Author: Γιάννης Καλογεράκης

Title: Συμβολή στη μελέτη της Στατιστικής στο Λύκειο.

Abstract: Εργασία για την κατανόηση βασικών εννοιών της Στατιστικής που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο Γ΄ τάξης Λυκείου.

Creator: HDML

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Γιάννης Καλογεράκης

1 Εισαγωγή.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να συμβάλλει στην κατανόηση βασικών εννοιών της Στατιστικής που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ τάξης Λυκείου. Μεγάλο μέρος της περιέχει απαντήσεις σε σχετικές ερωτήσεις και συζητήσεις που έγιναν με τους μαθητές. Οι περισσότερες από αυτές προέρχονταν από την ανεπαρκή κατανόηση των ορισμών, την έλλειψει προηγούμενης πιθανοτικής και Στατιστικής εμπειρίας και από την δυσκολία σύνδεσης της Στατιστικής με άλλα μαθηματικά θέματα και την πράξη. Δίδονται επίσης αρκετές ασκήσεις και παραδείγματα για τον εμπλουτισμό του διδακτικού υλικού των συναδέλφων.

2. ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΜΑΡΤΥΡΙΕΣ

Η στατιστική είναι ένα σύνολο από επιστημονικές μεθόδους συλλογής, οργάνωσης παρουσίασης και ανάλυσης δεδομένων, με σκοπό την εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων και την λήψη λογικών αποφάσεων. Με ειδικότερη σημασία ο όρος χρησιμοποιείται για να δηλώσουμε μια πραγματική συνάρτηση που δεν εξαρτάται από άγνωστη παράμετρο.

Η Στατιστική δεν έχει Ελληνική την προέλευση ούτε σαν λέξη ούτε σαν επιστήμη. Υπάρχουν όμως αρκετές μαρτυρίες στον Ελληνικό χώρο χρησιμοποίησης πρώϊμων στατιστικών μεθόδων. Αναφέρουμε μερικές από αυτές. Από το 2.000 π.χ. στις πήλινες πινακίδες με ιερογλυφική γραφή που βρέθηκαν στην Κνωσσό, τα Μάλια και την Πύλο συναντάμε τις πρώτες καταχωρίσεις δημητριακών. Το 1.600 π.Χ συναντάμε στο "γραμμικό Α" σύστημα γραφής εκατοστιαίες αναλογίες δε γεωργικά προϊόντα. Το 1.450 π.Χ. με το τέλος των νεοτέρων ανακτορικών χρόνων παρουσιάζεται το "γραμμικό Β" σύστημα με βελτιωμένο αριθμητικό συμβολισμό. Τότε γίνονται ταξινομήσεις σύμφωνα με ορισμένα κριτήρια, όπως εργάτες, εργάτριες, γυναικείες ασχολίες, είδη αφιερωμάτων σε θεότητες,. Έχουμε δηλαδή μια πρώϊμη στατιστική μεθοδολογία. Την μέθοδο της διπλής ταξινόμησης θα την συναντήσομε και στόν Όμηρο στο σημείο που ο Νέστορας συμβουλεύει τον Αγαμέμνονα να κατατάξει τους άνδρες του κατά φυλές και φατρίες. Αργότερα ο Ηρόδοτος 483 — 420 π.Χ. δίδει αξιόλογες παρατηρήσεις σε όλα σχεδόν τα βιβλία του. Όπως εκτιμήσεις για την μέση διάρκεια ταξιδίων μεταξύ πόλεων, παρατηρήσεις για τις Πυραμίδες και στοιχεία για την δημόσια υγεία. Ο Θουκιδίδης 431 — 404 π.Χ. δίδει πληροφορίες για τον Σπαρτιατκό στρατό, για κοινωνικά και οικονομικά μεγέθη, όπως αριθμό υπηρετών, ποσοστά φόρων για τους Αθηναίους, εκτιμήσεις για τα ύψη των τειχών και μια εξαιρετική μαρτυρία για τον υπολογισμό της περιμέτρου ενός νησιού με ακανόνιστο σχήμα. Γνωστές είναι επίσης οι απογραφές των Ρωμαϊκών χρόνων.

Η κύρια όμως θεμελίωση της Στατιστικής έγινε πρόσφατα και η αναφορά της ξεφεύγει από τα πλαίσια της εργασίας αυτής.

3. ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Θεμελιώδης έννοια της Στατιστικής είναι ο πληθυσμός. Στον πληθυσμό, όπως και σε άλλες μαθηματικές έννοιες, δεν μπορούμε να δώσομε ένα ορισμό. Μπορούμε να τον περιγράψουμε σαν μια ολότητα που περιέχει αντικείμενα ή ενδεχόμενα με ορισμένες κοινές ιδιότητες.

Ένα μέλος του πληθυσμού ονομάζεται μονάδα ανάλυσης ή άτομο. Σε ένα πληθυσμό με ηλεκτρικούς λαμπτήρες, άτομο είναι ένας λαμπτήρας. Στη γεωργική έρευνα άτομο μπορεί να είναι ένα δέντρο ένας αγρός, ένα είδος λιπάσματος κ.λ.π. ανάλογα με τον πληθυσμό που μελετούμε. Το άτομο πρέπει να οριστεί καλά και στην διδασκαλία και στην πράξη γιατί από αυτό με μετρήσεις θα πάρομε τις πληροφορίες που θέλομε για τον πληθυσμό. Είναι δυνατόν τα άτομα ενός πληθυσμού να είναι μεγάλου πλήθους και η μελέτη τους να είναι πρακτικά αδύνατη ή οικονομικά ασύμφορη.

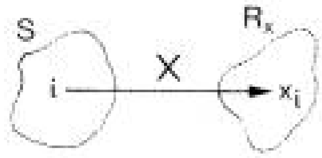
Τότε μια ορισμένη τεχνική που λέγεται δειγματοληψία καθορίζουμε τα υποσύνολα του πληθυσμού και τον τρόπο που θα πάρομε από αυτά ν το πλήθος άτομα που θα αποτελέσουν το "τυχαίο δείγμα". 'Ενα δείγμα χαρακτηρίζεται τυχαίο όταν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να συμπεριληφθεί στο δείγμα.

Η διαδικασία της δειγματοληψίας δεν είναι πάντοτε αναγκαία γιατί ο πληθυσμός έχει N το πλήθος άτομα μπορεί $N = \nu$ οπότε λέμε ότι έχουμε απογραφή του πληθυσμού. Ακόμη μπορεί να έχομε να μελετήσομε τα αποτελέσματα ενος επιστημονικού πειράματος, τότε μας ενδιαφέρει η κατάστρωση και η τυχαιοποίηση του.........και δεν υπάρχει κανένα στατιστικό πρόβλημα εκλογής ορισμένων από τα αποτελέσματα του πειράματος.

Με το άτομο είναι συνδεδεμένα ένα πλήθος από χαρακτηριστικά. Αν άτομο είναι ο καθηγητης ενός δημοσίου Λυκείου, τότε χαρακτηριστικά μπορεί να είναι η ηλικία, το γένος, η μηνιαία αμοιβή, τα χρόνια διδασκαλίας, κ.λ.π. Από τα χαρακτηριστικά άλλα μετρούνται με πραγματικούς αριθμούς (ποσοτικά) και άλλα ταξινομούνται σύμφωνα με κάποια ιδιότητα και κωδικοποιούνται, πολλές φορές αυθαίρετα, με πραγματικούς αριθμούς.

Δηλαδή πάντοτε έχομε μια απεικόνιση του δείγματος στο σύνολο $\mathbb{R}$, μέσω της λεγομένης τυχαίας μεταβλητής X.

Η τυχαία μεταβλητή δεν είναι ούτε τυχαία ούτε και μεταβλητή. Είναι συνάρτηση και έχει απλώς επικρατήσει να ονομάζεται με αυτόν τον τρόπο.



Ορισμός: Αν $\mathcal{E}$ είναι ένα πείραμα και S το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων αυτού τότε κάθε συνάρτηση X που απεικονίζει κάθε στοιχείο $i \in S$ σε ένα πραγματικό αριθμό x_i λέγεται τυχαία μεταβλητή. R_x είναι το σύνολο των δυνατών τιμών της X.

Παράδειγμα: 1

'Ενα αυτοκίνητο πρέπει να περάσει 4 φωτεινούς σηματοδότες σε ένα δρομολόγιο. Ορίζομε την τυχαία μεταβλητή X να είναι, ο αριθμός των σηματοδοτών που περνά πρίν σταματήσει για πρώτη φορά.

Λύση:

Μπορεί να σταματήσει στον πρώτο σηματοδότη οπότε $x_1 = 0$, μπορεί στον δεύτερο $x_2 = 1$ ανάλογα $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ ή να μη σταματήσει σε κανένα οπότε $x_5 = 4$. Συνεπώς

$$Rx = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Η τιμή x_i της X δεν μπορεί να προκαθοριστεί γιατί διαφέρει από άτομο σε άτομο ακανόνιστα. Η αβεβαιότητα αυτής της τιμής xi μπορεί να οφείλεται στην τύχη ή να απορρέει από την άγνοια μας για την αληθινή κατάσταση του πληθυσμού ή ακόμα και από την έλλειψη ακρίβειας στις μετρήσεις. Έτσι αν όλες οι συνθήκες του πειράματος παραμένουν όμοιες οι τιμές xi θα διαφέρουν κατά τον τρόπο που φαίνεται να μην έχει λογική εφαρμογή η αρχή του αιτίου και αιτιατού. Αλλά παρά την ακανόνιστη συμπεριφορά των επι μέρους τιμών η σχετική συχνότητα μιας μακράς σειράς μετρήσεων τείνει να σταθεροποιηθεί. Παρουσιάζεται μια "στατιστική κανονικότητα" που να μας επιτρέπει να εισαγάγομε ένα μέτρο για την αβεβαιότητα των τιμών xi. Το μέτρο αυτό θα το ονομάζομε πιθανότητα.

Στο παράδειγμα 1 η σχετική συχνότητα τείνει να σταθεροποιηθεί στο 0,25 όταν η τυχαία μεταβλητή παίρνει την τιμή $x_2 = 1$. Άρα $P(x = 1) = 0{,}25$

Η πιθανότητα αποτελεί την θεωρητική έκφραση της σχετικής συχνότητας. Με τον τρόπο αυτό η Στατιστική συνδέεται άμεσα με τις πιθανότητες και τις ιδιότητες τους και εμπλουτίζει την μαθηματική υποδομή της.

Τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιεί βρήσκουν συνεχώς και μεγαλύτερη εφαρμογή, όχι μόνο στην έρευνα αλλά και στην παραγωγή.

Σήμερα η Στατιστική τείνει να γίνη τεχνολογία απαραίτητη για την ομαλή εξέλιξη κάθε ερευνητικού και παραγωγικού έργου.

Ακριβώς λόγω της τεχνολογικής αυτής λειτουργία η Στατιστική είναι συντηρητική. Διατηρεί όμως εξ' αιτίας της επαγωγικής μορφής και των πολλών εφαρμογών ένα δυναμικό και αποκαλυπτικό στοιχείο που δεν γίνεται εύκολα αντιληπτό από τους μαθητές. Εδώ τίθεται και το πρόβλημα της αναγκαιότητας της διδασκαλίας της Στατιστικής στο Λύκειο, που δεν πρέπει να γίνεται μόνο με σκοπό την κατανόηση των καθημερινών στατιστικών. Αλλά πρέπει να εστιάσουμε και την προσπάθεια μας στη διαδικασία μάθησης μέσα απο την δράση που προσφέρει η Στατιστική. Η Στατιστική μας δίδει αυτή την δυνατότητα όταν παρουσιαστεί σαν φυσική συνέχεια των πιθανοτήτων. Παράλληλα θα προσφέρει τα πρώτα ερεθίσματα και τις πρώτες βάσεις για την ανάπτυξη ερευνητικού πνεύματος.

Παράδειγμα: 2.

Ρίχνουμε δυο νομίσματα και έστω S το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων. Η τυχαία μεταβλητή X ορίζεται να είναι ο αριθμός των κεφαλών που πέρνομε. Να ορισθούν: 1) Ο πληθυσμός, 2) Το σύνολο S, 3) Οι τιμές που παίρνει η X, 4) Το μέγεθος του δείγματος.

Λύση:

Πληθυσμός είναι όλες οι δυνατές ρίψεις των δυό νομισμάτων.

$$S = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$$

οι τιμές που παίρνει η X είναι $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, και $x_4 = 0$.

Το δείγμα είναι μεγέθους ένα. Αν ρίψουμε τα νομίσματα και δεύτερη φορά θα έχομε ένα δείγμα μεγέθους δύο.

Παρατήρηση:

Μπορούμε να λέμε ότι ένα δείγμα μεγέθους ν από μια τυχαία μεταβλητή X αντιστοιχεί σε ν επαναλαμβανόμενες μετρήσεις της X κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Βέβαια οι πειραματικές συνθήκες είναι πάντοτε ταυτοτικές, αλλά εκείνες που διαφέρουν πρέπει να έχουν ελάχιστη η καθόλου επιρροή στο αποτέλεσμα.

4. Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΑΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Ένα τρόπος για να αποκτήσουμε διαισθητικό υπόβαθρο στη Στατιστική είναι η αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων. Αυτό βέβαια είναι έξω από τις απαιτήσεις του αναλυτικού προγράμματος αλλά και το γενικότερο προσανατολισμό του Λυκείου. Ακόμη η Στατιστική επειδή μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλούς τομείς της έρευνας και της παραγωγής υπάρχει διαφοροποίηση στο τρόπο εφαρμογής της. Για τους λόγους αυτούς θα κανουμε μια γενική αναφορά της Στατιστικής σαν εφαρμοσμένης διαδικασίας.

Το πρώτο βήμα είναι η διατύπωση του προβλήματος που δεν είναι ανάγκη να είναι πρόβλημα Στατιστικής αλλά μπορεί να αναφέρεται σε οποιαδήποτε άλλη επιστήμη.

Πράδειγμα: 3

Κατά την εκσκαφή ενός αρχαιολογικού χώρου βρέθηκαν 80 αγγεία. Θέλομε να προσδιορίσομε τον τόπο κατασκευής τους στηριζόμενη στην χημική ανάλυση και την σύγκριση του ποσοστού ορισμένων οξειδίων με το ποσοστό των ίδιων οξειδίων γνωστών εργαστηρίων.

Ακολουθεί ο προσδιορισμός του πληθυσμού, του ατόμου, των χαρακτηριστικών και ο ορισμός των μεταβλητών.

Ιδιαίτερα προσεγμένη πρέπει να είναι η εκτέλεση του πειράματος όταν αυτο είναι αναγκαίο.

Μετά την συλλογή των δεδομένων ακολουθεί ή προκαταρτική ανάλυση μέρος από την οποία αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο σαν περιγραφική Στατιστική. Αν είναι αναγκαίο ομαδοποιούμε τα δεδομένα και πέρνομε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων. Οι μαθητές πρέπει να μάθουν με την εξάσκηση πως θα εκλέγουν τον αριθμό των κλάσεων, συνήθως 9 έως 12 κλάσεις ίσου πλάτους φαίνεται να αντιπροσωπεύουν καλά το δείγμα. Υπολογίζομε ορισμένες στατιστικές που είναι εκτιμήσεις των αληθινών παραμέτρων του πληθυσμού που μελετούμε. Γενικά έχομε μια πρώτη γνωριμία με τον πληθυσμό χωρίς να βγάζομε συμπεράσματα.

Μετα ακολουθεί η κυρία ανάλυση. Η κυρία ανάλυση χρειάζεται ικανότητα εκλογής της κατάλληλης δοκιμασίας (test) και γενικώτερα της σωστής στατιστικής μεθοδολογίας. Εδώ θα χρειασθεί και γνώση προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών που αποτελούν την μεγάλη επανάσταση στη Στατιστική. Τέλος απαιτείται ικανότητα ερμηνείας των αποτελεσμάτων που πέρνομε. Οι παραπάνω διαδικασίες δεν ενδιαφέρουν την μέση εκπαίδευση και δεν θα αναφερθούν.

Εκμεταλευόμενοι τα αποτελέσματα της κυρίας ανάλυσης μπορούμε να βγάλομε ορισμένα συμπεράσματα και να πάρομε αποφάσεις.

Πολλοί πιστεύουν ότι με την Στατιστική παίρνομε ότι αποτέλεσμα θέλομε. Αντίληψη οπωσδήποτε λανθασμένη. Βέβαια αρκετές φορές ηθελημένα το δείγμα διαλέγεται σύμφωνα με ορισμένες απαιτήσεις ή σκόπιμα παραποιείται. ΄Αλλες φορές κατά την κυρία ανάλυση γίνεται χρήση στατιστικών μεθόδων "μηχανικά" και αγνοούνται οι πιθανοθεωρητικοί νόμοι που πρέπει να πληρούνται. Περιορισμένη αξία έχουν τα συμπεράσματα όταν προσπαθούμε να συσχετίσουμε μεταβλητές χωρίς να υπάρχει αιτιότητα μεταξύ αυτών ούτε και συνάφεια στη διαμόρφωση των τιμών τους. Γενικά να κάνουμε σωστούς μαθηματικούς υπολογισμούς και να δώσουμε σωστή μαθηματική απάντηση σε μια λανθασμένη υπόθεση για τη Στατιστική το συμπέρασμα είναι λάθος. Αυτό είναι και το τρίτο σφάλμα της Στατιστικής. Τα άλλα δύο αναφέρονται όπως είνα γνωστό στο έλεγχο των υποθέσεων. Αλλά για όλα τα παραπάνω δεν ευθύνεται η Στατιστική.

Παράδειγμα: 4

Θέλομε να εκτιμήσομε τον αριθμό των λέξεων σε ένα βιβλίο μαθηματικών χρησιμοποιόντας ένα τυχαίο δείγμα. α) Τι προβλήματα υπάρχουν στο ορισμό του πληθυσμό. β) Ποιό μπορεί να είναι το άτομο του πληθυσμού.

Απάντηση:

α) Πρέπει να αποφασίσουμε αν στο πληθυσμό θα συμπεριλάβομε και τις λέξεις του προλόγου των περιεχομένων και ακόμα ποιά μαθηματικά σύμβολα θα θεωρήσομε σαν λέξεις.
β) Σαν άτομο μπορούμε να πάρομε την σελίδα. ΄Εχομε όμως το μειονέκτημα ότι ο αριθμός των λέξεων ανά σελίδα θα παρουσιάζει μεγάλη διασπορά γιατί θα υπάρχουν σχήματα και μισογραμμένες σελίδες. Αν πάρομε σαν άτομο την γραμμή έχομε πάλι πρόβλημα γιατί όλες οι γραμμές δεν είναι πλήρεις. Και στις δυο περιπτώσεις κατάλληλη δειγματοληψία δίδει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

5. ΜΕΡΙΚΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ

΄Εστω Χ μια ποσοτική μεταβλητή και $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu$, οι τιμές που παίρνει σε ένα δείγμα μεγέθους ν. ΄Οπου xi δηλώνει την τιμή που παίρνει το η Χ κατά την i μέτρηση. Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση Η που ορίζεται για την νιάδα $x_1, x_2, \ldots x_\nu$. Η πραγματική συνάρτηση Η λέγεται στατιστική. Πολλές φορές αναφέρεται και σαν στατιστική τιμή που παίρνει η Η σε ένα συγκεκριμένο δείγμα.

Σύμφωνα με τον ορισμό μια στατιστική δεν περιέχει καμιά άγνωστη παράμετρο. Οι παράμετροι χαρακτηρίζουν τον πληθυσμό και οι συναρτήσεις που περιέχουν παραμέτρους δεν είναι στατιστικές.

Οι συνηθέστερες παράμετροι του πληθυσμού είναι η μέση τιμή μ και η διασπορά σ^2 που αναφέρονται και σε παράμετροι της μεταβλητής Χ.

΄Ετσι οι $y = \sum_{i=1}^{\nu} xi - \mu$ και $y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{\nu} xi$ δεν είναι τύποι στατιστικών αντίθετα οι $y = \sum_{i=1}^{\nu} xi + 3$ και $y = \sum_{i=1}^{\nu} xi^2 + \ln xi$ μπορεί να είναι τύποι στατιστικών. Το χαρακτηριστικό των παραμέτρων είναι ότι παραμένουν σταθερές, ενώ οι τιμές των στατιστικών μεταβάλλονται από δείγμα σε δείγμα. Λόγο της μεταβολής αυτής κάθε στατιστική μπορεί να θεωρηθεί σαν μια μεταβλητή συνεπώς ακολουθεί μια κατανομή και έχει μέση τιμή και διασπορά.

Στις παρακάτω παραγράφους αναφέρονται μερικές στατιστικές που έχουν άμεση ή έμμεση σχέση με τη ύλη που διδάσκεται στο Λύκειο.

6. ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

Τα μέτρα θέσης είναι στατιστικές που μας πληροφορούν γύρω από ποιούς αριθμούς είναι συγκετρωμένες οι τιμές του δείγματος. Τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα είναι τα παρακάτω:

6.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ

Αν X είναι μια ποσοτική μεταβλητή και $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, οι τιμές που παίρνει σε ένα δείγμα. Ο αριθμητικός μέσος του δείγματος ορίζεται από την στατιστική.

$$\overline{x} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i$$

Αν το $\{ z_1, z_2, \ldots z_k \}$ είναι το σύνολο των τιμών του δείγματος και ν_i η συχνότητα που μας λέει πόσες φορές στο δείγμα η μεταβλητή x παίρνει την τιμή z_i τότε ο αριθμητικός μέσος γράφεται:

$$\overline{x} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i z_i$$

Αν πάρουμε δείγματα του ίδιου μεγέθους και από τον ίδιο πληθυσμό ο $\overline{x}$ θα διαφέρει λιγότερο από δείγμα σε δείγμα σε σύγκριση με άλλα μέτρα θέσης. Ακόμα χρησιμοποιεί όλες τις τιμές του δείγματος και είναι αξιόπιστος εκτιμητής της μέσης τιμής μ του πληθυσμού.

Ο $\overline{x}$ υπολογίζεται σχετικά εύκολα είναι εύχρηστος σε αλγεβρικούς υπολογισμούς και παρουσιάζει ευστάθεια στην ομαδοποίηση.

Επηρεάζεται όμως από «εξτρεμιστικές» τιμές, όταν υπάρχουν στο δείγμα και δεν ανήκει πάντοτε στο σύνολο τιμών του δείγματος.

6.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ

Αν οι τιμές του δείγματος είναι τέτοιες ώστε $x_i > 0$ $i = 1, 2 \ldots \nu$ μπορούμε να ορίσουμε τον γεωμετρικό μέσο G και τον αρμονικό μέσο h με τις στατιστικές.

$$G = \sqrt[\nu]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_\nu}$$

$$h = \frac{\nu}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_\nu}}$$

Οι μέσοι αυτοί χρησιμοποιούνται στην Στατιστική αλλά συνδέουν και τις γνώσεις των μαθητών με παλαιότερα γνωστά θέματα. Ιδιαίτερα ο γεωμετρικός μέσος βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα με ποσοστιαίες μεταβολές, όπως στον ανατοκισμό και σε δεδομένα που παριστάνουν μεγέθη πληθυσμών σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα. Ο αρμονικός μέσος χρησιμοποιείται σε προβλήματα τάσεων και ταχυτήτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.— Δείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος είναι μια γραμμική συνάρτηση των τιμών του δείγματος.

2.— Έστω X, Ψ μεταβλητές που συνδέονται με την σχέση $\Psi = \alpha \cdot x + \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Δείξετε ότι: α) $\overline{\Psi} = \alpha\overline{X} + \beta$ β) $G(\beta x^\nu) = \beta\, [G(x)]^\nu$

3.— Δίδεται ένα δείγμα μεγέθους ν. Διαμερίζομε το δείγμα σε ρ μέρη μεγέθους $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\rho$. Δείξετε ότι:

$$\text{α)} \quad \overline{x} = \frac{\nu_1\overline{x}_1 + \nu_2\overline{x}_2 + \ldots + \nu_\rho\overline{x}_\rho}{\nu}$$

$$\text{β)} \quad G = \sqrt{G_1^{\nu_1} \cdot G_2^{\nu_2} \ldots G_\rho^{\nu_\rho}}$$

όπου $\overline{x}_i$ και G_i αριθμητικός και γεωμετρικός μέσος του i δείγματος.

4.— Δείξετε ότι αν $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ οι τιμές ενός δείγματος τότε

$$\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \overline{x}) = 0 \qquad \text{και} \qquad \prod_{i=1}^{\nu} \frac{x_i}{G} = 1$$

5.— Στο παρακάτω παρουσιάζονται οι δέκα καλύτεροι Ελληνικοί χρόνοι στο αγώνισμα 100 μέτρα ανδρών. α) Να υπολογιστούν οι $\overline{x}$ και G β) Δείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος της $x_i + 10$ είναι $\overline{x} + 10$

10,22 10,35 10,43 10,48 10,49 10,55 10,59 10,64 10,65 10,66

6.3 ΔΙΑΜΕΣΟΣ

Έστω μια ποσοτική μεταβλητή Χ και x_1, x_2, ... x_ν οι τιμές που παίρνει σε ένα δείγμα. Μια τιμή της $x_{(i)}$ $i = 1, 2, ..., \nu$ που κατέχει την i θέση όταν διατάξομε το δείγμα κατά σειρά μεγέθους λέγεται διατεταγμένη στατιστική i τάξης.

Η διάμεσος Μ ορίζεται να είναι η $X_{(\frac{\nu+1}{2})}$ διατεταγμένη στατιστική όταν το δείγμα είναι περιττού πλήθους και ο αριθμητής μέσος των $X_{(\frac{\nu}{2})}$, $X_{(\frac{\nu}{2}+1)}$ διατεταγμένων στατιστικών όταν το δείγμα είναι άρτιου πλήθους τιμών.

Αν τα δεδομένα δεν μπορούν να διαταχθούν τότε δεν μπορούμε να ορίσομε διάμεσο.

Παράδειγμα 5

Το δείγμα 1, 1, 1, 4, 3 έχει διάμεσο Μ = 1 και όχι 3 που έχει το δείγμα 1, 3, 4

Όταν τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα ο εμπειρικός τρόπος που δίδεται στο σχολικό βιβλίο συνοψίζεται στον τύπο:

$$M = L + \left[\frac{\frac{\nu}{2} + A}{\nu_\delta}\right] \cdot C$$

όπου: L = κατώτερο φράγμα της κλάσης που περιέχει την διάμεσο.

ν = μέγεθος του δείγματος

A = άθροισμα συχνοτήτων των κλάσεων που προηγούνται της διαμέσου.

ν_δ = συχνότητα κλάσης διαμέσου.

C = μήκος διαστήματος κλάσης.

Παράδειγμα 6

Ο παρακάτω πίνακας δίδει ομαδοποιημένες τις παρατηρήσεις του μήκους 40 φύλλων καστανιάς με προσέγγιση στο πλησιέστερο Μ.Μ. Να υπολογιστεί η διάμεσος του δείγματος.

Μήκος ΜΜ	Συχνότητα v_i
[118, 126)	3
[278, 235)	5
[136, 144)	9
[145, 153)	12
[154, 162)	5
[163, 171)	4
[172, 180)	2

Λύση

Επειδή το άθροισμα των τριών πρώτων κλάσεων είναι:
$3 + 5 + 9 = 17$ και των τεσσάρων $3 + 5 + 9 + 12 = 29$
είναι φανερό ότι η διάμεσος ανήκει στην τετάρτη κλάση. Άρα έχουμε $L = 144,5$ $v = 40$ $A = 17$ $v_6 = 12$ $C = 9$ συνεπώς $M = 146,8$ ΜΜ

Η διάμεσος είναι μια κατάλληλη στατιστική όταν το δείγμα έχει εξτρεμιστικές τιμές που καθιστούν μεροληπτικό τον αριθμητικό μέσο. Επίσης χρησιμοποιείται όταν δεν γνωρίζομε την ακριβή τιμή ορισμένων παρατηρήσεων. Όταν το δείγμα έχει μέγεθος άρτιο αριθμό η διάμεσος δεν ανήκει στο σύνολο τομών του δείγματος.

6.4 ΕΠΙΚΡΑΤΟΥΣΑ ΤΙΜΗ

Η επικρατούσα τιμή ορίζεται να είναι η τιμή της μεταβλητής Χ που έχει την μεγαλύτερη συχνότητα στο δείγμα. Αν όλες οι τιμές είναι διαφορετικές το δείγμα δεν έχει επικρατούσα τιμή.

Δεν επηρεάζεται γενικά από εξτρεμιστικές τιμές. Υπολογίζεται σχετικά εύκολα και χρησιμοποιείται στους μετασχηματισμούς της μορφής $\Psi = \alpha \cdot X + \beta$ για την απλοποίηση των υπολογισμών. (Παράδειγμα σελίδας 201 διδακτικού βιβλίου). Στα μειονεκτήματα μπορούμε να αναφέρομε, ότι είναι δυνατή η ύπαρξη δύο επικρατουσών τιμών και ότι δεν χρησιμοποιεί όλες τις τιμές του δείγματος.

Παράδειγμα 7

Από μια εκπαιδευτική περιφέρεια πήραμε ένα δείγμα 20 καθηγητών. Τα χρόνα υπηρεσίας τους παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα.

2	9	6	9
12	3	3	3
10	14	3	4
5	10	5	12
7	7	11	6

Να βρεθούν ο αριθμητικός μέσος, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή.

Λύση

Ο αριθμητικός μέσος είναι: $\overline{x} = 7{,}05$

Η διάμεσος: $M = 6{,}5$ και η επικρατούσα τιμής: $\varepsilon = 3$

Παρατήρηση

Η επικρατούσα τιμή δεν φαίνεται να περιγράφει τα δεδομένα.

6.5 ΕΚΛΟΓΗ ΤΟΥ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥ ΜΕΤΡΟΥ

Ένα βασικό ερώτημα είναι ποια από τις παραπάνω στατιστικές πρέπει να παίρνομε σαν μέτρο θέσης. Γενικά η εκλογή του μέτρου θέσης μπορεί να εξαρτηθεί: α) Από τη μορφή του δείγματος και από ορισμένα χαρακτηριστικά τους όπως ήδη αναφέραμε που μας αποτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μια ή την άλλη στατιστική. β) Από τη μορφή της κατανομής συχνοτήτων του δείγματος που είναι μια εκτίμηση της κατανομής του πληθυσμού. Αν η κατανομή είναι συμμετρική μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τα τρία μέτρα. Αν η κατανομή συχνοτήτων παρουσιάζει λόξωση δεξιά ή αριστερά προσφέρεται περισσότερο η διάμεσος. γ) Από το σκοπό για τον οποίο πήραμε το δείγμα. Γενικά μια στατιστική ανάλυση περιλαμβάνει εξαγόμενα ευρύτερα από την εύρεση ενός μέτρου θέσης. Πολλές φορές τα μέτρα αυτά παρουσιάζονται σαν ενδιάμεσα αποτελέσματα κατά την επεξεργασία των δεδομένων με ηλεκτρονικό υπολογιστή. δ) Υπάρχουν στατιστικές δοκιμασίες (test) που στηρίζονται σε ένα συγκεκριμένο μέτρο θέσης. Όπως η δοκιμασία της διαμέσου, το t-test, η ανάλυση της διασποράς, ορισμένες μη παραμετρικές δοκιμασίες κ.λ.π.

Στις περιπτώσεις αυτές είναι αναγκαίο να γνωρίζομε το μέτρο στο οποίο αναφέρεται η δοκιμασία (test).

Ασκήσεις

1.— Μία μεταβλητή Χ παίρνει τις τιμές:

$$\alpha, \alpha + \mu, \alpha + 2\mu, ..., \alpha + (\nu - 1)\mu.$$

Να υπολογιστούν ο αριθμητικός μέσος και η διάμεσος των τιμών αυτών.

2.— Να αποδείξετε ότι: $\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu)$ με $x_i \geqslant \mu$ γίνεται ελάχιστο όταν $\mu = \overline{x}$

3.— 200 μαθητές από ένα Λύκειο έλαβαν μέρος στις Γενικές εξετάσεις και πέτυχαν $\overline{x} = 60{,}96$ μονάδες. Από αυτούς ν_1 το πλήθος έδωσαν για την Α δέσμη και πέτυχαν $\overline{x}_1 = 63{,}4$ μονάδες και ν_2 για την Δ δέσμη και πέτυχαν $\overline{x}_2 = 57{,}3$ μονάδες. Να υπολογιστούν τα ν_1 και ν_2.

4.— Να αποδείξετε ότι: α) $\prod_{i=1}^{\nu} \frac{x_i}{\mu}$ με $x_i \geqslant \mu$ γίνεται ελάχιστο όταν $\mu = G(x)$

β) $\prod_{i=1}^{\nu} \left(\frac{x_i}{\mu}\right)^{\ln \frac{x_i}{\mu}}$ γίνεται ελάχιστο όταν $\mu = G(x)$

5.— Να αποδειχθεί η ισότητα:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \left[i - \frac{1}{2}(\nu + 1)\right] x\,(i) = [\,|x_i - x_1| + |x_i - x_2| + ... + |\,x_i - x_\nu|\,]$$

7. ΜΕΤΡΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Τα μέτρα θέσης περιγράφουν ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά του δείγματος και κατ' επέκταση του πληθυσμού, αλλά πολλές φορές δεν βρίσκονται στο κέντρο του ενδιαφέροντος μιας στατιστικής ανάλυσης. Έτσι μπορεί να ενδιαφέρει πώς είναι διεσπαρμένες οι τιμές του δείγματος. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τα μέτρα διασποράς που δίδουν πληροφορίες πώς κατανέμονται γύρω από ορισμένα μέτρα θέσης, πόσο διαφέρουν μεταξύ τους και πώς μεταβάλλονται οι τιμές του δείγματος.

Τα μέτρα διασποράς εξαρτώνται από την κατανομή που ακολουθεί η μεταβλητή Χ και ανάλογα το δείγμα, μπορεί να παρουσιάζει μικρή ή μεγάλη διασπορά.

Μόνα τους δεν μπορούν να περιγράψουν τον πληθυσμό και η ερμηνεία τους είναι αρκετά δύσκολη λόγω της πολυπλοκότητας της αληθινής διασποράς του πληθυσμού της οποίας βέβαια είναι εκτιμήσεις.

Τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα είναι τα παρακάτω:

7.1 ΤΟ ΕΥΡΟΣ

Ένα απλό και εύκολο στον υπολογισμό και ερμηνεία μέτρο διασποράς του δείγματος είναι το εύρος που ορίζεται από τη στατιστική $$R = X_{(\nu)} - X_{(1)}$$

Χρησιμοποιείται σε δείγματα που προέρχονται από οικονομικά μεγέθη, όπως και σε περιπτώσεις που ενδιαφέρουν μέγιστα και ελάχιστα φαινομένων. Χρησιμοποιείται επίσης στην ομαδοποίηση τιμών (Άσκηση II διδακτικού βιβλίου). Επειδή εξαρτάται μόνο από τις δύο ακραίες τιμές δεν δίδει πάντοτε την αληθινή εικόνα της διασποράς των τιμών του δείγματος.

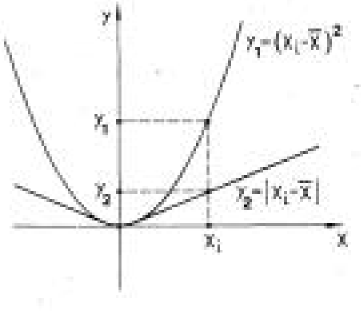
7.2 Η ΜΕΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Είναι γνωστό ότι το άθροισμα των διαφορών των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή είναι μηδέν (Άσκ. 4). Για το λόγο αυτό παίρνομε το άθροισμα των απολύτων τιμών των διαφορών και ορίζομε τη μέση απόλυτη απόκλιση, σαν μέτρο διασποράς, από τη στατιστική.

$$e = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} |x_i - \overline{x}|$$

Επειδή η απόλυτη τιμή γενικά είναι δύσχρηστη στους αλγεβρικούς υπολογισμούς είναι δύσκολο ν' αναπτύξουμε μαθηματικές σχέσεις που να περικλείουν τη μέση απόλυτη απόκλιση.

Αλλά και αυτές που περιέχουν τη μέση απόλυτη απόκλιση δεν παίζουν ενδιαφέροντα ρόλο στην εξαγωγή μαθηματικών συμπερασμάτων. Ακόμη η μέση απόλυτη απόκλιση αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών δεν είναι ίση με το άθροισμα των μέσων απολύτων αποκλίσεων. Η ιδιότητα αυτή ισχύει για ένα άλλο μέτρο διασποράς τη διακύμανση.



7.3 Η ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

Η διακύμανση των τιμών ενός δείγματος που προέρχεται από μια ποσοτική μεταβλητή Χ ορίζεται από τη στατιστική.

$$V = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \overline{x})^2$$

Η συνάρτηση με τύπο $\psi_1 = (x_i - \overline{x})^2$ αυξάνει τις διαφορές από τον αριθμητικό μέσο των τιμών του δείγματος πολύ περισσότερο από την $\psi_2 = |x_i - \overline{x}|$. Η πρώτη παριστάνει παραβολή, ενώ η δεύτερη ευθεία (Σχήμα 3).

Έτσι η διακύμανση έχει μεγαλύτερη «διακριτική ικανότητα» στις μεταβολές των τιμών από τη μέση απόλυτη απόκλιση.

Χρησιμοποιεί όλες τις τιμές και επειδή διαφέρει λίγο από δείγμα σε δείγμα του ίδιου πληθυσμού, όταν το ν είναι μεγάλο, είναι μια ικανοποιητική εκτιμήτρια της διασποράς του πληθυσμού.

7.4 ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Η διακύμανση έχει το μειονέκτημα ότι δεν εκφράζεται με την ίδια μονάδα με τις τιμές του δείγματος. Για το λόγο αυτό ορίζουμε ένα νέο μέτρο διασποράς, την τυπική απόκλιση, σαν την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης.

$$S = \sqrt{\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \overline{x})^2}$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Ο συντελεστής διακύμανσης είναι μια έκφραση της V επί τοις εκατό του $\overline{x}$, δηλαδή είναι μέτρο της σχετικής διασποράς των παρατηρήσεων ως προς τη μέση τιμή.

$$\sigma.\delta. = \frac{100 \cdot V}{\overline{x}} \%$$

Παράδειγμα: 8

Οι δέκα περισσότερο βροχερές μέρες του 1983 σε μια πόλη είχαν τα παρακάτω ύψη βροχής σε Μ.Μ. 75, 79, 83, 85, 87, 88, 90, 92, 93, 98.

Τον επόμενο χρόνο 1984 οι περισσότερες βροχερές μέρες είχαν ύψη: 79, 80, 80, 84, 88, 86, 93, 90, 95, 95.

Να υπολογιστούν: οι αριθμητικοί μέσοι, οι μέσες απόλυτες αποκλίσεις και οι διακυμάνσεις των δύο δειγμάτων.

Λύση

$\overline{x}_1 = 87mm \quad \overline{x}_2 = 87mm \quad e_1 = 5{,}2mm \quad e_2 = 5{,}2mm$

$V_1 = 42mm^2 \quad V_2 = 34{,}2mm^2$

Στα δύο δείγματα οι αριθμητικοί μέσοι και οι μέσες απόλυτες αποκλίσεις είναι ίσες. Αλλά τα δύο δείγματα δεν είναι ομοιόμορφα όπως φαίνεται και από τις διακυμάνσεις.

Παράδειγμα: 9

Δίδεται το πολυώνυμο:

$$f(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \mu\varepsilon \quad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \quad \alpha_2 \neq 0$$

Αν μ είναι ο αριθμητικός μέσος και σ^2 η διακύμανση των ριζών δείξετε ότι:

$$f(x) = \alpha_2 (x^2 - 2\mu x + \mu^2 - \sigma^2)$$

Λύση

Έχομε ότι $f(x) = \alpha_2 \left(x^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x + \frac{\alpha_0}{\alpha_2}\right)$

και $P_1 + P_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ $P_1 \cdot P_2 = \frac{\alpha_0}{\alpha_2}$

Συνεπώς $\mu = -\frac{\alpha_1}{2 \cdot \alpha_2}$

και $\sigma^2 = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2) - \mu^2$

$$\sigma^2 - \frac{1}{2} (4\mu^2 - 2P_1P_2) - \mu^2 = -\frac{\alpha_0}{\alpha_2} + \mu^2$$

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_2} = \mu^2 - \sigma^2$$

Άρα $f(x) = \alpha_2 (x^2 - 2\mu x + \mu^2 - \sigma^2)$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η Να γενικευτεί η παραπάνω πρόταση για πολυώνυμο ν βαθμού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.— Εάν $x_i = i$ $i = 1, 2, \ldots \nu$ Να υπολογιστούν τα $\overline{x}$ και ν

2.— Ένα δείγμα με 9 παρατηρήσεις παίρνουμε από ένα πληθυσμό και υπολογίζομε τα $\overline{x} = 6$ και $\nu = 8$
Μια επί πλέον παρατήρηση παίρνουμε από τον πληθυσμό που έχει τιμή 5. Να βρεθούν τα $\overline{x}$ και V των 10 παρατηρήσεων.

3.— Τρία δείγματα μεγέθους $\nu_1 = 30$, $\nu_2 = 35$ και $\nu_3 = 50$ έχουν μέσες τιμές $\overline{x}_1 = 15$, $\overline{x}_2 = 20$ και $\overline{x}_3 = 24$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η μέση τιμή του δείγματος που παίρνουμε όταν ενώσουμε τα τρία δείγματα. (Απ. 20,4)

4.— Παίρνουμε ένα δείγμα x_1, x_2, ... x_ν από ένα πληθυσμό
α) Δείξετε ότι για ένα σταθερό $C \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \overline{x})^2 + \nu (c - \overline{x})^2$$

β) 12 τιμές του δείγματος αυτού έχουν

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 5472 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{12} (x_i - 450)^2 = 1620$$

Να υπολογιστούν τα $\overline{x}$ και ν

5.— Αν έχουμε ένα δείγμα μεγέθους $\nu = 2$ να βρεθεί η σταθερά c ώστε $\nu = c \cdot (x_1 - x_2)^2$

6.— Τα μήκη 34 προτάσεων (αριθμός λέξεων) σε ένα βιβλίο ιστορίας παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα

24	39	29	22	27	20	28	19	42	25
28	19	26	33	30	35	36	23	15	21
15	18	12	19	26	23	25	8	17	23
17	30	41	35						

α) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα συχνοτήτων και το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Να μελετηθούν τα μέτρα θέσης και διασποράς.

7.— Δείξετε ότι: $\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \overline{x})^2 < \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - c)^2$

όπου $c = \overline{x} + \alpha \quad \alpha \neq 0.$

8.— Δίνονται οι ποσοτικές μεταβλητές x, ψ, z ενός δείγματος με μέγεθος ν.
Αν $z = (x - 1)^2$ και $\psi = (x - 2)^2$ με $\overline{z} = 8$ και $\overline{\psi} = 12$. Να βρεθούν η μέση τιμή και η διακύμανση της x.

9.— Δίνονται οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ με $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ για $i = 1, 2, 3, \ldots \nu$ Να αποδείξετε ότι:

α) $\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} x_i$ β) $\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i\right) \leqslant \frac{1}{4}$

10.— Δίνεται ένα δείγμα με τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ με $x_i \geqslant 0$ $i = 1, 2, \ldots \nu$ και $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = \kappa$
Να αποδείξετε ότι:

$$\nu - \frac{\kappa \cdot \nu}{\kappa + \nu} \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{1 + x_i} \leqslant \nu - \frac{\kappa}{\kappa + 1}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.— Κ. ΔΡΟΣΟΥ: Για τη διδασκαλία των βασικών εννοιών της πιθανότητας στη Μέση Εκπαίδευση. Ευκλείδης Γ. τόμος 1.

2.— GRAMER H.: Mathematical Methods of Statistics Princeten University Press.

3.— Περισκόπιο. Περιοδικό του Ε.Σ.Ι.
4.— HOGG R. CRAIG A.: Introduction to Mathematical Statistics Collier Macmillan Publishers.
5.— P. MEYER: Introductory Probability and Statistical Applications.
6.— APPLIED STATISTICS, Εκδόσεις R.S.S.

ΕΝΑ ΣΧΕΔΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΤΟΝ ε-δ ΟΡΙΣΜΟ

Ευάγγελος Παναγιώτου

Η ένοια του όριου της συναρτήσεως είναι ίσως η δυσκολώτερη που έχει συναντήση ένας μαθητής της Γ΄ Λυκείου. Η κατανόησή της **είναι** απαραίτητη διότι είναι έννοια βασική για τη μελέτη της συνέχειας, παραγώγισης και ολοκλήρωσης συναρτήσεων. Συνήθως στην βιβλιογραφία δίνεται αμέσως ο ορισμός:

"Αν f/(α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$ θα λέμε $\lim f(x) = \ell$ αν και μόνο αν)

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \; \forall x \in (\alpha,\beta)$$

με $0 < |x - x_0| < \delta$ ", χωρίς να χρησιμοποιηθεί καθόλου η εποπτεία και η διαίσθηση των μαθητών. Ακολουθούν παραδείγματα για την εύρεση του δ, όπως $\lim\limits_{x\to 2}(3x + 1) = 7$ ή όπως $\lim\limits_{x\to 2}(x + 1)(2x - 1) = 1$ όπου ο προσδιορισμός του του δ για κάποιο δοσμένο ε είναι δυσκολώτερος ή και ακόμη δυσκολώτερα.

Κανείς δεν αμφιβάλει ότι αυτός είναι ένας πολύς κομψός ορισμός, ο οποίος όμως είναι το αποτέλεσμα της επί 2000 χρόνια προσπάθειας από πολύ ικανούς ανθρώπους. Το ερώτημα όμως είναι αν ο ορισμός αυτός λέει στον μαθητή τι είναι το όριο. Του επιτρέπει να φαντασθεί ένα κατάλληλο μοντέλο για να αναπαραστήσει την έννοια του ορίου; Η πράξη λέει όχι. Το ότι πολλοί μαθητές μπορούν αργότερα, αφού διδαχθούν τις