,\ \Gamma_1$$

ἔχομεν:

$$(\Gamma_1B_1,\ \Gamma_1A') \equiv (MB_1,\ MA') \pmod{\pi}$$
$$\equiv (\Gamma A,\ \Gamma B) \pmod{\pi}$$

διότι $\Gamma A \parallel MB_1$

καὶ ἡ εὐθεῖα ΓB ταυτίζεται μὲ τὴν εὐθεῖαν MA', ἄρα $(\Gamma_1B_1,\ \Gamma_1A') \equiv (\Gamma A,\ \Gamma B) \pmod{\pi}$ (3).

Ἀπὸ τὴν (1) συνάγεται ὅτι αἱ γεωμετρικαὶ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ εὐθεῖαι $A'B_1$, $A'\Gamma_1$ εἶναι ἴσαι, μίαν πρὸς μίαν μὲ τὰς γεωμετρικὰς γωνίας τῶν εὐθειῶν $A\Gamma$, AB.

Ἀλλὰ αἱ γεωμετρικαὶ γωνίαι δύο τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι κάθε μία ἴση μὲ τὴν κατακορυφήν της καὶ παραπληρωματικὴ τῶν ἐφεξῆς μὲ αὐτήν.

Διὰ τοῦτο ἡ γωνία $B_1\widehat{A'}\Gamma_1$ θὰ εἶναι ἡ ἴση τῆς $B\widehat{A}\Gamma$ ἢ παραπληρωματικὴ αὐτῆς.

Δηλαδὴ ἡ γωνία $\widehat{A'}$ τοῦ τριγώνου $A'B_1\Gamma_1$ καὶ ἡ γωνία $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

Ἐπίσης, ἐπειδή, ὅπως συνάγεται ἀπὸ τὴν (2), αἱ γεωμετρικαὶ γωνίαι τῶν εὐθειῶν B_1A', $B_1\Gamma_1$ εἶναι μία πρὸς μίαν ἴσαι μὲ τὰς γεωμετρικὰς γωνίας τῶν εὐθειῶν $B\Gamma$, BA, ἔπεται ὅτι ἡ γωνία:

$$A'\widehat{B_1}\Gamma_1 = \widehat{B}_1$$

τοῦ τριγώνου $A'B_1\Gamma_1$ εἶναι ἴση ἢ παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας:

$$A\widehat{B}\Gamma = \widehat{B} \text{ τοῦ τριγ. } AB\Gamma.$$

Τέλος, ἐπειδή, ὅπως συνάγεται ἀπὸ τὴν (3) αἱ γεωμετρικαὶ γωνίαι τῶν εὐθειῶν Γ_1B_1, Γ_1A' εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν μὲ τὰς γεωμετρικὰς γωνίας τῶν εὐθειῶν ΓA, ΓB, ἔπεται ὅτι ἡ γωνία:

$$A'\widehat{\Gamma_1}B_1 = \widehat{\Gamma}_1 \text{ τοῦ τριγ. } A'B_1\Gamma_1$$

εἶναι ἴση ἢ παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας:

$$A\widehat{\Gamma}B = \widehat{\Gamma} \text{ τοῦ τριγ. } AB\Gamma.$$

Ἔτσι τὰ ζεύγη τῶν γωνιῶν:

$$(\widehat{A'},\ \widehat{A}),\ (\widehat{B}_1,\ B),\ (\widehat{\Gamma}_1,\ \widehat{\Gamma})$$

εἶναι τὸ καθένα ἢ ζεῦγος ἴσων γωνιῶν ἢ ζεῦγος παραπληρωματικῶν γωνιῶν. Ἀλλά, ἐπειδὴ αἱ:

$$\widehat{A'},\ \widehat{B}_1,\ \widehat{\Gamma}_1$$

εἶναι γωνίαι τριγώνου καθὼς καὶ αἱ $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ ἔπεται ὅτι:

$$(\widehat{A'}+\widehat{B}_1+\widehat{\Gamma}_1)+(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}) = 2 \text{ ὀρθ} + 2\text{ὀρθ} = 4\text{ὀρθ}.$$

Διὰ τοῦτο ἀποκλείεται τὸ καθένα νὰ εἶναι ζεῦγος παραπληρωματικῶν γωνιῶν ἢ δύο ἀπὸ τὰ ζεύγη νὰ εἶναι ζεῦγος παραπληρωματικῶν γωνιῶν τὸ καθένα, διότι τότε τὸ ἄθροισμα τῶν 6 γωνιῶν θὰ ἦτο) 4ὀρθ , πρᾶγμα ἀδύνατον, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι ἀκριβῶς ἴσον μὲ 4 ὀρθ., ὡς ἐδείχθη.

Κατ' ἀνάγκην λοιπὸν θὰ εἶναι ὅλα τὰ ζεύγη, ζεῦγος ἴσων γωνιῶν τὸ καθένα: Δηλαδὴ θὰ εἶναι :

$$\widehat{A'} = \widehat{A},\ \widehat{B_1} = \widehat{B},\ \widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma},$$

καὶ συνεπῶς τὰ τρίγωνα $A'B_1\Gamma_1$, $AB\Gamma$ ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια, ὑπὸ τὴν ἀντιστοιχίαν :

$$\left.\begin{matrix} A'B_1\Gamma_1 \\ AB\Gamma \end{matrix}\right\}.$$

Παρατήρησις. Ἂν δὲν γίνῃ χρῆσις προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν καὶ ἡ ἀπόδειξις περιορισθῇ εἰς τὸ σχεδιασμένον σχῆμα, ἡ ἀπόδειξις δὲν θὰ εἶναι πλήρης, διότι ἀπὸ τὸ σχῆμα αὐτό, ἐπειδὴ τὰ A', M, B_1 Γ_1 εἶναι ὁμόκυκλα εὑρίσκεται ὅτι :

$$B_1\widehat{A'}\Gamma_1 = B_1\widehat{M}\Gamma$$

ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον μὲ κοινὸν τὸ ἀντίστοιχον τόξον καὶ ἀκολούθως εὑρίσκεται ὅτι :

$$B_1\widehat{A'}\Gamma_1 = \widehat{A}$$

τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ἀλλὰ ἡ ἰσότης :

$$B_1\widehat{A'}\Gamma_1 = B_1\widehat{M}\Gamma_1$$

δὲν ἰσχύει εἰς κάθε περίπτωσιν σχήματος. Ἂν π.χ. τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἀμβλυγώνιον εἰς τὸ Γ, τότε ἀπὸ τὸ ὁμόκυκλον τῶν A', M, B_1, Γ εὑρίσκεται ὅτι ἡ $B_1\widehat{A'}\Gamma_1$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς $B_1\widehat{M'}\Gamma_1$ καὶ ὄχι ἴση αὐτῆς. Καὶ καταλήγομεν βεβαίως πάλιν εἰς τὸ ὅτι :

$$B_1\widehat{A'}\Gamma_1 = \widehat{A} \text{ τοῦ τριγ. } AB\Gamma,$$

διότι εἶναι καὶ ἡ $\widehat{A}$ παραπληρωματικὴ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τῆς $B_1\widehat{M}\Gamma_1$ (ἔχουν πλευρὰς παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν ἀλλὰ τὸ ἕνα ζεῦγος εἶναι ὁμόρροποι καὶ τὸ ἄλλο ἀντίρροποι).

Ἀκόμη καὶ ἄλλαι σχέσεις μεταξὺ τῶν γωνιῶν δὲν ἰσχύουν εἰς κάθε περίπτωσιν σχήματος

Αὐτὸ φανερώνει ὅτι ἀπόδειξις δεσμευμένη μὲ ἕνα σχῆμα δὲν δύναται νὰ εἶναι γενικὴ ἀπόδειξις.

Εἶναι διὰ τοῦτο ἀπαραίτητος ἡ χρῆσις προσανατολισμένων γωνιῶν, διότι διαφορετικά, διὰ νὰ ἔχωμεν πλήρη ἀπόδειξιν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐξετάζωμεν χωριστὰ κάθε δυνατὴν περίπτωσιν σχήματος. Αὐτὸ ὅμως κάποτε εἶναι ἀδύνατον, διότι αἱ περιπτώσεις δυνατὸν νὰ εἶναι ἄπειροι. Ἀλλὰ καὶ ὅπου εἶναι δυνατόν, εἶναι πάντως ἐνοχλητικόν, ἀλλὰ καὶ ἀπαραίτητον ἂν θέλωμεν πλήρη ἀπόδειξιν.

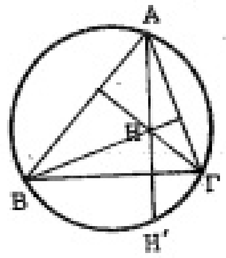
8.2 *Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ συμμετρικὸν τοῦ ὀρθοκέντρου H τριγώνου $AB\Gamma$ ὡς πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ, ἀνήκει εἰς τὸν περίκυκλον τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.*

Ἀπόδειξις. Ὀνομάζομεν H' τὸ συμμετρικὸν τοῦ H ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$.

Ὁ περίκυκλος τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου του, τοιούτων ὥστε :

$$(MB,\ M\Gamma) \equiv (AB,\ A\Gamma) \pmod{\pi} \quad (1).$$

Ἑπομένως τὸ H' θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν περίκυκλον $AB\Gamma$, ἂν ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀνωτέρω σημείων M, δηλαδὴ ἂν ἀληθεύῃ ἡ (1) διὰ $M = H'$ δηλαδὴ ἂν ἰσχύῃ :



$$(H'B,\ H'\Gamma) \equiv (AB,\ A\Gamma) \pmod{\pi} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ H' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ H ὡς πρὸς τὴν $B\Gamma$, ἡ γωνία $(H'B,\ H'\Gamma)$ εἶναι συμμετρικὴ τῆς $(HB,\ H\Gamma)$ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $B\Gamma$.

Διὰ τοῦτο, ἔχομεν :

$$(H'B,\ H'\Gamma) \equiv -(HB,\ H\Gamma) \pmod{\pi}$$

ἄρα $$(H'B,\ H\Gamma') \equiv (H\Gamma,\ HB) \pmod{\pi} \quad (3)$$

Ἀλλὰ μὲ τὸ νὰ εἶναι τὸ H ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ἕπεται ὅτι εἶναι :

$$H\Gamma \perp AB \quad \text{καὶ} \quad HB \perp A\Gamma \quad (4)$$

Καὶ ἐπειδὴ εἰς μίαν ἰσότητα δύο ἀλγεβρικῶν τιμῶν προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν, δύνανται αἱ εὐθεῖαι νὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ οἱανδήποτε κάθετόν της ἢ κάθε μία ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς γωνίας των, ἀπὸ τὴν (3), λόγῳ τῆς (4) συνάγεται ὅτι :

$$(H'B,\ H'\Gamma) \equiv (AB,\ A\Gamma) \pmod{\pi}$$

ποὺ εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἀποδεικτέα (2).

Ἄρα τὸ H' ἀνήκει εἰς τὸν περίκυκλον τοῦ τριγ. $AB\Gamma$.

8.3 *Δίδονται δύο κύκλοι μὲ κέντρα O', O' τεμνόμενοι εἰς σημεῖα A, B. Θεωροῦντες τυχὸν σημεῖον M τοῦ κύκλου (O) χαράσσομεν τὴν εὐθεῖαν MA, τέμνουσαν τὸν κύκλον (O') ἐκ δευτέρου εἰς σημεῖον A' καὶ τὴν εὐθεῖαν MB τέμνουσαν ἐκ δευτέρου τὸν (O') εἰς σημεῖον B'.*

Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα $A'B'$ εἶναι κάθετος τῆς OM.

Ἀπόδειξις. Ἡ MO, εἶναι ὡς γνωστὸν κάθετος τῆς ἐφαπτομένης $T'T$ τοῦ κύκλου (O) κατὰ τὸ M.

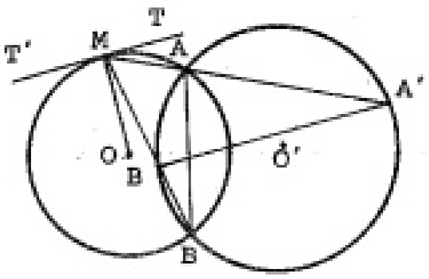
Ἑπομένως διὰ νὰ εἶναι : $OM \perp A'B'$,
πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι : $A'B' \parallel T'T$.

Χρησιμοποιοῦμεν ἀλγεβρικὰς τιμὰς προσανατολισμένων γωνιῶν εὐθειῶν. Καὶ τότε διὰ νὰ εἶναι :

$$A'B' \parallel T'T,$$

πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ :

$$(A'B',\ T'T) \equiv 0 \pmod{\pi} \quad (1).$$



Χρησιμοποιοῦντες τρίτην εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς $A'B'$, $T'T$, τὴν $A'A$, ἀναλύομεν τὴν γωνίαν:

$$(A'B',\ T'T)$$

εἰς ἄθροισμα δύο ἄλλων, καὶ ἔχομεν :

$$(A'B',\ T'T) \equiv (A'B',\ A'A) + (A'A,\ T'T) \pmod{\pi}$$

(σχέσις Shasles),

δηλ. $(A'B',\ T'T) \equiv (A'B',\ A'A) + (MA,\ MT) \pmod{\pi}$ (2),

διότι ἡ $A'A$ εἶναι ἡ MA καὶ ἡ MT εἶναι ἡ $T'T$.

Ἐπειδὴ τὰ A, A', B μαζὶ μὲ τὸ B εἶναι ὁμόκυκλα, ἔχομεν :

$$(A'B',\ A'A) \equiv (BB',\ BA) \pmod{\pi}$$

(χαρακτηριστικὴ ἰδιότης κύκλου διὰ τέσσαρα σημεῖα) ἤ :

$$(A'B',\ A'A) \equiv (BM,\ BA) \bmod \pi,$$

διότι ἡ εὐθεῖα BB' ταυτίζεται μὲ τὴν BM.

Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, ἐπειδὴ ἡ MT εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (O) εἰς τὸ M, δηλ. τοῦ κύκλου τοῦ διερχομένου ἀπὸ τὸ B καὶ ἀπὸ τὰ A, M, ἕπεται ὅτι :

$$(BM,\ BA) \equiv (MT,\ MA) \bmod \pi$$

(ἀντικατάστασις τῆς πρώτης εὐθείας μὲ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου κατὰ τὸ ἀντίστοιχόν της ἐκ τῶν M, A σημεῖον, καὶ τῆς δευτέρας μὲ τὴν χορδὴν ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ δύο σημεῖα M, A) ἀπὸ ὅπου :

$$(BA,\ MB) \equiv (MA,\ MT) \bmod \pi.$$

Ἔτσι ἡ (2) γίνεται :

$$(A'B,\ T'T) \equiv (BM,\ BA) + (BA,\ BM) \equiv$$
$$\equiv (BM,\ BM) \equiv 0 \bmod \pi,$$

ἄρα $(A'B',\ T'T) \equiv 0 \bmod \pi,$

ποὺ εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἀποδεικτέα (1).

Ἄρα θὰ εἶναι πράγματι $OM \perp A'B'$.

Η ΓΕΝΕΣΙΣ ΤΟΥ ΗΛΙΑΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
ἀπὸ σελ. 19

τὰς μυριάδας τῶν γαλαξιῶν ποὺ πληροῦν τὸν χῶρον. Ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν πολλαὶ συμπυκνώσεις ἀεριώδους ὕλης, ὑπὸ μορφὴν νεφελωμάτων ὑφίσταται τὸ πρῶτον ὑλικόν, ὥστε, ὅταν συντρέξουν καὶ ἄλλαι συνθῆκαι, νὰ δημιουργηθοῦν πλανητικὰ συστήματα. Πρέπει ταῦτα νὰ εἶναι κάτι τὸ σύνηθες καὶ ὄχι ἐξαίρεσις. Οἱ εἰδικοὶ μάλιστα ἐπισημαίνουν ὡρισμένας συμπυκνώσεις ὕλης γνωστὰς ὡς «σφαιρίδια» (Globules), ποὺ εἶναι κέντρα σχηματισμοῦ ἀστέρων καὶ πιθανῶς κέντρα δημιουργίας μελλοντικῶν ἡλιακῶν συστημάτων.

Ὑπολογίζεται ὅτι εἰς τὸν Γαλαξίαν μας, ποὺ ἀποτελεῖται τοὐλάχιστον ἀπὸ 100 δισεκατομμύρια ἀστέρας, ἓν δισεκατομμύριον ἐξ αὐτῶν πρέπει νὰ ἔχῃ πλανητικὰ συστήματα. Ἤδη ἔχουν ἐπισημανθῆ τοιαῦται περιπτώσεις, ὡς αἱ τοῦ 61 Κύκνου, τοῦ 70 Ὀφιούχου καὶ τοῦ ἀστέρος τοῦ Barnard. Ὁ τελευταῖος οὗτος ἀστὴρ ἔχει δύο συνοδοὺς μὲ μάζας ἀναλόγους πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ Διός. Εἶναι πιθανώτατα τὸ πρῶτον πλανητικὸν σύστημα, ποὺ ἀνεκαλύφθη μεταξὺ τῶν ἄλλων ἀπλανῶν ἀστέρων. «Ἠμπορεῖ νὰ ὑπολογίσῃ κανεὶς εἰς περισσότερον ἀπὸ ἓν δισεκατομμύριον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀστέρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἕνα κατοικίσιμον πλανήτην. Καὶ μέσα εἰς μίαν ἀκτῖνα 22 ἐτῶν φωτὸς περὶ τὴν Γῆν ὑπάρχουν περίπου 20 ἀστέρες ποὺ ἠμποροῦν νὰ ἔχουν ἕνα πλανητικὸν σύστημα». (Παρὰ Pecker, 1971, σ. 299).

Ἀσφαλῶς μεταξὺ τῶν μυριάδων ἡλιακῶν συστημάτων, θὰ εὑρίσκωνται πλανῆται μὲ συνθήκας παρομοίας μὲ τὰς τῆς Γῆς μας. Δὲν ὑπάρχει κανένας λόγος διατί νὰ μὴ ἀνθῇ εἰς τοὺς μακρυνοὺς ἐκείνους κόσμους ζωὴ παρομοία μὲ τὴν ἰδικήν μας.

«Ἀτυχῶς, γράφει (1973) ὁ Ἀμερικανὸς ἀστρονόμος καθηγητὴς G. Abell, δὲν ἔχομεν καμμίαν βάσιν διὰ νὰ εἰκάσωμεν τὸ ποσοστὸν τῶν πλανητῶν ἐκείνων ἐπὶ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναπτυχθῇ ζωή· οὔτε γνωρίζομεν τὴν πιθανότητα τῶν ἁπλῶν μορφῶν ζωῆς ποὺ τελικῶς θὰ ἔφθαναν εἰς σκεπτόμενα ὄντα. Ἐὰν π. χ. ἡ πιθανότης εἶναι μία εἰς ἕνα ἑκατομμύριον, σκεπτόμενα ὄντα θὰ ἠμποροῦσαν νὰ ὑπάρχουν παντοῦ εἰς τὸ Σύμπαν. Ἀλλ' ἐὰν ἡ πιθανότης εἶναι μία εἰς ἕνα τρισεκατομμύριον, τότε εἶναι δυνατὸν νὰ εἴμεθα μοναδικοὶ «ὡς λογικευόμενα ὄντα». Σημειώνει δὲ τοῦτο τὸ ἀξιοπρόσεκτον : «Ἡ ζωὴ ἠμπορεῖ νὰ ἀφθονῇ εἰς τὸ Σύμπαν ἢ νὰ εἶναι μοναδικὴ εἰς τὴν Γῆν· ἐπὶ τοῦ θέματος αὐτοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τίποτε ἄλλο, παρὰ καθαρῶς θεωρητικὰς συζητήσεις».

Καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ ἀληθὲς καὶ βέβαιον.