Author: Egbert Brieskorn

Title: Η Διαλεκτική στα Μαθηματικά. Ο Μπουρμπακισμός (Bourbakismus).

Abstract: Η χρήση της έννοιας του συνόλου σε συνδυασμό με την αξιωματική μέθοδο, όπου τα συστήματα των αξιωμάτων περιγράφουν μαθηματικές δομές, οδήγησαν σε ενοποίηση των Μαθηματικών του περασμένου αιώνα. Κύριος εκφραστής της τάσης για την ενοποίηση ήταν ο N. Bourbaki. Στην παρουσίαση αυτή, για να έχουμε μια γενική και σωστή εικόνα της φύσης των Μαθηματικών, η βαρύτητα δίνεται στην επεξεργασία της διαλεκτικής των ιδεών στα Μαθηματικά, ενώ περιορισμένα και πολύ σύντομα αναφέρεται σε άλλα σπουδαία θέματα.

Creator: HDML

Η ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Egbert Brieskorn Μτφ. Ζαχαριάς Αντύπας
Σύμβουλος Μ.Ε.

Ο Μπουρμπακισμός (Bourbakismus)

Η χρήση της έννοιας του συνόλου σε συνδυασμό με την αξιωματική μέθοδο οδήγησαν σε μια ενοποίηση των Μαθηματικών τα οποία τον περασμένο αιώνα ήταν χωρισμένα σε ένα πλήθος θεωριών. Κύριος εκφραστής της τάσης για την ενοποίηση των Μαθηματικών ήταν ο N. Bourbaki, ο οποίος άρχισε να την παρουσιάζει από το 1939 με την έκδοση του βιβλίου «Eléments de Mathematique». Μια πολύ παραστατική περιγραφή της επίδρασης και της ιδιαιτερότητας του Bourbaki μπορεί να βρει κανείς π.χ. στο βιβλίο του Halmos (14) (ή ακόμη και στο 26). Το 1948 ο Bourbaki εξέθεσε το πρόγραμμά του σε ένα δημοσίευμα με τίτλο «Η αρχιτεκτονική των Μαθηματικών» (5), στο οποίο θα κάνουμε πολλές παραπομπές. Σκοπός του Bourbaki είναι η ενιαία οικοδόμηση των Μαθηματικών με τη βοήθεια της αξιωματικής μεθόδου, όπου τα συστήματα των αξιωμάτων περιγράφουν μαθηματικές δομές.

Ο Bourbaki χαρακτηρίζει την αξιωματική μέθοδο ως εξής: «... μπορεί λοιπόν τώρα να γίνει σαφές τι εννοούμε με τον όρο μαθηματική δομή. Στις διάφορες παραστάσεις που μπορεί να έχει κανείς για τον όρο αυτό, εκείνο το οποίο είναι κοινό, είναι ότι οι μαθηματικές δομές εφαρμόζονται σε σύνολα στοιχείων των οποίων δεν είναι ορισμένη η φύση. Για να ορισθεί μια μαθηματική δομή δεχόμαστε μια ή περισσότερες σχέσεις μεταξύ των, μη περαιτέρω ορισμένων, στοιχείων (π.χ. στην περίπτωση της ομάδος τη σχέση Z = XTY μεταξύ τριών τυχαίων στοιχείων) μετά δεχόμαστε ότι η δοθείσα σχέση (ή οι δοθείσες), ικανοποιούν ορισμένες προϋποθέσεις οι οποίες ορίζονται άμεσα και είναι τα αξιώματα της θεωρούμενης δομής. Η ανάπτυξη της αξιωματικής θεωρίας μιας τέτοιας δομής δημιουργείται από την παραγωγή λογικών συνεπειών αυτών των αξιωμάτων, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη καμία άλλη προϋπόθεση για τα θεωρούμενα στοιχεία ή η φύση των στοιχείων αυτών». Μέσω αυτής της μεθόδου θέλει να οργανώσει ο Bourbaki όλα τα Μαθηματικά, βάσει μιας ενιαίας αρχής: «η αρχή της διάταξης έχει εδώ τη σημασία μιας ιεραρχίας των δομών η οποία ξεκινάει από απλές και πηγαίνει σε συνθετότερες και γενικές δομές».

Οι βαθμίδες αυτής της ιεραρχίας των δομών: στο κέντρο υπάρχουν οι «μητρικές δομές» όπως π.χ. η δομή της ομάδας. Οι βασικοί τύποι τέτοιων δομών είναι οι αλγεβρικές δομές, οι τοπολογικές δομές και οι δομές διατάξεως. Μετά ακολουθούν οι «πολλαπλές δομές», όπως π.χ. η τοπολογική άλγεβρα, στις οποίες συνδυάζονται οργανικά πολλές μητρικές δομές. Τέλος ακολουθούν οι θεωρίες με την κύρια σημασία της λέξεως: «... και τώρα φτάνουμε στις θεωρίες των κλασικών μαθηματικών: την ανάλυση των συναρτήσεων μιας πραγματικής ή μιγαδικής μεταβλητής, τη διαφορική γεωμετρία, την αλγεβρική γεωμετρία, τη θεωρία των αριθμών. Οι θεωρίες αυτές δεν έχουν πια την παλιά τους αυτονομία· έχουν γίνει σημεία διασταύρωσης στα οποία συναντώνται πολλές γενικές μαθηματικές δομές αλληλεπιδρώντας μάλιστα και η μία επί της άλλης».

Με ορισμένους περιορισμούς, για τους οποίους θα μιλήσουμε παρακάτω, οδηγεί αυτή η παράσταση των Μαθηματικών στο: «... με αυτούς τους αναπόφευκτους περιορισμούς μπορούμε να αντιληφθούμε καλλίτερα την «εσωτερική ζωή» των Μαθηματικών, την ενότητά τους και την πολλαπλότητά τους». Σαν βασικό πλεονέκτημα της αξιωματικής μεθόδου βλέπει ο Bourbaki την οικονομία σκέψεως που γίνεται με τη βοήθεια της. Δηλαδή όταν ο ερευνητής που ασχολείται με κάποιο πρόβλημα διαπιστώσει ότι εκεί υπάρχει κάποια από τις γνωστές δομές, τότε η αξιωματική μέθοδος του παρέχει σαν εργαλείο έτοιμες θεωρίες για την αντιμετώπιση του προβλήματός του.

«... θα μπορούσε σχεδόν να πει κανείς ότι η αξιωματική μέθοδος, η οποία αναφέρεται μόνο στα ουσιώδη, δηλαδή στα δομικά στοιχεία του προβλήματος, δεν είναι τίποτε άλλο από «Taylorsystem» των Μαθηματικών».

[Σ.Μ. ταιυλορισμός: Σύστημα επιστημονικής οργανώσεως της εργασίας κατά Φ.Ο. Ταίυλορ. Ο Ταίυλορ ωρμήθη εκ της παρατηρήσεως ότι εις τα εργοστάσια εγίνετο ελαττωματική η εργασία εκ του λόγου ότι ήτο ατελής η οργάνωσις, εμπειρικαί

αι μέθοδοι και ερριζωμένη η πρόληψις του εργάτου ότι η αύξησις της αποδοτικότηταζ του είναι επιβλαβής εις τον πλησίον του. Κύριον αίτιον του κακού ύπηρξεν η άγνοια του εργοδότου περί του απαιτουμένου χρόνου προς εκτέλεσιν δεδομένου έργου ... Ο Ταίυλορ... έφθασε βαθμιαίως εις την τελική διατύπωσιν του συστήματός του, αποβλέποντος εις το να εξασφαλίσει εις τον εργοδότην και εργάτην, έχοντας κοινό συμφέρον εν τη παραγωγή, ανώτερον βαθμόν ευζωίας. Προς επίτευξιν τούτου δέον να πολεμηθεί πάσα απώλεια ενεργείας και χρόνου εν τω εργοστασίω και να ρυθμιστεί η παραγωγή επί επιστημονικών βάσεων... Επιβάλλεται να αναλύεται τεχνικώς το έργον του εργάτου, να διαρρυθμίζονται συστηματικώς αι υπηρεσίαι εν τω εργοστασίω, να τελειοποιούνται αι μηχαναί και τα εργαλεία και να συντονίζωνται αι κινήσεις, ώστε να αποκλείεται κάθε απώλεια ενεργείας και χρόνου. Η ανάλυση των κινήσεων του εργάτου εν ενεργεία δέον προς τούτο να ανατεθεί εις ειδήμονα μηχανικόν όστις, μελετών και αναλύων την εργασίαν και τας κινήσεις του εργάτου, διαγράφει τας περιττάς και καθορίζει χρονομετρικώς τας αναγκαίας ... Κυρίως επικρίνεται το σύστημα του Ταίυλορ ως υποτιμών τον φυσιολογικόν και ψυχικόν παράγοντα δια τον εργάτην.
Από το «Εγκυκλοπαιδικόν Λεξικόν» Ελευθερουδάκη].

Και τώρα ερχόμαστε στην κριτική του προγράμματος του Bourbaki. Δεν θα πρέπει να παραξενεύει το γεγονός ότι ο Bourbaki προπαγανδίζει σε τέτοιο βαθμό την εισαγωγή του Ταιυλορισμού στα Μαθηματικά, ούτε και το γεγονός ότι ένα από τα πιο επίλεκτα μέλη των Bourbaki ο A. Weil απαιτεί για τον εαυτό του και τους ομοίους του όλα τα δικαιώματα μιας μεγαλοφυίας και μάλιστα με τις παρακάτω εκφράσεις: «πιές! Αυτή την εντολή ακολουθεί με χαρά ο μαθηματικός, πιστεύοντας με ευχαρίστηση, ότι θα χορτάσει τη δίψα του στην πηγή της γνώσης, και όντας πεπεισμένος ότι αυτή η πηγή θα είναι αστείρευτη και γάργαρη, ενώ οι άλλοι βρίσκονται στο θολερό ρεύμα της βρώμικης πραγματικότητας. Και όταν κάποιος τον κατηγορήσει για την υπεροπτική στάση του όταν κανείς του ζητήσει να κάνει ότι του αναλογεί, όταν κανείς τον ρωτήσει γιατί παραμένει πάνω στην κορυφή του παγετώνα, όπου δεν μπορεί να τον ακολουθήσει κανείς άλλος εκτός από τους ομοίους του, θα απαντήσει μαζί με τον Jacobi: Προς δόξα του ανθρωπίνου πνεύματος» (34).

Ασφαλώς μόνο λίγοι μπορούν να ακολουθήσουν τον μεγάλο μαθηματικό Andre Weil σ' αυτές τις παγωμένες κορυφές. Βέβαια επίσης μόνο λίγοι μεγάλοι μαθηματικοί μπορούν να ακολουθήσουν έναν εργάτη της βιομηχανίας χάλυβος που μπαίνει στην κόλαση ενός πυρακτωμένου ακόμη κλιβάνου Siemens - Martin για να τον επισκευάσει.

Τουλάχιστον τα λόγια του A. Weil είναι διαφωτιστικά, ενώ ο Bourbaki, δεν ξεκαθαρίζει τη θέση του σ' αυτό το θέμα. Κατ' αρχήν φαίνεται να μην θέλει να πάρει θέση: «... δεν σκοπεύουμε να ερευνήσουμε τη σχέση των Μαθηματικών προς την πραγματικότητα ή τις μεγάλες κατηγορίες της σκέψης. Έχουμε σκοπό να παραμείνουμε στην περιοχή των Μαθηματικών...».

Όμως παρακάτω παίρνει κάποια θέση: «Το ότι υπάρχει μια εσωτερική σύνδεση των πειραματικών φαινομένων και των Μαθηματικών δομών, φαίνεται να επιβεβαιώνεται, κατά απροσδόκητο τρόπο, από τις τελευταίες ανακαλύψεις της σύγχρονης φυσικής. Αλλά δεν ξέρουμε τίποτε για τους λόγους αυτού του γεγονότος (υπό την προϋπόθεση ότι έχουν κάποια έννοια τέτοιες εκφράσεις). Και ίσως ποτέ δεν θα μάθουμε τίποτα γιαυτό». Και παρακάτω γράφει: «από την αξιωματική σκοπιά φαίνονται τα Μαθηματικά σαν ένα θησαυροφυλάκειο αφηρημένων μορφών, μαθηματικών δομών, και τυχαίνει, χωρίς να ξέρουμε γιατί, ορισμένες απόψεις της εμπειρικής πραγματικότητας να ταιριάζουν σ' αυτές τις δομές. Φυσικά δεν μπορεί να διαψευσθεί το γεγονός ότι οι περισσότερες από αυτές τις μορφές είχαν αρχικά ένα εποπτικά προσδιορισμένο περιεχόμενο· όμως ακριβώς με τη σκόπιμη αποδέσμευση των μαθηματικών αυτών μορφών από το περιεχόμενό τους έγινε δυνατόν να απελευθερωθεί η δυναμικότητα που είχαν μέσα τους, να εξελιχθούν και να αποκτήσουν νέες σημασίες».

Σε όλες αυτές τις παραπομπές φαίνεται η απροθυμία του Bourbaki να ασχοληθεί με «... τις σχέσεις των Μαθηματικών προς την πραγματικότητα ή τις μεγάλες κατηγορίες του σκέπτεσθαι». Στο δημοσίευμα του A. Weil ο μαθηματικός με αλαζονεία διαχωρίζει τη θέση του από εκείνους που ασχολούνται με την πραγματικότητα. Κάι έτσι, μια και υπάρχουν πολλοί μαθηματικοί των οποίων το επάγγελμα συνίσταται στην εφαρμογή των Μαθηματικών, αποστασιοποιείται ο «δημιουργικός» μαθηματικός από εκείνον ο οποίος «μόνο» εφαρμόζει τα Μαθηματικά που δημιουργεί ο πρώτος. Έτσι καταντάει η αρχικά προοδευτική τάση του Bourbaki, η οποία συνίσταται στην ανάπτυξη μιας τεχνικής της μαθηματικής εργασίας και την οποία παρομοιάζει ο Bourbaki με τον ταιυλορισμό, να μετασχηματίζεται σε ένα ανασταλτικό παράγοντα, δηλαδή στο διαχωρισμό της δημιουργικής μαθηματικής έρευνας από τη μια μεριά και στη μεταβίβαση (μετάδοση) έτοιμων γνώσεων και τεχνικών από την άλλη. Αυτός ο διαχωρισμός σε δημιουργική έρευνα και μετάδοση ετοίμων γνώσεων, που στο μεταξύ έχει γίνει χαρακτηριστικό γνώρισμα των Πανεπιστημίων μας, καθώς και ο διαχωρισμός σε θεωρητικά και εφηρμοσμένα Μαθηματικά κάνουν πάρα πολύ δύσκολη τη χρήση των Μαθηματικών στην αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων, όπως τουλάχιστον φαίνεται από όσα λένε εκείνοι που το επάγγελμά τους έχει σχέση με τις εφαρμογές των Μαθηματικών. «Η ικανότητα, να μπορεί κανείς με αφορμή ένα πρόβλημα να αναπτύσσει μία θεωρία» κάτι που το επιστημονικό συμβουλευτικό όργανο του κράτους ζητά στο (37) να είναι μια από τις βασικές επιδιώξεις της διδασκαλίας των μαθηματικών, δεν είναι δυνατόν να αναπτυχθεί με μια εκπαίδευση η οποία έχει σαν στόχο απλώς να μάθουν οι σπουδαστές τις υπάρχουσες δομές. Στην έκθεση του επιστημονικού συμβουλευτικού οργάνου του κράτους που προαναφέραμε, μα και σε άλλες επίσημες εκθέσεις που αναφέρονται στη μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των μαθηματικών τόσο στα Πανεπιστήμια όσο και στα Σχολεία, παρουσιάζονται μονόπλευρα τα Μαθηματικά σαν δομές, και εμφανίζεται το αντιφατικό γεγονός από τη μια μεριά να επιχειρείται ένας προσανατολισμός της μαθηματικής παιδείας προς την πράξη και από την άλλη να γίνεται η διαπραγμάτευση των Μαθηματικών υπό το πνεύμα μιας επιστημονικής θεωρίας η οποία δεν συσχετίζεται καθόλου με την πράξη. Και εμφανίζεται το παράλογο φαινόμενο, προσφέροντας στους μαθητές βασικές γνώσεις των υπαρχουσών δομών να νομίζουμε ότι τους κάνουμε ικανούς να αντιμετωπίζουν τις πρακτικές ανάγκες. Ταιυλορισμός για τους πολλούς και δημιουργική εργασία για τους λίγους. Δεν θα ήταν υπερβολή να πει κανείς ότι εμφανίζεται ή επιστημονική παραγωγή σαν κάτι ανάλογο προς την υλική (βιομηχανική) παραγωγή. (Σ.Μ. όπου οι πολλοί μαθαίνουν να εφαρμόζουν και να χρησιμοποιούν αυτά που βρίσκουν οι λίγοι). Κάτω από τέτοιες συνθήκες το πρόγραμμα του Bourbaki πολύ εύκολα μπορεί να το δει κανείς σαν «σούπερ μάρκετ αφηρημένων μορφών», των δομών, τις οποίες μπορεί να τις παίρνει κανείς και να τις εφαρμόζει για την αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων, χωρίς όμως να εξηγείται πως είναι δυνατόν να γίνει αυτό και επιπλέον να θεωρούνται αυτές οι εφαρμογές από αρκετούς και πολύ «βρόμικες» (schmuzig).

Σαν σπουδαίος μαθηματικός που πράγματι είναι ο Bourbaki, αντιλαμβάνεται φυσικά ότι το πρόγραμμά του, να συμπεριλάβει την ολότητα και την πολλαπλότητα των Μαθηματικών σε ένα ιεραρχικό σύστημα αξιωματικά ορισμένων δομών, είναι κάτι που κρύβει κινδύνους: «για να διατηρήσουμε τη σωστή προοπτική, θα πρέπει σ' αυτή την σύντομη περιγραφή να προσθέσουμε την παρατήρηση ότι η περιγραφή αυτή είναι μόνο μια πρώτη προσέγγιση της πραγματικής κατάστασης των σημερινών Μαθηματικών· η περιγραφή μας είναι σχηματική καθώς επίσης εξιδανικευμένη και μονολιθική.

Σχηματική — διότι στην πραγματικότητα τα πράγματα δεν εξελίσσονται κατά τόσο απλό και συστηματικό τρόπο όπως περιγράψαμε πιο πάνω. Εμφανίζονται μεταξύ άλλων και απροσδόκητες αναδρομές κατά τις οποίες μια εξειδικευμένη θεωρία, όπως π.χ. η θεωρία των πραγματικών αριθμών, προσφέρει μεγάλη βοήθεια στην κατασκευή μιας γενικής θεωρίας, όπως είναι π.χ. η τοπολογία ή η θεωρία ολοκληρωμάτων.

Εξιδανικευμένη — διότι κατά κανένα τρόπο δεν ισχύει ότι σε όλους τους τομείς των Μαθηματικών μπορεί να φανεί ο ρόλος των βασικών δομών. Σε ορισμένες θεωρίες (π.χ. θεωρία των αριθμών) υπάρχουν πάρα πολλά μεμονωμένα αποτελέσματα τα οποία μέχρι τώρα δεν έγινε δυνατό να ταξινομηθούν και να συνδεθούν κατά ικανοποιητικό τρόπο με γνωστές δομές. Τέλος μονολιθική — διότι τίποτε δεν είναι πιο ξένο προς την αξιωματική μέθοδο απ' ότι μια στατική αντίληψη της επιστήμης. Δεν θέλουμε με κανένα τρόπο να σχηματίσει ο αναγνώστης την εντύπωση ότι εμείς ισχυριζόμαστε ότι θέσαμε τα πλαίσια του τελικού σταδίου της επιστήμης. Οι δομές δεν είναι αμετάβλητες ούτε ως προς το πλήθος τους ούτε ως προς το περιεχόμενό τους. Είναι σίγουρα δυνατό, η μελλοντική ανάπτυξη των Μαθηματικών να αυξήσει το πλήθος των βασικών δομών, και αυτό θα γίνει όταν διαπιστωθεί η αποδοτικότητα νέων αξιωμάτων ή ορισμένων συνδυασμών αξιωμάτων. Μπορούμε να αναμένουμε μια σημαντική πρόοδο από την ανάπτυξη νέων δομών όταν αναλογιζόμαστε την πρόοδο που προκάλεσαν οι σήμερα γνωστές δομές. Εξάλλου οι γνωστές σήμερα δομές, δεν είναι κατά κανένα τρόπο πλήρη οικοδομήματα και θα ήταν κάτι το εκπληκτικό εάν βρισκόταν όλη η ουσιαστική τους σημασία».

Θα πρέπει να εκτιμηθεί η ενέργεια του Bourbaki να θέσει τους παραπάνω περιορισμούς και να του αναγνωρισθεί ότι η εικόνα της ιεραρχίας των δομών που προτείνει, μαζί με τους περιορισμούς που θέτει, δίνουν μια σωστή εικόνα της στιγμιαίας κατάστασης των Μαθηματικών, ακριβέστερα: εκείνου του τμήματος των Μαθηματικών το οποίο δεν παρουσιάζει σήμερα καμία σημαντική εξέλιξη. 'Ομως ο ισχυρισμός του Bourbaki ότι τίποτε δεν είναι πιο ξένο προς την αξιωματική μέθοδο απ' ότι μια στατική αντίληψη της επιστήμης, πρέπει, λαμβάνοντας υπόψη και τις εμπειρίες με το φορμαλισμό, από τον οποίο αυτός κρατάει απόσταση, να χαρακτηρισθεί σαν κάτι το αντιφατικό. Διότι ναι μεν χρησιμοποιεί ο Bourbaki διαλεκτικά ζεύγη εννοιών όπως «ενότητα, πολλαπλότητα», «ανάλυση, σύνθεση», «γενικό, ειδικό» κλπ. όταν μιλάει για τη δραστηριότητα του μαθηματικού και όταν περιγράφει το τι μπορεί να αποδόσει το πρόγραμμά του, όμως στο σχέδιο του, της ιεραρχίας των δομών, δεν χρησιμοποιείται καθόλου ο διαλεκτικός χαρακτήρας αυτών των εννοιών. Περιγράφει και επεξηγεί το μοντέλο του Bourbaki αληθινά την ανάπτυξη της επιστήμης;

Η οικοδόμηση της αξιωματικής θεωρίας μιας δοθείσης δομής, λέει ο Bourbaki, αντιστοιχεί στην παραγωγή των λογικών συνεπειών των αξιωμάτων της. Μα τότε ποιές είναι οι λογικές συνέπειες των αξιωμάτων, π.χ. των αξιωμάτων, που περιγράφουν μια διαφορίσιμη δομή; 'Οταν με τη λέξη «λογική» εννοεί κανείς αυτό που θα εννοούσε και ο Bourbaki, δηλαδή τη φορμαλιστική λογική, θα πρέπει με τον όρο λογική συνέπεια να εννοεί μόνο το αποτέλεσμα ενός συστήματος λογικών συλλογισμών, δηλαδή μια αποδειχθείσα μαθηματική πρόταση ή ακόμη έναν φορμαλιστικό ορισμό στον οποίο η οριστέα έννοια ανάγεται άμεσα ή έμμεσα στις μη ορισμένες βασικές έννοιες του συστήματος αξιωμάτων. Ναι μεν τα μαθηματικά δημιουργήματα μπορούν να παρουσιασθούν φορμαλιστικά συνήθως σαν αποδείξεις υπάρξεως ή σαν ορισμοί, όμως ο κάθε μαθηματικός γνωρίζει ότι οι ορισμοί και οι τυπικές κατασκευές μιας θεωρίας δεν πέφτουν στην ποδιά μας σαν ώριμα φρούτα από το δέντρο της λογικής γνώσεως, αλλά βρίσκονται με τη διαίσθηση και την πείρα και πολλές φορές ύστερα από μία μακροχρόνια ιστορική εξέλιξη. Με μια φορμαλιστική διατύπωση των ορισμών και των βασικών κατασκευών δεν δίνεται καμία πληροφορία για το πώς φτάσαμε σ' αυτή τη διατύπωση. Θα ήταν π.χ. κάτι παραπάνω από παράλογο να ισχυρισθεί κανείς ότι, ας πούμε, οι Henkel — διαμερισμοί σωμάτων (Henkelkörperzerlegungen) διαφορισίμων πολλαπλοτήτων, ένα πάρα πολύ χρήσιμο μέσο για την απόδειξη προτάσεων μεγάλης εμβέλειας όπως είναι η γενικευμένη υπόθεση του Poincaré, είναι μια φορμαλιστικά λογική συνέπεια των αξιωμάτων μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας και ότι μ' αυτά επεξηγείται και κατά κάποιο τρόπο το πως και γιατί φτάσαμε σ' αυτή την κατασκευή. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι ήδη από το 1904 δηλαδή πολύ πριν από το φορμαλιστικό ορισμό της διαφορίσιμης πολλαπλότητας από τον Whitney το 1936, είχαν βρεθεί από τον Poincaré οι βασικές ιδέες της κατασκευής αυτής. Ακριβώς έτσι γίνεται και με τις προτάσεις μιας θεωρίας. Οι μεγάλοι μαθηματικοί συχνά προμαντεύουν διαισθητικά τις προτάσεις πολύ πριν τις αποδείξουν. Έτσι π.χ. γράφει ο Gauss στον πρόλογο του βιβλίου «μαθηματικές πραγματίες» του Eisenstein (12): «η ανωτέρα αριθμητική προσφέρει ένα ανεξάντλητο πλούτο από ενδιαφέρουσες αλήθειες, και μάλιστα τέτοιες που δεν απαιτούνται μεμονωμένες αλλά βρίσκονται σε εσωτερική συσχέτιση μεταξύ τους, και κάθε τόσο βρίσκουμε νέες, και απρόσμενες συσχετίσεις, όσο η επιστήμη προοδεύει. Μια ιδιαιτερότητα που έχει η διδασκαλία ενός μεγάλου μέρους της ανωτέρας αριθμητικής είναι ότι μας παρέχει ερεθίσματα και οδηγούμαστε επαγωγικά και σχετικά εύκολα σε βαρυσήμαντες προτάσεις με εξαιρετικά απλό περιεχόμενο των οποίων όμως η δικαιολόγηση βρίσκεται τόσο βαθιά που μόνο ύστερα από πολλές ατυχείς προσπάθειες φτάνουμε στην απόδειξη τους και μάλιστα τις πιο πολλές φορές ακολουθώντας επίπονους και φτιαχτούς δρόμους ενώ οι απλές κομψές αποδείξεις μένουν για πολύ καιρό κρυμμένες».

Η έκφραση του Bourbaki σχετικά με την αξιωματική οικοδόμηση μιας θεωρίας σαν παραγωγή των λογικών συνεπειών των αξιωμάτων δεν μας λέει τίποτε, μα απολύτως τίποτε, για το πως εμφανίστηκε αυτή η θεωρία, υπό την προϋπόθεση ότι με τη λέξη «λογική» εννοούμε λογική κατά τη φορμαλιστική έννοια, διότι θα ήταν αλλιώς τα πράγματα εάν με τη λέξη «λογική» εννοούσαμε τις «βασικές κατηγορίες της σκέψης», αλλά αυτό το αποκλείει ο Bourbaki.

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο, το οποίο προάγει την ανάπτυξη των Μαθηματικών και του οποίου η σημασία πάντα τονίσθηκε από πολλούς μαθηματικούς, είναι η ξαφνική ανακάλυψη σχέσεων μεταξύ εντελώς διαφορετικών μεταξύ τους θεωριών. Η περιγραφή αυτού του γεγονότος από τον Bourbaki παραβλέπει τελείως την ιστορική πλευρά, και αποδίδει την σύνδεση των θεωριών στην ύπαρξη κοινών δομικών στοιχείων, τα οποία ανήκουν σε μια δομή, η οποία στην ιεραρχία των δομών βρίσκεται πιο ψηλά και από τις δυο θεωρίες. Ιστορικά όμως τις πιο πολλές φορές συμβαίνει το ακριβώς αντίθετο. Δηλαδή η ανακάλυψη κάποιων σχέσεων μεταξύ δύο θεωριών αποτελεί το έναυσμα για την αναζήτηση, επεξεργασία και παρουσίαση μιας υπερκείμενης δομής. Το ότι η πραγματική εξέλιξη των Μαθηματικών δεν συντελείται μόνο μέσω της αξιωματικής μεθόδου τονιζόταν και τονίζεται πάντοτε από τους μαθηματικούς. Έτσι π.χ. γράφει ο Courant στο (10) «κατά κάποιο τρόπο, ανοικτά ή συγκαλυμμένα, και μάλιστα από τη φορμαλιστική ή αξιωματική σκοπιά, παραμένει η κατασκευαστική εποπτεία το μοναδικό ζωντανό στοιχείο των Μαθηματικών» (ιδέ συγκριτικά π.χ. και Halmos (15)).

«Η ελπίδα του Bourbaki ότι οι μαθηματικές δομές συνάγονται κατά φυσιολογικό τρόπο από την ιεραρχία των συνόλων, είναι χωρίς αμφιβολία μόνο μια αυταπάτη. Κανείς δεν μπορεί λογικά να αντισταθεί στην εντύπωση ότι οι σπουδαιότερες μαθηματικές δομές εμφανίζονται σαν θεμελιώδη γεγονότα του εξωτερικού κόσμου, και οι μη συγκρίσιμες (inkomensurable) διαφορές τους βρίσκουν την εξήγησή τους μόνο στην πραγματικότητα (inder Realität)». Αυτά γράφει στο «Modern Mathematics: An educational and philosophic error?» (32) ο René Thom του οποίου οι μαθηματικές εργασίες συνέβαλαν ίσως όσο κανενός άλλου συγχρόνου μαθηματικού στην κατανόηση της πραγματικότητας (Realität).

Κάνοντας μια μικρή απλούστευση, βγάζουμε από όλα τα παραπάνω το συμπέρασμα ότι: η από τον φορμαλισμό προτεινόμενη μορφή της θετικιστικής επιστημονικής θεωρίας δεν δίνει ούτε καν μια στατική εικόνα των μαθηματικών. Η εικόνα που προτείνει ο Bourbaki για τα Μαθηματικά, περιέχει μια, ούτως ειπείν, σωστή παράσταση της κινηματικής των Μαθηματικών όχι όμως και της δυναμικής τους. Αντί στην ανάπτυξη των Μαθηματικών να φανεί η αλληλεπίδραση μεταξύ ανάλυσης και σύνθεσης, μεταξύ επαγωγής και παραγωγής, μεταξύ αξιωματικής μεθόδου και κατασκευής, τονίζει ο Bourbaki μονόπλευρα κάθε φορά τη μία από τις δύο τάσεις.

Όταν κανείς αναρωτιέται για ποιο λόγο ένας τόσο σημαντικός μαθηματικός όπως ο Bourbaki, του οποίου οι προσωπικές εργασίες έχουν συμβάλλει τόσο πολύ στην ανάπτυξη των Μαθηματικών, φτάνει σε μια τόσο μονόπλευρη εικόνα των μαθηματικών, πώς μια τέτοια αντίληψη βρήκε τόση απήχηση, τότε θα πρέπει, παίρνοντας υπόψη και τα αποσπάσματα πιο πάνω και στα οποία φαίνονται οι απόψεις του Bourbaki, να υποθέσει το εξής: το κοινωνικό Είναι ενός πολύ εξειδικευμένου επιστήμονα μπορεί να τον οδηγήσει στην ανάπτυξη μιας λανθασμένης συνειδητοποίησης της κοινωνικής σημασίας της εργασίας του. Ένα γνώρισμα αυτής της εσφαλμένης συνειδητοποίησης είναι συνήθως η φανερή αποδοχή μιας περισσότερο ή λιγότερο ιδεαλιστικής φιλοσοφίας, ή η ψευδαίσθηση ότι μπορεί να αποφύγει την αναγκαιότητα της φιλοσοφικής επεξήγησης της προσωπικής του εργασίας και έτσι να αποφύγει την εκλογή μεταξύ «υλισμού - ιδεαλισμού».

Η οξύτερη έκφραση αυτής της εσφαλμένης συνειδητοποίησης είναι η αγνόηση των σχέσεων της θεωρίας προς την πράξη ή η περιφρόνηση της πραγματικότητας — και κατά ειρωνικό τρόπο μάλιστα συνοδευόμενη από το παράπονο ότι τον τελευταίο καιρό δεν παρέχει πια η πραγματικότητα αρκετά ερεθίσματα για την ανάπτυξη της θεωρίας (έτσι περίπου στο (36)).

Αυτή η άρνηση, να ληφθεί υπόψη και ο ρόλος της πραγματικότητας, αντανακλάται τελικά στην περιγραφή της θεωρίας, όπου στη θέση του πλήθους των αντιμαχομένων τάσεων που εμφανίζονται και συμβάλλουν στην ανάπτυξη των Μαθηματικών, παρουσιάζεται μια εικόνα, η οποία δεν περιγράφει πια τα αληθινά ζωντανά Μαθηματικά, και γιαυτό είναι απηλλαγμένη από κάθε εσωτερική ένταση, από όλες τις αντιθέσεις. Και έτσι φτάνουμε στο να βλέπουμε έναν διανοούμενο υποστηρικτή του Bourbaki, τον R. Queneau, να νομίζει ότι μπορεί να διαπιστώσει ότι: «η διαλεκτική δεν εκφράζει τη φύση των Μαθηματικών· αυτή ισχύει για τα αίτια αλλά όχι και για το αντικείμενο της επιστημονικής δραστηριότητας».

Σ' αυτή την παρανόηση της επιστήμης εμπεριέχεται και ο λόγος (για τον οποίο η παρανόηση): ο διαχωρισμός μεταξύ υποκειμένου και αντικειμένου, η φαντασίωση ότι θα μπορούσε κανείς να μιλάει για το ένα και να σιωπά για το άλλο.

Η διαλεκτική μέθοδος

Εάν θέλουμε να έχουμε μία γενική και σωστή εικόνα της φύσης των Μαθηματικών, τότε θα πρέπει να βάλουμε δύο προϋποθέσεις:

1. Δεν θα πρέπει να περιορισθούμε σε μία καθαρά εσωμαθηματική περιγραφή των Μαθηματικών. Θα πρέπει να τοποθετήσουμε το πρόβλημα σε μια φιλοσοφική βάση, η οποία θα μας επιτρέψει να θέσουμε την κρίσιμη ερώτηση αναφορικά με τη σχέση που υπάρχει μεταξύ μαθηματικών θεωριών και πραγματικότητας.
2. Θα πρέπει να προσπαθήσουμε να συμπεριλάβουμε στην εικόνα των Μαθηματικών τις εμπειρίες των μαθηματικών και την ιστορία της μαθηματικής επιστήμης, σε όλη την έκτασή της, στην πολλαπλότητά της στην ενότητα και τις αντιθέσεις της. Τότε θα γίνει αυτή η εικόνα των μαθηματικών δυναμική και θα φανεί καθαρά η ιδιαιτερότητα αυτής της επιστήμης καθώς και η θέση της μέσα στο σύνολο των ανθρωπίνων πνευματικών και πρακτικών δραστηριοτήτων.

Σχετικά με την πρώτη απαίτηση ως προς τη φιλοσοφική θέση: Τα διάφορα είδη των επιστημονικών θεωριών, στα πλαίσια των οποίων γίνεται σήμερα κατά κανόνα η διαπραγμάτευση των προβλημάτων της θεμελίωσης των Μαθηματικών, δεν ικανοποιούν τις απαιτήσεις μας, διότι οι θεωρίες αυτές αποκλείουν σαν χωρίς έννοια την ερώτηση που αναφέρεται στη σχέση των μαθηματικών θεωριών και της πραγματικότητας, θεωρίας και πράξης (σχετικά με τις θεωρίες αυτές ιδέ (3) και (20). Για την κριτική αυτών των θεωριών ιδέ 22, 28). Και εκείνοι οι θεωρητικοί της επιστήμης, οι οποίοι μας έδωσαν μια τόσο ξένη προς την πραγματικότητα εικόνα των Μαθηματικών, στην οποία άσκησε τόσο αυστηρή κριτική ο Bishop, αυτοί οι ίδιοι μας λένε ότι οι απόψεις που διατύπωσε η παλαιότερη φιλοσοφία, σχετικά με το ζήτημα της γνωσιολογίας, είναι προεπιστημονικές ανοησίες. Βέβαια αυτό δεν εμποδίζει εμάς να αναφερόμαστε σε τέτοιες απόψεις, όταν αυτή η αναφορά συμβάλλει στην κατανόηση της φύσης των Μαθηματικών.

Στη φιλοσοφία και κατά τη διάρκεια μιας μακρόχρονης εξέλιξης, σχηματίστηκε ένα γνωστό σε όλους μας, και βασικό για την αντιμετώπιση ερωτήσεων που αναφέρονται στην απόκτηση γνώσεων, ζεύγος αντιθέτων εννοιών: η αντιπαράθεση του πνεύματος και της ύλης. Φυσικά οι λέξεις αυτές πήραν στην ιστορία της φιλοσοφίας τις πιο διαφορετικές σημασίες. Παρακάτω θα αναφέρουμε τόσα όσα χρειάζονται για να αντιληφθούμε αυτή την αντίθεση, σαν την αντίθεση μεταξύ της ατομικής και κοινωνικής συνείδησης από τη μια μεριά, και της αντικειμενικής, της ανεξάρτητης από αυτή τη συνείδηση, πραγματικότητας. Από τη σκοπιά της γνωσιολογίας δεν μπορεί να γίνει κατανοητή αυτή η αντίθεση, όμως δεν ισχύει το ίδιο και στην ανάλυση του κοινωνικού ρόλου της επιστήμης, διότι εδώ πρέπει πάντα να λαμβάνεται υπόψη ότι οι διαδικασίες απόκτησης γνώσης δεν μπορούν, όσον αφορά τις κοινωνικές και βιολογικές αφετηρίες τους, να αποχωρισθούν από το υλικό υπόβαθρό τους. Για τους λόγους αυτούς θα πρέπει να γίνει διάκριση μεταξύ των σχέσεων ύλη-συνείδηση και υποκείμενο-αντικείμενο, όπου το υποκείμενο εμφανίζεται σαν υλικό ον ακόμη και εκεί που φαίνεται να ακολουθεί θεωρητικά ενδιαφέροντα. Υπό αυτή την έννοια, η θέση μας είναι υλιστική. Αυτά είναι αρκετά, για τη διασαφήνιση της φιλοσοφικής μας βάσης, ως προς την οποία θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τις σχέσεις των επιστημονικών θεωριών προς την πραγματικότητα.

Τώρα σχετικά με τη δεύτερη απαίτησή μας, να καταλάβουμε τη δυναμική της ανάπτυξης των Μαθηματικών. Από τότε που άρχισε να εμφανίζεται η φιλοσοφία υπήρχαν διανοητές, οι οποίοι έβλεπαν την ουσία του κόσμου σαν συνεχή αλλαγή των φαινομένων, σαν ροή και γίγνεσθαι, σαν κάτι που δημιουργείται από τον πόλεμο των αντιθέσεων. Αυτή η διαλεκτική σκέψη αρχίζει με τον Ηράκλειτο και ολοκληρώνεται με τη διαλεκτική του Hegel. Βέβαια η διαλεκτική του Hegel ήταν και η ανωτάτη έκφραση του ιδεαλισμού. Έπρεπε πρώτα να μετατραπεί αυτή σε υλιστική για να γίνει δυνατή η πραγματική κατανόηση της συσχέτισης της διαλεκτικής των ιδεών και της πραγματικότητας, της φυσικής και κοινωνικής πραγματικότητας. Και αυτό το έκαναν ο Marx, ο Engels και ο Lenin. Πολύ σημαντική για την εργασία μας είναι η κριτική που κάνει ο Lenin στη διαλεκτική του Hegel, και ιδιαίτερα το μέρος εκείνο που αναφέρεται στην κριτική του έργου «επιστήμη και λογική» του Hegel. Η εργασία αυτή του Lenin, η οποία βρίσκεται στα «φιλοσοφικά τετράδια» (19) περιέχει πολύ βασικές ιδέες, οι οποίες έχουν μεγάλη σημασία για τη διαπραγμάτευση της φύσης των επιστημών. Από αυτή την εργασία πηγάζουν και τα περισσότερα από αυτά που θα γραφούν παρακάτω σχετικά με τη διαλεκτική στα Μαθηματικά. Ξεκινάμε λοιπόν από αυτή τη βάση και ελπίζουμε ότι οι μαθηματικοί θα βρουν στην παράσταση των Μαθηματικών, η οποία θα γίνει στα πλαίσια αυτής της υλιστικής διαλεκτικής, μια ζωντανή, ρεαλιστική εικόνα της επιστήμης τους.

Στην παρουσίαση αυτή των Μαθηματικών η βαρύτητα θα δοθεί στην επεξεργασία της διαλεκτικής των ιδεών στα Μαθηματικά, ενώ περιορισμένα και πολύ σύντομα θα αναφερθούμε σε άλλα σπουδαία θέματα. Για να ολοκληρωθεί η εικόνα των Μαθηματικών θα πρέπει να ανατρέξει ο αναγνώστης και σε άλλες εργασίες και βιβλία με αντίστοιχο περιεχόμενο, χωρίς να σημαίνει ότι συμφωνούμε απόλυτα με τον τρόπο που διαπραγματεύονται σ' αυτά τα διάφορα θέματα. Σχετικά με την σχέση Μαθηματικών και τεχνικής παραπέμπουμε στο βιβλίο (18) του P. Labérenne, για ιστορικά θέματα στο βιβλίο (31) του D.J. Struik και για γενικά φιλοσοφικά προβλήματα των Μαθηματικών στα βιβλία (28) και (29). Δυστυχώς οι περιορισμένες γνώσεις μας στη βιβλιογραφία δεν μας επιτρέπουν μια πλήρη βιβλιογραφική κάλυψη αυτών των θεμάτων.

Σε τι συνίσταται η διαλεκτική μέθοδος;

Η διαλεκτική είναι μια μέθοδος για την αντίληψη της ενότητας των αντιθέσεων σαν την αρχή κάθε κίνησης, κάθε αλλαγής. Γράφει ο Hegel: «κάτι είναι λοιπόν ζωντανό, μόνο όταν περιέχει μέσα του την αντίφαση, και μάλιστα η ζωτικότητα αυτή συνίσταται ακριβώς στο να περιέχει και να ανέχεται την αντίφαση». Περιττό να πούμε ότι, η λέξη αντίφαση δεν αναφέρεται εδώ με τη μαθηματική έννοια «λογική αντίφαση». Τα σπουδαιότερα σημεία της διαλεκτικής μεθόδου είναι:

1. Τα θεωρούμενα πράγματα, φαινόμενα, διαδικασίες, θα πρέπει να τα βλέπουμε στη νομοτέλεια της ανάπτυξής τους και να τα εξετάζουμε, ως προς την ολότητα των σχέσεών τους, προς άλλα πράγματα, φαινόμενα, διαδικασίες. Εδώ μας ενδιαφέρει να αντιληφθούμε την ενότητα, την αναγκαία συσχέτιση όλων των πλευρών, δυνάμεων και τάσεων στην εξεταζόμενη περιοχή φαινομένων.

2. Την εξέλιξη θα πρέπει να την αντιληφθούμε σαν αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των αντιθέτων μεταξύ τους δυνάμεων και τάσεων που εμφανίζονται σε κάθε φαινόμενο, σαν την ιστορία της δημιουργίας και ανάπτυξης των αντιθέσεων.

3. Οι αντιθέσεις σχηματίζουν μια ενότητα. Μπορεί η κάθε μια να μετασχηματίζεται, να εισχωρεί μέσα στην άλλη. Οι αντιθέσεις είναι σχετικές. Οι διάφορες αντιπαραθέσεις συμπλέκονται μεταξύ τους π.χ. η συσχέτιση περιεχομένου και μορφής, ποσότητας και ποιότητας.

4. Χαρακτηριστικό της διαλεκτικής μεθόδου είναι ότι βλέπει την άρνηση σαν ένα παράγοντα της ανάπτυξης, σαν ένα παράγοντα της συσχέτισης, της διατήρησης του θετικού. Αυτό σημαίνει ότι η άρνηση είναι αντικατάσταση μιας θέσης με την αντίθετή της. ΄Ετσι αίρεται η αρχική θέση και μάλιστα υπό διπλή έννοια: σαν ξεπερασμένη και διατηρητέα. Αυτή η διατήρηση είναι μια άποψη της ενότητας των αντιθέσεων. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται πάντοτε και με τον τρόπο αυτό διατηρείται π.χ. η επανάληψη ορισμένων βημάτων ενός σταδίου και σε ένα άλλο υψηλότερο στάδιο ή η φαινομενική επιστροφή στο παλιό.

Φυσικά δεν μπορεί κανείς να συνάγει από τη διαλεκτική μέθοδο τη μεθοδολογία των διαφόρων επιστημών. ΄Ομως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διαλεκτική μέθοδος, σαν προσανατολιστική βοήθεια, για τη λύση βασικών προβλημάτων των διαφόρων επιστημονικών μεθοδολογιών, τα οποία συσχετίζονται με γενικά φιλοσοφικά προβλήματα. Αντίστροφα πλουτίζεται η διαλεκτική μέθοδος από την επεξεργασία των θεωρητικών και μεθοδολογικών προόδων των διαφόρων επιστημών. Η διαλεκτική μέθοδος δεν είναι ένα αμετάβλητο σύστημα, δεν είναι δογματική. Είναι ιδιαίτερα αποδοτική όταν τη χρησιμοποιούμε για να αντιληφθούμε την κοινωνική σκοπιμότητά της γνωστικής διαδικασίας.

Στα παρακάτω θα προσπαθήσουμε να αντιληφθούμε την ανάπτυξη των Μαθηματικών υπό το πνεύμα αυτής της μεθόδου, και ειδικότερα να δείξουμε ότι η μαθηματική μέθοδος, σαν μέρος της ανθρώπινης σκέψης, περιέχει πολλά στοιχεία από τη διαλεκτική μέθοδο.

Ξεκινάμε με ένα παράδειγμα χρησιμοποίησης της διαλεκτικής μεθόδου: η κατανόηση της διαλεκτικής σχέσης μεταξύ θέσης και αντίθεσης, βοηθάει στην κατανόηση του μαθηματικού τρόπου σκέψεως. Φυσικά ο μαθηματικός έχει συνηθίσει με τον όρο άρνηση να εννοεί την άρνηση μιας πρότασης κατά την έννοια της φορμαλιστικής λογικής, και δεν βλέπει εδώ κανένα πρόβλημα. Όμως σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, στο σημείο (4), εδώ πρόκειται για κάτι άλλο. Ο Hegel αναφέρει μια πρόταση του Spinoza, την οποία επίσης εξήρε και ο Cantor: "Omnis determinatio est negatio". Δηλαδή κάθε ορισμός, κάθε περιορισμός είναι μία άρνηση. Με κάθε θέση που βάζουμε, π.χ. με ένα ορισμό ή με ένα σύστημα αξιωμάτων, δεν λέμε μόνο τι είναι αυτά που ορίζουμε, αλλά έμμεσα, και συχνά χωρίς να το θέλουμε, λέμε και τι δεν είναι τα πράγματα που ορίσαμε. Με την πρώτη ματιά θα μπορούσε αυτό να θεωρηθεί σαν κάτι προφανές. Όμως αυτή η φαινομενικά τόσο απλή πρόταση περιγράφει ένα παράγοντα της προόδου, της ανάπτυξης. Διότι αυτή σημαίνει ότι κάθε θέση έχει μέσα της το σπέρμα του ξεπεράσματός της, το σπέρμα της άρνησής της. Όταν π.χ. θέλουμε να ορίσουμε μια μαθηματική έννοια π.χ. την έννοια της αλγεβρικής πολλαπλότητας, έχουμε στο μυαλό μας κάποια θετική αντίληψη για τα φαινόμενα και τα προβλήματα, που θα αντιμετωπισθούν με τον ορισμό αυτόν. Όταν μετά αναπτύσσουμε την έννοια αυτή στα πλαίσια μιας θεωρίας, τότε σε πολλές περιπτώσεις καταφαίνεται η ατέλεια του ορισμού της. Αυτό δεν σημαίνει ότι ο αρχικός ορισμός ήταν ακατάλληλος. Είναι δυνατό π.χ. εισάγοντας νέα δομικά στοιχεία ή επεκτείνοντας την περιοχή των στοιχείων, τα οποία συνιστούν το μελετούμενο αντικείμενο, να επιτύχουμε μια ακριβέστερη αντίληψη των αρχικών φαινομένων. Τόσο για τα αρχικά προβλήματα, όσο και για τα καινούργια που εμφανίστηκαν κατά την ανάπτυξη της θεωρίας, η παλιά έννοια δεν είναι πλέον επαρκής, η δομή που ορίστηκε στην αρχή ήταν πολύ απλή, πολύ φτωχή ή πολύ άκαμπτη και θα πρέπει να εμπλουτισθεί. Έτσι πορεύτηκε π.χ. στις αλγεβρικές πολλαπλότητες η ανάπτυξη από τις λίγο πολύ κλασικές αλγεβρικές Varietäten στις αλγεβρικές Varietäten του Serre, από εδώ στα σχήματα του Grothendieck και τελικά στους αλγεβρικούς χώρους του Michael Artin. Εδώ φυσικά, σε κάθε επέκταση της έννοιας, έχουμε μια άρνηση της παλιάς, υπό το πνεύμα ότι η καινούργια την ξεπερνάει. Όμως χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η παλιά εξαφανίζεται από τα Μαθηματικά, απλώς έχει ανέβει σε υψηλότερα επίπεδα. Το παραπάνω παράδειγμα το δείχνει αυτό καθαρά. Ότι είπαμε εδώ για την εδώ για την ανάπτυξη μεμονωμένων εννοιών ισχύει και για την ανάπτυξη ολοκλήρων θεωριών π.χ. για τις ιδέες των διαφόρων γεωμετριών. Επίσης, είναι ένα πολύ γνωστό φαινόμενο στους μαθηματικούς, η επανάληψη τυπικών βημάτων μιας θεωρίας στην διάδοχό της, σε ένα ανώτερο επίπεδο, πράγμα για το οποίο μιλήσαμε κατά την επεξήγηση της διαλεκτικής μεθόδου.

Μια κατά άλλο τρόπο, επιβεβαίωση της αρχής του Spinoza μπορεί να δει κανείς στην πρόταση του Gödel: τη στιγμή που ο μαθηματικός, με την εκλογή ενός συστήματος αξιωμάτων, προσδιορίζει με ακρίβεια την περιοχή των ερευνών του, θέτει ο ίδιος έμμεσα ερωτήσεις, τις οποίες βασικά δεν μπορεί να τις απαντήσει μέσα στα πλαίσια που ο ίδιος έθεσε, και έτσι συγχρόνως μεταθέτει τις ερωτήσεις αυτές, έξω από την περιοχή που όρισε. Με αυτή την έννοια τα Μαθηματικά δείχνουν το ανοιχτό, το όχι τελικό, το όχι τελειωτικό της ανθρώπινης γνώσης, κάτι που πάντα υποστήριζε η διαλεκτική.

Κάθε μαθηματικός γνωρίζει ότι ένα «αρνητικό» αποτέλεσμα, η απόρριψη μιας υπόθεσης, ή οι μάταιες προσπάθειες για τη λύση ενός σπουδαίου προβλήματος, πολύ συχνά έγιναν αφορμή για τελείως νέες εξελίξεις, που δεν μπορούσε κανείς να τις φανταστεί, για νέα προβλήματα και νέες θεωρίες. Δηλαδή άλλο ένα παράδειγμα για την «άρνηση σαν στοιχείο προόδου».

Τέλος, μερικές ακόμη παρατηρήσεις, για τη σχέση αντιθέσεων από τη μια μεριά, και λογικών αντινομιών από την άλλη. Οι αντινομίες, έτσι μαθαίνει ο κάθε φοιτητής στο πρώτο εξάμηνο, είναι έργα του διαβόλου (sind vom Teufel). Δεν είναι δυνατόν να γίνουν ανεκτές στα Μαθηματικά, έστω και μια θα τίναζε όλο το οικοδόμημα στον αέρα. Και επειδή οι αντιθέσεις έχουν κάποια συγγένεια με τις αντινομίες, γιαυτό στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, μερικοί συγγραφείς, τις αντιμετωπίζουν και αυτές σαν έργα του διαβόλου: δεν πρέπει να εμφανίζονται στα Μαθηματικά και αν καμιά φορά εμφανίζονται πρέπει, όσο γίνεται πιο γρήγορα, να εξαφανιστούν. Δηλαδή έχουμε πάλι την κλασική περίπτωση: δεν μπορεί να υπάρχει, ότι δεν επιτρέπεται να υπάρχει. Και όμως τα Μαθηματικά είναι γεμάτα από αντιθέσεις, παρακάτω αναφέρουμε μερικές στην τύχη.

πεπερασμένο - άπειρο
συμπαγές - ανοικτό
διακεκριμένο - συνεχές
σταθερά - μεταβλητή
ποσοτικά - ποιοτικά
ομαλό - ανώμαλο
αναλυτικά - συνθετικά
αξιωματικά - κατασκευαστικά
κλπ., κλπ.

Φυσικά οι αντιθέσεις δεν είναι τελείως αθώες. Η διαφορά μεταξύ αντιθέσεων και αντινομιών δεν είναι απόλυτη. Η αντίθεση μπορεί να οδηγήσει σε αντινομία. Έτσι αρκετές φορές η αντίθεση πεπερασμένο - άπειρο οδήγησε σε αντινομίες: πρώτη φορά κατά την αρχαιότητα, μετά κατά τη θεμελίωση του απειροστικού λογισμού, και τέλος στις αντινομίες της θεωρίας των συνόλων. Και αυτή η τελευταία οδήγησε στην επιδημία (Virulenz) μιας άλλης αντίθεσης: στη φιλονικεία μεταξύ των υποστηριχτών της αξιωματικής μεθόδου και των κονστρουκτιβιστών. Εάν όμως θα ήθελε κανείς, ένεκα του κινδύνου των αντινομιών, να εξαφανίσει από τα Μαθηματικά τις αντιθέσεις, τότε αυτό θα ήταν μόνο μια έκφραση της μη κατανόησης της σημασίας τους. Από τα Μαθηματικά θα έμενε μόνο ένα κομμάτι. Εκείνο που πρέπει να γίνει είναι, να γίνουν κατανοητές οι αντιθέσεις, τότε θα γίνουν αυτές παράγοντες προόδου.

Αφαίρεση και πραγματικότητα

Στην ερώτηση για τη φύση των Μαθηματικών ανήκει και η ερώτηση σχετικά με το αντικείμενό τους. Φυσικά έχουν δοθεί εδώ κατά καιρούς οι πιο διαφορετικές απαντήσεις. Μερικοί χαρακτήρισαν την ερώτηση ανόητη (χωρίς έννοια), και οι λογικιστές ισχυρίσθηκαν ότι, τα Μαθηματικά δεν έχουν αντικείμενο και αντί να μιλάει κανείς για το αντικείμενο των Μαθηματικών θα ήταν καλύτερα να μιλάει για την αντικειμενικότητά τους. Για τον μαθηματικό φαίνεται εκ πρώτης όψεως, η ερώτηση να μην είναι πολύ δύσκολη. Τα αντικείμενα τα οποία εξετάζει ο μαθηματικός ήταν στην αρχή αριθμοί και απλά γεωμετρικά σχήματα, αργότερα εξισώσεις, μετά συναρτήσεις, τέλος ομάδες, χώροι, πολλαπλότητες και γενικά σήμερα, διάφορα σύνολα με δομές. Αυτή η απάντηση μπορεί να είναι ικανοποιητική για τον μαθηματικό, υπό την προϋπόθεση ότι, αυτός δέχεται την ύπαρξη τέτοιων αφηρημένων αντικειμένων και επιδιώκει με μαθηματικές μεθόδους, να βρει νέες προτάσεις, που αναφέρονται σ' αυτά. Στην περίπτωση αυτή φαίνεται να αρκείται ο μαθηματικός στην ύπαρξη κάποιων σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων που εξετάζει και σε κάποια ενορατική σημασία των προτάσεών του. Υπό αυτήν την έννοια έχει δίκιο ο Bourbaki, όταν ισχυρίζεται ότι, κάτω από κάποιες προϋποθέσεις, οι δομές είναι το μοναδικό αντικείμενο των Μαθηματικών.

'Ομως, αυτός ο προσδιορισμός του αντικειμένου των Μαθηματικών, αποδεικνύεται ανεπαρκής, όταν αναρωτιόμαστε πως δημιουργούνται νέες δομές, από που προέρχονται οι δομές, τι είναι δομές, τι σημασία έχουν, γενικά γιατί ασχολούμαστε μ' αυτές. Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε σ' αυτές τις ερωτήσεις.

Η βασική μας θέση είναι ότι όλες οι αφηρημένες μαθηματικές δομές, είναι σε τελευταία ανάλυση, προϊόντα αφαίρεσης από κάτι πραγματικό. 'Ετσι το πρόβλημα των αντικειμένων της μαθηματικής επιστήμης, γίνεται ένα πρόβλημα της διαλεκτικής σχέσης μεταξύ του γνωρίζοντος υποκειμένου και της αντικειμενικής πραγματικότητας. 'Εχουμε και άλλη φορά τονίσει ότι δεν θα πρέπει αυτή η αντίθεση να θεωρηθεί απολύτως, κυρίως για τον λόγο ότι η σχέση αυτή ένεκα της πρακτικής δράσης του ανθρώπου στην ιστορική, την κοινωνική και επομένως και την επιστημονική διαδικασία, συνεχώς μεταβάλλεται· Η σχέση αυτή μεταβάλλεται ακόμη και από το γεγονός ότι ο άνθρωπος είναι ένα μέρος της χωρο-χρονο-υλικής πραγματικότητας.

Στην διάρκεια της εξέλιξης της ζωής, αναπτύχθηκαν μαζί με τα κεντρικά νευρικά συστήματα των ανωτέρων οργανισμών και σε συσχέτιση με την ανάπτυξη των αισθητηρίων οργάνων, σύνθετα υλικά συστήματα τα οποία είναι σε θέση, να απεικονίζουν, κατά τρόπο που δεν ξέρουμε ακόμη πως λειτουργεί, την κατάσταση του υλικού κόσμου, να μετασχηματίζουν τις πληροφορίες που συλλέγουν και να τις μετατρέπουν σε αντίστοιχη συμπεριφορά. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι ένα από τα πιο τελειοποιημένα τέτοια συστήματα. 'Ετσι ο άνθρωπος με τον εγκέφαλο που διαθέτει είναι σε θέση στην κοινωνική διαδικασία της πρακτικής και θεωρητικής αντιμετώπισης της πραγματικότητας, να αποκτά, από τις εποπτικές εμπειρίες του, έννοιες με τη διαδικασία της αφαίρεσης, να τις επεξεργάζεται κατά αφηρημένο τρόπο και να χρησιμοποιεί τις νέες γνώσεις για την αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των πρακτικών προβλημάτων. Σχετικά με το πως από την επεξεργασία των εντυπώσεων, που μας δίνουν οι αισθήσεις, φτάνουμε στην αφηρημένη σκέψη, δεν ξέρουμε και πολλά πράγματα (ιδέ (13)). Οπωσδήποτε θα πρέπει να δει κανείς την ανάπτυξη της αφαιρετικής ικανότητας του ανθρώπου, σε συσχετισμό με την ανάπτυξη της κοινωνικής επικοινωνίας μέσω της γλώσσας, και σε συσχετισμό με την προσπάθεια επιβίωσης μέσω της εργασίας.

Η μέσω των αισθητηρίων οργάνων εμφανιζόμενη στην αντίληψή μας και στη σκέψη μας εικόνα της πραγματικότητας δεν εμφανίζεται σαν ένα χάος, αλλά κατορθώνουμε στη ροή των παραστάσεων να αναγνωρίζουμε σχετικά ευσταθείς σχέσεις και να τις κάνουμε αντικείμενο της σκέψης μας. Αυτό το γεγονός νομίζουμε ότι πολύ όμορφα το εκφράζει, αν και δεν το εξηγεί, ο R. Thom στο κεφάλαιο «η διαδοχή των μορφών» του βιβλίου του που αναφέρεται στη δομική σταθερότητα και μορφογένεση: «΄Ενα από τα κεντρικά προβλήματα που τίθενται στο ανθρώπινο πνεύμα είναι το πρόβλημα της διαδοχής των μορφών. Ανεξάρτητα από το σε τι συνίσταται η ουσία της πραγματικότητας — υπό την προϋπόθεση ότι έχει έννοια μια τέτοια έκφραση — δεν μπορεί να αμφισβητηθεί το γεγονός ότι ο κόσμος δεν είναι ένα χάος· αναγνωρίζουμε σ' αυτόν όντα, αντικείμενα, πράγματα, τα οποία χαρακτηρίζουμε με λέξεις. Αυτά τα όντα ή πράγματα είναι μορφές (Formen), είναι δομές, οι οποίες έχουν μια ορισμένη ευστάθεια (Stabilität)· καταλαμβάνουν ένα ορισμένο μέρος του χώρου και έχουν μια ορισμένη χρονική διάρκεια. Πέρα από αυτό, μπορούμε και αναγνωρίζουμε ένα αντικείμενο σαν ένα και το αυτό, αν και το αντιλαμβανόμαστε από πολλές σκοπιές. Η αναγνώριση ενός αντικειμένου σαν ένα και το αυτό, στις πάρα πολλές μορφές που αυτό εμφανίζεται, θέτει ένα πρόβλημα, το κλασικό πρόβλημα της έννοιας, το οποίο απ' ότι μου φαίνεται μόνο η μορφολογική ψυχολογία το είδε από τη γεωμετρική σκοπιά, δηλαδή από μια σκοπιά η οποία επιτρέπει μια επιστημονική περιγραφή του.

Αν δεχθούμε, όπως μας υπαγορεύει η απλοϊκή (naiv) εποπτεία, ότι υπάρχουν πράγματα, αντικείμενα στον εξωτερικό κόσμο, ότι δηλαδή αυτά δεν είναι κατασκευάσματα των αισθήσεών μας, τότε θα πρέπει να συμφωνήσουμε ότι το σύμπαν παρουσιάζει την εικόνα μιας αέναης κίνησης, της δημιουργίας, ανάπτυξης και καταστροφής των μορφών. Ο σκοπός κάθε επιστήμης είναι να προλέγει και όπου είναι δυνατόν να επεξηγεί την εξέλιξη αυτών των μορφών».

Ότι ειπώθηκε εδώ για κάθε επιστήμη, ισχύει και για τα Μαθηματικά. Και στα Μαθηματικά η εξέλιξη του πως αντιλαμβανόμαστε την ζωντανή πολλαπλότητα των μορφών, οδηγεί μέσω της αφαίρεσης στην επιστημονική ανάπτυξη των ιδεών και τελικά στην εφαρμογή αυτών (των ιδεών) στην πράξη. Σχετικά με το σε τι συνίσταται η ιδιαιτερότητα των Μαθηματικών είναι δύσκολο να γράψει κανείς τίποτε άλλο, απ' το να παραπέμψει στην ολότητα του συστήματος των μαθηματικών εννοιών και θεωριών, να προβάλλει μερικά ιδιαίτερα σημαντικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής μεθόδου, έτσι όπως προσπαθούμε να κάνουμε και εμείς σ' αυτή την εργασία.

Και στα Μαθηματικά η αφαίρεση επιτυγχάνεται εξετάζοντας την πραγματικότητα, μόνο από κάποια ορισμένη σκοπιά. Όμως η αφαίρεση που κάνουν τα Μαθηματικά, ως προς τη σκοπιά αυτή, είναι σε πολύ υψηλότερο επίπεδο απ' ότι στις άλλες επιστήμες, και τα συστήματα εννοιών που αποκτώνται με την αφαίρεση αυτή τα διαπραγματεύονται τα Μαθηματικά με μεγαλύτερη αυστηρότητα απ' ότι κάθε άλλη επιστήμη τα δικά της συστήματα εννοιών, εκτός της φορμαλιστικής λογικής. Παλαιότερα εθεωρείτο η μαθηματική αφαίρεση συνήθως σαν αφαίρεση που αναφερόταν σε ποσοτικές σχέσεις και σε σχέσεις του χώρου. Η κατανόηση τέτοιων σχέσεων ήταν πάρα πολύ χρήσιμη και το μεγαλύτερο μέρος των Μαθηματικών, μέχρι τον προηγούμενο αιώνα, αναφερόταν σε τέτοιου είδους σχέσεις. Βασικά όμως μπορεί η μαθηματική αφαίρεση να αναφερθεί σε όλες τις περιοχές σχέσεων, στις οποίες οι προτάσεις, που έχουν ενδιαφέρον, εμπεριέχονται έμμεσα σε ορισμένες προτάσεις που αναφέρονται σε μερικές βασικές σχέσεις. Αυτό θα μπορούσε να το πει κανείς απλούστερα ως εξής: μαθηματική αφαίρεση πραγματοποιείται σε όλες τις περιοχές σχέσεων στις οποίες μπορούμε να αντιληφθούμε μια μαθηματική δομή.

Βασικά, αν προς στιγμήν παραβλέψουμε τον βαθμό και την ακρίβεια της αφαίρεσης, τότε δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ των Μαθηματικών και της επιστημονικής σκέψης γενικά. Σχετικά γράφει ο Hegel: «τα διάφορα αντικείμενα βρίσκονται σε αλληλοσυσχέτιση μέσω των ιδιοτήτων τους· η ιδιότητα είναι ακριβώς η αλληλοσυσχέτιση, και το αντικείμενο δεν είναι τίποτε άλλο από τις ιδιότητές του...» ((16) τόμος IV σελίδα 133). Ακριβώς κατά τον ίδιο τρόπο βλέπουν τα Μαθηματικά τα αντικείμενά τους. Κατά την αφαίρεση κρατούν μόνο τις ουσιαστικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των αντικειμένων και παραβλέπουν όλα τα άλλα. Συγκεντρώνουν κάθε φορά την ιδιαίτερη μορφή αυτών των σχέσεων σε δομές, των οποίων η ανάπτυξη αντιστοιχεί στην ανάπτυξη των αντιστοίχων πραγματικών σχέσεων και έτσι γίνεται δυνατή η διατύπωση προβλέψεων. Εάν η αφαίρεση, εάν η ανάπτυξη της θεωρίας, είναι σύμφωνη με την πραγματικότητα, τότε μπορεί η θεωρία να εφαρμοστεί στην πράξη, γίνεται λοιπόν ένα εργαλείο στα χέρια του ανθρώπου για την κατανίκηση της πραγματικότητας. Δηλαδή τελικά μέσω της πράξης επιβεβαιώνεται η ορθότητα της θεωρίας και καταξιώνεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών.

Εδώ στην αφαίρεση από την αντικειμενική πραγματικότητα βρίσκεται και η αρχή των δομών, η σημασία τους. Εκείνοι οι οποίοι δεν βλέπουν αυτή τη σημασία και επιμένουν, ότι η ισχύς της αξιωματικής μεθόδου έγκειται στο ότι παραβλέπει κάθε τι που δεν περιέχεται στα αξιώματα, δεν αντιλαμβάνονται το διαλεκτικό χαρακτήρα της διαδικασίας, ο οποίος συνίσταται στο ότι ακριβώς η παράλειψη της συγκεκριμένης σημασίας κατά τη διαδικασία της αφαίρεσης περιέχει μέσα της μια ακόμη μεγαλύτερη δυνατότητα για την αντιμετώπιση της πραγματικότητας.

Η διαδικασία της αφαίρεσης, αφού ξεκινήσει από την πραγματικότητα δεν παραμένει στην περιοχή της αφηρημένης σκέψης αλλά επιστρέφει πάλι στην πραγματικότητα. Κάθε μαθηματικός γνωρίζει ότι αφηρημένες θεωρίες οι οποίες ξεκίνησαν από τη διαπραγμάτευση ενός συγκεκριμένου (πραγματικού) προβλήματος, κατόπιν εφαρμόζονται συχνά σε άλλα εντελώς διαφορετικά προβλήματα τα οποία δε φαίνεται να έχουν καμία σχέση με το αρχικό πρόβλημα.

Στη διαδικασία της μαθηματικής αφαίρεσης υπάρχουν βαθμίδες. Κατ' αρχήν υπάρχει μια ας την πούμε «πρωτογενής» (primär) αφαίρεση. Στη βαθμίδα αυτή ξεκινώντας από δισεκατομμύρια φορές επαναλαμβανόμενες εμπειρίες, που αποκτήθηκαν σε μια περιοχή της πραγματικότητας, φτάνουμε στις έννοιες που περιγράφουν αυτή την περιοχή και τέλος στους κανόνες για την απεικόνιση της μορφής των σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων αυτής της περιοχής σε ένα σύστημα αξιωμάτων, από το οποίο ξεκινώντας παράγουμε μετά νέες προτάσεις. Π.χ. κατά τον τρόπο αυτό περιγράφτηκε στην αρχαιότητα, με το σύστημα αξιωμάτων της ευκλείδιας γεωμετρίας, ένα ορισμένο μέρος των εμπειριών που είχαν αποκτηθεί στη γεωμετρία.

Όμως κατά την εξέλιξή τους δεν παραμένουν τα Μαθηματικά σ' αυτή την «πρωτογενή» αφαίρεση. Με μια εναλλαγή μεταξύ παραγωγής και επαγωγής, μεταξύ αφηρημένης ανάπτυξης των ήδη υπαρχουσών θεωριών και επεξεργασίας συγκεκριμένων παραδειγμάτων και προβλημάτων από την πραγματικότητα, κερδίζονται νέες εμπειρίες από τις οποίες ξεκινάει μια νέα διαδικασία αφαίρεσης και φτάνουμε σε νέες πιο αφηρημένες έννοιες και αναπτύσσονται νέες θεωρίες. Εδώ πρόκειται για εμπειρία υψηλότερου επιπέδου, για εσωμαθηματική εμπειρία, δηλαδή για μια εμπειρία που αναφέρεται στην εξέλιξη της ανθρώπινης σκέψης. Αυτό το γεγονός οδήγησε μερικές φορές και στον ισχυρισμό ότι τα Μαθηματικά είναι η εμφάνιση των νόμων της ανθρώπινης σκέψης. Και αυτός ο μονόπλευρος ισχυρισμός είναι επακόλουθο της μη κατανόησης του διαλεκτικού χαρακτήρα της σχέσης μεταξύ υποκειμένου και αντικειμένου, του γεγονότος ότι ο άνθρωπος μπορεί και μεταθέτει τις εμπειρίες που αποκτά από την αλληλεπίδραση με την πραγματικότητα, στα υψηλότερα επίπεδα της διανόησης του. Και από εδώ κατανοούμε καλύτερα και το γεγονός ότι με τη «δευτερογενή» (Sekundäre) διαδικασία αφαίρεσης αναπτύσσεται συνεχώς η πρωτογενής αφαιρετική ικανότητα, η δε πρωτογενής αφαίρεση δεν σταματάει αλλά πραγματοποιείται συνεχώς. Ακριβώς η υψηλού επιπέδου αφηρημένη έννοια της συνολοθεωρητικής δομής, επέτρεψε την πραγματοποίηση της πρωτογενούς αφαίρεσης σε όλη της την έκταση.

Η θεωρία που αποκτάται από εσωμαθηματικές εμπειρίες εξακολουθεί να απεικονίζει, όμως έμμεσα, την πραγματικότητα. Παρόλα αυτά, το αποτέλεσμα της πραγματοποιούμενης, σε όλο και υψηλότερα επίπεδα αφαίρεσης, «δεν είναι μόνο μια αφηρημένη γενικότητα, αλλά μια γενικότητα η οποία εμπεριέχει τον πλούτο της ιδιαιτερότητας, της ατομικότητας, του μεμονωμένου» ((19) σελίδα 91).

Η σωστή αφαίρεση κρατάει το ουσιώδες περιεχόμενο των γνώσεων που αποκτήθηκαν, εξετάζοντας από κάποια σκοπιά, μια ορισμένη περιοχή. Και παρ' όλο ότι αυτή πραγματοποιείται σε ένα υψηλότερο επίπεδο, εντούτοις, δεν απομακρύνεται περισσότερο από την πραγματικότητα, μα μέσω αυτής της υψηλού επιπέδου αφαίρεσης, πλησιάζει η γνώση μας περισσότερο την αντικειμενική αλήθεια, κατανοούμε την πραγματικότητα σε μεγαλύτερο βάθος, οι ιδέες μας γίνονται αληθινότερες.

Ίσως το καλύτερο παράδειγμα για τη σύνθετη διαδικασία της αφαίρεσης και της μέσω αυτής βαθύτερης κατανόησης της πραγματικότητας, είναι η εξέλιξη της έννοιας του χώρου. Η πρώτη συγκέντρωση μέρους των παραστάσεων που είχαμε για το χώρο, σε μια μαθηματική θεωρία, ήταν η ευκλείδιος γεωμετρία, η οποία δημιουργήθηκε από τις περιορισμένες εμπειρίες που αποκτήθηκαν από τη μέτρηση αγρών, από κατασκευές στο χώρο, από την αστρονομία. Για τα σημερινά μέτρα της νόησής μας η γεωμετρία αυτή ήταν μια προφανής, απλή εξιδανίκευση. Όμως από ιστορικής πλευράς ήταν το πρώτο φανταστικό κατόρθωμα της ανθρώπινης σκέψης. Ο χαρακτήρας της αφαιρετικής διαδικασίας, η σχετικότητα των εννοιών του χώρου και του χρόνου που αποκτήθηκε μέσω αυτής, συνειδητοποιήθηκε τόσο λίγο από τους μαθηματικούς της εποχής εκείνης, μα και μέχρι τον περασμένο αιώνα, ώστε να δεχθούν απλώς σαν κάτι αυτονόητο την ταύτιση αυτής της ιστορικά πρώτης έννοιας του χώρου με τον αντικειμενικό χώρο.

Η εξέταση της ανεξαρτησίας του αξιώματος των παραλλήλων της ευκλείδιας γεωμετρίας η οποία στην αρχή του περασμένου αιώνα, στην εποχή του Gaub, οδήγησε στην κατασκευή των μη ευκλείδιων γεωμετριών από τους Bolyai και Lobatschewski, και έτσι στην ανάπτυξη της σχετικότητας των εννοιών που είχαμε για το χώρο, που μας οδήγησε ακόμη σε μια βαθύτερη κατανόηση του πώς με τη μαθηματική αφαίρεση αποκτούμε βαθύτερη γνώση της πραγματικότητας, ήταν ουσιαστικά μια εσωμαθηματική εξέλιξη.

Οι μεμονωμένες μαθηματικές έννοιες, ακόμη και οι μεμονωμένες θεωρίες, είναι μόνο τα προσχέδια μιας δυνατής απεικόνισης, μιας περιοχής της πραγματικότητας ή ακόμη ίσως βήματα μιας μαθηματικής διαδικασίας η οποία θα μπορούσε να οδηγήσει στη κατασκευή μοντέλων. Η ολότητα των μαθηματικών εννοιών και θεωριών, η οποία πηγάζει από την πραγματικότητα και γυρίζει πάλι πίσω σ' αυτή, είναι εκείνη που περιέχει την αλήθεια της συμβολής των Μαθηματικών στην κατανόηση της πραγματικότητας. Και ακριβώς εκείνο που προάγει τη γνώση, είναι η συσχέτιση και η αλληλεπίδραση μεταξύ τους όλων των περιοχών των Μαθηματικών, καθώς και η συσχέτιση και αλληλεπίδραση των Μαθηματικών με τις άλλες περιοχές της ανθρώπινης σκέψης. Έτσι με τη γεωμετρία του Riemann αποκτήθηκε μια βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του χώρου, απ' ότι με την ευκλείδια γεωμετρία, διότι στη γεωμετρία του Riemann συγχωνεύτηκαν τα πιο διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία και εξελίξεις. Τα πιο σημαντικά στοιχεία της εξέλιξης η οποία οδήγησε στην γεωμετρία του Riemann είναι τα παρακάτω:

(i) η σε βάθος κατανόηση της μαθηματικής περιγραφής του χώρου, η οποία προέκυψε από την εξέλιξη της ευκλείδιας γεωμετρίας στις μη ευκλείδιες γεωμετρίες και από τις αντιπαραθέσεις με τις φιλοσοφικές απόψεις τις σχετικές με την έννοια του χώρου και κυρίως με τις απόψεις του Kant για το χώρο.

(ii) αφορμές από την πράξη και κυρίως οι εργασίες του Gauss στην αστρονομία και τη γεωδαισία, τις οποίες διεξήγαγε αυτός την ίδια εποχή που έκανε και τις θεμελιώδεις έρευνες του στη θεωρία επιφανειών,

(iii) η ανάπτυξη άλλων μαθηματικών θεωριών όπως π.χ. της από καιρού υπάρχουσας διαφορικής γεωμετρίας.

(iv) οι εμπειρίες που είχαν αποκτηθεί στην Ανάλυση στα περισσότερα από 200 χρόνια από την εποχή της δημιουργίας της. Ήδη στη δημιουργία της Ανάλυσης είχαν υπεισέλθει ένα πλήθος διαφορετικοί παράγοντες, όπως η ενασχόληση των μαθηματικών της αρχαιότητας και της αναγέννησης με τις διαδικασίες του ορίου, οι εργασίες της σχολαστικής φιλοσοφίας γύρω από τις διαλεκτικές αντιθέσεις πεπερασμένο - άπειρο, διακεκριμένο - συνεχές, η συνένωση αλγεβρικών και γεωμετρικών μεθόδων κατά την αναγέννηση, το γενικό φιλοσοφικό ενδιαφέρον των ερευνητών εκείνης της εποχής, ιδιαίτερα του Leibnitz, και τέλος πιο πολύ απ' όλα η περιγραφή της κίνησης των σωμάτων στο χώρο από τη μηχανική του Newton, η οποία συγκέντρωσε σε μια θεωρία τα αποτελέσματα της φυσικής και της αστρονομίας της εποχής του Kepler, και η οποία ανταποκρινόταν στις τεχνικές ανάγκες της εποχής της.

(v) η μεγαλοφυία του Bernahrd Riemann, η οποία επηρέασε αποφασιστικά την ανάπτυξη όλων των Μαθηματικών.

Η βασική έννοια αυτής της γεωμετρίας, η οποία (έννοια) είναι κατάλληλη για την περιγραφή του χώρου, είναι η έννοια της «πολλαπλότητας - Riemann» (Riemannsche Mannigfaltigkeit). Κατ' αρχήν η πολαπλότητα - Riemann είναι ένα n-διάστατο συνεχές το οποίο τοπικά μοιάζει με τον συνήθη n-διάστατο χώρο R^n. Το συνεχές αυτό το ονομάζει ο Riemann n-διάστατη πολλαπλότητα. Ακόμη δέχεται ο Riemann ότι γιαυτή την πολλαπλότητα ορίζεται τι σημαίνει διαφορίσιμη (defferenzierbar) συνάρτηση επί της πολλαπλότητας, δηλαδή με τη σημερινή ορολογία δέχεται ο Riemann ότι αυτή η πολλαπλότητα έχει διαφορίσιμη δομή (differenzierbare struktur). Ο ολικός χαρακτήρας (der globale charakter) της πολλαπλότητας αφήνεται στον ορισμό, ο οποίος είναι πολύ γενικός, ανοικτός. Η γεωμετρία της πολλαπλότητας προσδιορίζεται από ένα τοπικό μέτρο (Mab): ακριβέστερα, προσδιορίζεται από μια ευκλείδια μετρική, η οποία μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, και έχει συνεχή παράγωγο (stetigdifferenzierbar). Τα ιστορικά γεγονότα έδειξαν ότι αυτές οι ιδέες του Riemann ήταν η μαθηματική προετοιμασία για την αλλαγή που επέφερε η γενική θεωρία της σχετικότητας στην αντίληψή μας σχετικά με τις έννοιες του χώρου και του χρόνου.

Είναι πολύ ενδιαφέρον να δούμε πως ο Riemann και ο Einstein είδαν το ρόλο που έπαιξε στην εξέλιξη της γνώσης μας για τον πραγματικό χώρο, η συσχέτιση των Μαθηματικών και της Φυσικής. Γράφει λοιπόν ο Riemann στο τέλος της περίφημης πραγματείας του που αναφέρεται στις υποθέσεις στις οποίες στηρίζεται η γεωμετρία: «Η ερώτηση που αναφέρεται στο αν ισχύουν οι προϋποθέσεις της γεωμετρίας και στην περιοχή των απειροστών (im Umendlichkleinen) συνδέεται με την ερώτηση που αναφέρεται στο αίτιο των σχέσεων του μέτρου (Massverhältnisse). Στην ερώτηση αυτή, η οποία σίγουρα ανήκει στη θεωρία του χώρου, εφαρμόζεται η παραπάνω παρατήρηση κατά την οποία σε μια διακεκριμένη (diskrete) πολλαπλότητα ήδη μέσα στην έννοιά της υπάρχει και η αρχή (prinzip) των σχέσεων του μέτρου (Massverhältnisse), όμως σε μια συνεχή πολλαπλότητα θα πρέπει να προέρχεται αυτό από κάπου αλλού. Θα πρέπει λοιπόν η πραγματικότητα που βρίσκεται στο βάθος του χώρου, να σχηματίζει μια διακεκριμένη πολλαπλότητα ή θα πρέπει το αίτιο των σχέσεων του μέτρου να αναζητηθεί σε δυνάμεις που επιδρούν συνδετικά σ' αυτόν τον χώρο (bindende kräfte).

Η απάντηση στην ερώτηση αυτή θα μπορέσει τότε μόνο να βρεθεί, όταν, με αφορμη το ότι υπάρχουν γεγονότα τα οποία με την αντίληψη που έχουμε τώρα για τα φαινόμενα δεν ερμηνεύονται, προσπαθήσουμε να ανασκευάσουμε σταδιακά αυτή την αντίληψη, η οποία στηρίζεται στις εμπειρίες μας που είναι επηρεασμένες από τις απόψεις του Newton. Έρευνες σαν αυτή που κάνουμε εδώ, στις οποίες εξετάζονται οι πολύ γενικές έννοιες, μπορούν να χρησιμεύσουν μόνο στο να μην παρεμποδισθεί, λόγω της περιορισμένης έκτασης των γνωστών εννοιών, αυτή η εργασία και να μην ανακοπεί, λόγω προκαταλήψεων, η πρόοδος στην κατανόηση της συσχέτισης των πραγμάτων. Αυτό μας οδηγεί στην περιοχή μιας άλλης επιστήμης, στην περιοχή της φυσικής, και το πνεύμα της σημερινής εργασίας μας δεν μας επιτρέπει να πούμε περισσότερα για το θέμα αυτό».

Η εξέλιξη της φυσικής, την οποία προμάντευσε ο Riemann, πραγματοποιήθηκε με τη γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein. Η θεωρία της σχετικότητας συνενώνει το χώρο με το χρόνο σε ένα 4-διάστατο χωρο-χρονικό συνεχές, σε μια πολλαπλότητα η οποία έχει μια Lorentz-μετρική, η οποία μετρική σχετίζεται με την κατανομή της ύλης στο χώρο. Ο Einstein, του οποίου η θεωρία μας οδηγεί σε μια νέα και βαθύτερη κατανόηση της πραγματικότητας του χώρου, του χρόνου και της ύλης, γράφει για τα Μαθηματικά της θεωρίας του τα εξής (11): «αυτός ο γενικευμένος τανυστικός λογισμός αναπτύχθηκε από τους μαθηματικούς πολύ πριν από τη θεωρία της σχετικότητας. Αρχικά ο Riemann επεξέτεινε τις ιδέες του Gauss και σε συνεχή τυχαίας διάστασης· αυτός (ο Riemann) με προφητική διαίσθηση προέβλεψε τη σημασία που θα είχε για τη φυσική αυτή η επέκταση...».

Δεν υπάρχει κανένα καλύτερο παράδειγμα από το προηγούμενο, για το τι είναι τελικά τα Μαθηματικά: τα Μαθηματικά είναι ένας τρόπος (Aspekt) κατανόησης της πραγματικότητας.

Σχέση θεωρίας και πράξης

Ακόμη μια βασική παρατήρηση στη σχέση θεωρίας και πράξης. «Η θεωρητική γνώση θα πρέπει να αποδίδει το αντικείμενο στην αναγκαιότητά του, στις πολύπλευρες σχέσεις του, αυτό καθ' εαυτό. Αλλά η ανθρώπινη σκέψη συλλαμβάνει, κατανοεί αυτή την αντικειμενική αλήθεια της γνωστικής διαδικασίας και την κατακτά τελειωτικά, τότε μόνο όταν η έννοια για το «Αυτό καθ' εαυτό» γίνει έννοια της πράξης, δηλαδή η πράξη του ανθρώπου είναι η δοκιμή, το κριτήριο για την αντικειμενικότητα της γνώσης» (Lenin, (19)).

Η πράξη λοιπόν είναι τελικά το κριτήριο με το οποίο αποδεικνύεται η αντικειμενική ορθότητα των επιστημών. Όμως αυτό δεν σημαίνει ότι η ανάπτυξη των επιστημών προσδιορίζεται μονόπλευρα από την πράξη (ιδέ (19) σελ. 178-179, 191). Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για τα Μαθηματικά και προκύπτει άμεσα από τον τρόπο που τα Μαθηματικά ξεκινώντας από την πραγματικότητα φτάνουν στην αφαίρεση. Η πολλαπλή ανάπτυξη και η αμοιβαία συσχέτιση των μαθηματικών θεωριών οδηγεί, κάθε φορά κατά αιφνιδιαστικό τρόπο, σε βασικές προόδους που έχουν μεγάλη χρησιμότητα στις εφαρμογές, και οι οποίες (πρόοδοι) δεν ήταν δυνατό να προβλεφθούν ούτε και ήταν δυνατό να τις προκαλέσει κανείς επηρεάζοντας κατάλληλα τις κατευθύνσεις των ερευνών. Η παραπάνω άποψη προφανώς δεν δικαιολογεί την υποκειμενική αυθαιρεσία στη μαθηματική έρευνα, μα αντιθέτως εμπεριέχει την υποχρέωση κάθε μαθηματικού να ασχολείται με ουσιαστικά προβλήματα και όχι με τυχαία. Επίσης η παραπάνω διαπίστωση δεν αποκλείει φυσικά και το γεγονός ότι και στα Μαθηματικά μπορούν να προβλεφθούν ορισμένες πρόοδοι. Και τέλος δεν αποκλείει το ότι σε μια χώρα με περιορισμένο ή ανεπαρκές ερευνητικό δυναμικό θα πρέπει η έρευνα για πρακτικούς λόγους να περιορίζεται σε ορισμένους τομείς. Για την επιλογή των τομέων θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η προβλεπόμενη χρησιμότητα των αποτελεσμάτων της έρευνας στη λύση άμεσων πρακτικών προβλημάτων της χώρας και του λαού της και όχι μόνο, όπως συχνά υποστηρίζεται, μαθηματικές απόψεις, όπως π.χ. ποια θα ήταν τα «καλύτερα» Μαθηματικά με τα οποία θα πρέπει να ασχοληθεί το ερευνητικό δυναμικό της χώρας.

Όταν από ιστορικής πλευράς εξετάζουμε τη θέση των Μαθηματικών μέσα στη γενική διαδικασία απόκτησης γνώσης από τον άνθρωπο, τότε δεν επιτρέπεται να θέλουμε να εξηγήσουμε την ανάπτυξη των Μαθηματικών στηριζόμενοι μονόπλευρα στο ρόλο των εφαρμογών. Διότι αυτό θα έδειχνε ότι δεν καταλάβαμε σωστά τη διαλεχτική σχέση μεταξύ θεωρίας και πράξης. Θα μπορούσε να μας οδηγήσει στο να επιχειρήσουμε να εξηγήσουμε την ανάπτυξη των Μαθηματικών κατά τρόπο μονόπλευρο και επιφανειακό, στηριζόμενοι στις συνθήκες και ανάγκες της κοινωνικής πραγματικότητας και της παραγωγής, πράγμα που θα ήταν τόσο λάθος όσο και το να μη δεχόμαστε την επίδραση αυτών των παραγόντων στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Μια τέτοια μη διαλεχτική θεώρηση θα μπορούσε να μας οδηγήσει στο να παραβλέψουμε στοιχεία τα οποία παίζουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των Μαθηματικών, και τέτοια στοιχεία είναι: η εσωτερική δυναμική, η διαλεκτική ανάπτυξη των ιδεών, η λειτουργία της ανθρώπινης δημιουργικότητας, φαντασίας, διαίσθησης, η ανάπτυξη του ανθρωπίνου πνεύματος.

Ενότητα και πολλαπλότητα.

Τελικά τα Μαθηματικά απεικονίζουν την πραγματικότητα και γιαυτό αντικατοπτρίζεται σ' αυτά η ενότητα και πολλαπλότητα των φαινομένων. Η ενότητα, αυτό το τονίσαμε αρκετές φορές, αντιστοιχεί στην γενική συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ όλων των μαθηματικών θεωριών. Η πολλαπλότητα αντιστοιχεί στην πολλαπλότητα των εννοιών, προβλημάτων και θεωριών. Αυτό οδηγεί αναγκαστικά στη δημιουργία εξειδικευμένων τομέων, κάτι που άρχισε να εμφανίζεται τουλάχιστον από τον προηγούμενο αιώνα. Αυτή η δημιουργία εξειδικευμένων τομέων, η οποία παρατηρείται σε όλες τις επιστήμες, εμφανίζεται σε μεγάλο βαθμό στα Μαθηματικά και αυτό οφείλεται στην δυνατότητα μα και στην τάση που υπάρχει στα Μαθηματικά, μεμονωμένα στενά περιορισμένα προβλήματα να εξετάζονται αυτοτελώς και να εμφανίζονται σαν ειδικοί τομείς στους οποίους μελετάται μια εντελώς ειδική δομή.

Για να πάρουμε μια ιδέα για το πλήθος των ειδικών τομέων έρευνας που υπάρχουν σήμεα στα Μαθηματικά, θεωρείται σκόπιμο να καταφύγουμε στη βοήθεια του MOS - συστήματος ταξινόμισης (21) (MOS-Klassifikationssystem). Εκεί δεν χωρίζονται τα Μαθηματικά στους γνωστούς μας κλάδους ΄Αλγεβρα, Γεωμετρία και Ανάλυση, ακόμη ούτε στους τομείς που διαμορφώθηκαν από τον περασμένο αιώνα όπως είναι π.χ. θεωρία αριθμών, μιγαδικές συναρτήσεις, διαφορική γεωμετρία, θεωρία ομάδων κλπ. αλλά σε 60 τομείς από τους οποίους ο καθένας χωρίζεται κατά μέσο όρο σε 6 υποτομείς στους οποίους πάλι ο καθένας χωρίζεται κατά μέσο όρο σε 6 υποτομείς. Ακόμη και αυτός ο ακραίος χωρισμός σε τομείς δεν είναι τόσο λεπτός ώστε να μπορεί να περιγραφεί με ακρίβεια ο τομέας εργασίας μερικών πολύ εξειδικευμένων ερευνητών. Μια επιστήμη με μια τέτοια τάση για διαφοροποίηση θα έπρεπε, χωρίς μια αντίστοιχη τάση για συνένωση να οδηγούσε πολύ σύντομα ad absurdum (στον παραλογισμό). Και υπάρχουν βέβαια στα Μαθηματικά πλήθος τάσεων για ενοποίηση.

Μια άποψη αυτής της ενοποίησης είναι η αφαίρεση, είναι η ανάπτυξη ενοποιητικών εννοιών όπως «συνάρτηση», «ομάδα», «σύνολο», «τοπολογία», «κατηγορία» (Kategorie), Funktor. Στην τάση για ενοποίηση ανήκει και η συμπερίληψη ολοκλήρων συμπλεγμάτων ορισμών, κατασκευών και συμπερασμάτων σε μια ενοποιητική θεωρία. Αυτή η διαδικασία, η οποία μπορεί να αποβλέπει στην αξιωματική παράσταση μιας περιοχής, ή ακόμη μόνο στη συνοπτική παρουσίασή της, ή ακόμη στη διασαφήνιση των βασικών προβλημάτων της, είναι τόσο συχνή στα Μαθηματικά που περιττεύει να αναφέρουμε εδώ σχετικά παραδείγματα.

Από τον Bourbaki τονίστηκε ότι ο βασικός σκοπός του είναι η ενοποίηση των Μαθηματικών μέσω μιας ιεραρχίας των δομών.

Μια άλλη μορφή ενοποίησης των Μαθηματικών είναι η συνένωση στοιχείων διαφορετικών μεταξύ τους θεωριών, και συχνά θεωριών με αντίθετο χαρακτήρα, με σκοπό την απόδειξη ενός νέου με μεγάλο βάθος συμπεράσματος, ή τον σχηματισμό μιας νέας θεωρίας. Και ακριβώς από τέτοιου είδους προσπάθειες ενοποίησης των μαθηματικών ξεπήδησαν οι πιο σημαντικές πρόοδοι των Μαθηματικών όπως π.χ. η Ανάλυση από στοιχεία της Αλγέβρας και της Γεωμετρίας.

Ένα άλλο σπουδαίο στάδιο της ενοποίησης είναι η κάθε φορά νέα ανακάλυψη σχέσεων μεταξύ εντελώς διαφορετικών περιοχών. Σχεδόν πάντα μια τέτοια ανακάλυψη σημαίνει την αρχή μιας νέας γόνιμης ανάπτυξης και μιας βαθύτερης κατανόησης των μαθηματικών. Νομίζουμε ότι αυτό το φαινόμενο δεν μπορεί να έχει άλλη έννοια από το ότι στα Μαθηματικά αντικατοπτρίζεται η πολύμορφη ενότητα της πραγματικότητας, ότι μεγάλοι μαθηματικοί διαισθάνονται κατά προσέγγιση την ουσία αυτού του γεγονότος, ότι η διαίσθησή τους κατευθύνει τις ιδέες τους στην αναζήτηση σχέσεων, ότι με τον αναλογικό τρόπο σκέψης ανακαλύπτονται όλο και περισσότερες σχέσεις μέχρις ότου τελικά αντιλαμβανόμαστε, τουλάχιστον εν μέρει την συσχέτιση (Σ.Μ. που υπάρχει μεταξύ μαθηματικών εννοιών, θεωριών κλπ. οι οποίες αρχικά φαινόντουσαν ξένες μεταξύ τους).

Τέλος το γεγονός ότι συχνά δεν φαίνεται δυνατό να μπορεί να ενταχθεί μια μαθηματική εργασία κατά μονοσήμαντο τρόπο σε ένα ειδικό τομέα έρευνας, είναι μια ένδειξη του γεγονότος ότι η μαθηματική εξειδίκευση περιέχει μέσα της το σπέρμα της άρσης της.

Για όλους αυτούς τους λόγους θα πρέπει οι μαθηματικοί να ενημερώνονται και για τις νέες μαθηματικές προόδους που σημειώνονται έξω από τον ειδικό τομέα στον οποίο εργάζονται, και για να γίνει αυτό χρειάζονται οι διάφορες μορφές επικοινωνίας. Στις μορφές επικοινωνίας ανήκουν και οι διεθνείς επιστημονικές ανταλλαγές. Σε όσες χώρες δεν είναι δυνατές, για πολιτικούς λόγους, τέτοιες επιστημονικές ανταλλαγές, βλάπτεται κατά κανόνα η επιστημονική ανάπτυξή τους. Και μόνο για το λόγο αυτό θα πρέπει οι επιστήμονες, ανάλογα με τις δυνατότητές τους, να εργασθούν για τη δημιουργία ειρηνικών και διεπόμενων από πνεύμα συνεργασίας διεθνών σχέσεων.

Παρόλες τις ενοποιήσεις δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι η τάση εξειδίκευσης, η οποία είναι τόσο ισχυρή όπως και η τάση ενοποίησης, είναι μια από τις βασικές τάσεις της μαθηματικής επιστήμης, και η κατανομή εργασίας, η οποία προκύπτει από την τάση αυτή, από κάποιο ορισμένο στάδιο της έρευνας και πέρα, δε μπορεί να αντιμετωπισθεί σε ατομικό επίπεδο. Η ενότητα της μαθηματικής επιστήμης μπορεί πια να εξασφαλισθεί μόνο με συλλογική εργασία και κυρίως με επαρκή επικοινωνία μεταξύ των μαθηματικών.

Το πρόβλημα της κατανομής εργασίας μέσα στα Μαθηματικά είναι λοιπόν σοβαρό, όμως πολύ σοβαρότερο είναι το πρόβλημα κατανομής εργασίας μεταξύ των Μαθηματικών και των άλλων θετικών επιστημών, διότι εδώ υπάρχει ο μεγάλος κίνδυνος να ξεκόψουν οι μαθηματικές θεωρίες από την πραγματικότητα, υπάρχει ο κίνδυνος της «τεχνητής» αφαίρεσης, η οποία δεν μπορεί να επιβεβαιωθεί με το κριτήριο της πράξης. Διαφορές στις μεθόδους, στον τρόπο σκέψης και στη γλώσσα, άγνοια των εφαρμογών λόγω μη ικανοποιητικής εκπαίδευσης, εσφαλμένη στάση λόγω μη ικανοποιητικής κατανόησης της θέσης των Μαθηματικών και λόγω εσφαλμένης αγωγής, και τέλος οι επιστημονικές και γενικά οι κοινωνικές συνθήκες εργασίας, υποθάλπουν μια ακραία κατανομή εργασίας.

Μέχρι τώρα τα καταφέρνουν ακόμη μεμονωμένοι μαθηματικοί, αν και η κύρια απασχόλησή τους δεν είναι τα «εφηρμοσμένα Μαθηματικά», μέσω προσωπικών συζητήσεων με άλλους επιστήμονες καθώς και με ατομικές σπουδές τους, να γεφυρώνουν το χάσμα, και έτσι να προσφέρουν ουσιώδη μαθηματική βοήθεια σε κάποια άλλη επιστήμη. Όμως το ξεπέρασμα των αρνητικών συνεπειών αυτής της κατανομής εργασίας, είναι ένα πολυσύνθετο κοινωνικό πρόβλημα, του οποίου η λύση δεν μπορεί να βρεθεί με μεμονωμένα μέτρα όπως για παράδειγμα η εκπαίδευση των μαθηματικών. Μια ελάχιστη προϋπόθεση για την εύρεση της λύσης του, είναι να αρχίσουν να απασχολούνται οι μαθηματικοί με το θέμα της θέσης που έχουν τα Μαθηματικά μέσα στην ολότητα των ανθρωπίνων δραστηριοτήτων.

Περιεχόμενο και μορφή

Μια από τις αρχαιότερες αντιθέσεις στην ιστορία του πνεύματος είναι η αντίθεση μεταξύ περιεχομένου και μορφής. Η διάκριση μεταξύ φορμαλιστικού (τυπικού) συλλογισμού και εννοιολογικού συλλογισμού είναι φυσικά κάτι συνηθισμένο και στους μαθηματικούς. Έτσι λέμε καμιά φορά για ένα επιχείρημα, ότι αυτό είναι απλώς τυπικό, και εννοούμε με αυτή την έκφραση ότι στο επιχείρημα αυτό απλώς χρησιμοποιούνται οι λογικές σχέσεις, ενώ δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη η σημασία των εννοιών που εμφανίζονται σ' αυτό, και το χαρακτηρίζουμε λοιπόν σαν απλώς τυπικό διότι δεν βλέπουμε από την αρχή τον βαθύτερο λόγο για τον οποίο το επιχείρημα είναι σωστό. Τέτοιες εκφράσεις θα μπορούσαν να οδηγήσουν στην εντύπωση ότι μόνο η εννοιολογική σκέψη συλλαμβάνει την ουσία των πραγμάτων ενώ η φορμαλιστική (τυπική) δεν είναι κατά κάποιο τρόπο καλή. Όμως τουλάχιστον για τα Μαθηματικά σίγουρα δεν ισχύει αυτό. «Η μορφή είναι το ουσιαστικό» (Lenin, (19)).

Στα Μαθηματικά με την εννοιολογική κατανόηση των δομών, με από το περιεχόμενο κατευθυνόμενους συλλογισμούς, οδηγούμαστε στο σχηματισμό μορφών, οι οποίες τελικά περιγράφονται με συστήματα αξιωμάτων και ερευνώνται με παραγωγικούς συλλογισμούς, κατά τους οποίους δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη το περιεχόμενο. Και τα δύο στάδια αυτής της διαδικασίας, το κατασκευαστικό και το αξιωματικό, είναι εξίσου σπουδαία, και γιαυτό είναι λάθος το ότι οι πρωταγωνιστές αυτών των δύο απόψεων βρίσκονται σε ανταγωνιστική σχέση.

Κατά το στάδιο της εύρεσης κάτι καινούργιου φαίνεται να είναι πολύ σπουδαίο το συγκεκριμένο δηλαδή το στοιχείο που αναφέρεται στο περιεχόμενο. Πάντοτε τονίστηκε από πολλούς μαθηματικούς ο ρόλος παραδειγμάτων, προβλημάτων και ειδικών κατασκευών, σαν στοιχείο προόδου για τα Μαθηματικά. 'Ηδη έχουμε αναφέρει τον σπουδαίο ρόλο που έπαιξε η κατασκευή της μη ευκλείδιας γεωμετρίας. 'Εναν ίσως παρόμοιο ρόλο παίζει σήμερα η κατασκευή μη καντοριανών (nichtcantorscher) μοντέλων της θεωρίας συνόλων (9). Η κατασκευή γενικών (universellen) αντικειμένων όπως π.χ. alternierender και τανυστικών γινομένων (Tensorprodukten), Modul-χώρων, γενικών μετασχηματισμών (universellen Deformationen) κ.λ.π. ή η κατασκευή ολοκλήρων θεωριών όπως π.χ. Homotopietheorie, οι διάφορες Cohomologietheorien κ.λ.π., είναι πάντα ένα μεγάλο βήμα προς τα μπρος και πραγματοποιείται συνήθως πριν από τον αξιωματικό χαρακτηρισμό των νεοαπακτώμενων δομών. Πέρα από αυτά υπάρχουν κατασκευές που έχουν τέτοια πρωτοτυπία (Originalität), που δεν είναι δυνατόν να ενταχθούν στην ιεραρχία των δομών, και των οποίων η εμφάνιση μπορεί να εξηγηθεί μόνο σαν μια αυθόρμητη, υποκειμενική επιτυχία. Για να γίνει κατανοητό τι εννοούμε εδώ, δίνουμε παρακάτω μερικά παραδείγματα τέτοιων κατασκευών, με την ελπίδα ότι τουλάχιστον οι ασχολούμενοι με την τοπολογία θα τα καταλάβουν: Κατασκευή Thom-Pontrjagin, κατασκευή σωμάτων Henkel (Henkelkörper), Chirurgie, κατασκευή εξωτικών σφαιρών σαν δέσμη σφαιρών επί σφαιρών (Konstruktion exotischer Sphären als Sphärenbündel über Sphären) ή με συνένωση σφαιρών κατά μήκος του συνόρου τους (durch Verkleben von Kugeln längs ihres Randes), ή με την κατασκευή των Milnor και Hirzebruch ή σαν Umgebungsränder von Singularitäten. 'Ολες αυτού του είδους οι κατασκευές παρακινούν την παραπέρα ανάπτυξη της θεωρίας. Γίνονται ο πυρήνας ολοκλήρων θεωριών ή αποτελούν το υλικό για παραδείγματα, από τα οποία αναπτύσσονται νέες θεωρίες ή στα οποία δοκιμάζονται νέες θεωρίες, και συχνά είναι δυνατόν μια θεωρία να μην παρουσιάζει πια εξέλιξη όταν δεν εμφανίζονται σ' αυτήν νέες κατασκευές.

'Οπως λοιπόν κατά την εύρεση κάτι καινούργιου δίδεται μεγαλύτερη βαρύτητα στην πλευρά του περιεχομένου, έτσι και κατά το στάδιο της τακτοποίησης ανάπτυξης και παρουσίασής του, δίδεται μεγαλύτερη βαρύτητα στο φορμαλιστικό στοιχείο και στην παραγωγή. Αυτό οδηγεί στο γνωστό τρόπο παράστασης των Μαθηματικών που έχει τη μορφή: ορισμός, προτάσεις, αποδείξεις. Και αν η παρουσίαση είναι κακή, τότε δεν φαίνονται σ' αυτήν τα προβλήματα, τα παραδείγματα και οι κατασκευές, παρά μόνον η γενική υψηλή θεωρία.

Όταν κάποιος θέλει να παρουσιάσει τα Μαθηματικά του φορμαλιστικά, απ' αυτόν ζητούμε, και έχουμε αυτό το δικαίωμα, να εξηγήσει τη σημασία τους. Όταν αντίθετα κάποιος μας παρουσιάζει το περιεχόμενο των εργασιών του, τότε αυτός πρέπει να μας δείξει και την μορφή, την φορμαλιστική παρουσίασή τους, εάν βέβαια θέλει να μας αποδείξει κάτι με μαθηματική αυστηρότητα. Και το αποτέλεσμα της εννοιολογικής σκέψης κατά την έρευνα, είναι συχνά ακριβώς μια νέα μορφή: τη στιγμή που αυτή (η εννοιολογική σκέψη) φτάνει στο στόχο μετασχηματίζεται το περιεχόμενο σε μορφή - περιεχόμενο και μορφή· επαγωγή και παραγωγή, εποπτεία και αφηρημένη σκέψη, κατασκευή και αξιωματική μέθοδος, είναι στα Μαθηματικά μια αδιαχώριστη ενότητα, και την ένταση (spannung) που υπάρχει σ' αυτή την ενότητα θα πρέπει να την υπομένουν τα Μαθηματικά εάν θέλουν να παραμείνουν μια ζωντανή επιστήμη.

Και σήμερα δεν είναι αλλιώτικα απ' ότι ήταν πάντα: η αξιωματική παράσταση της γεωμετρίας από τον Ευκλείδη κορυφώνεται με μια κατασκευή την κατασκευή των πλατωνικών στερεών, τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, δωδεκάεδρο, εικοσάεδρο.

Το ειδικό και το γενικό

Ο Hegel έχει καταλήξει, ότι η εναλλαγή μεταξύ ανάλυσης και σύνθεσης καθώς και η εναλλαγή της εξέτασης του ειδικού και του γενικού, είναι χαρακτηριστικά στοιχεία της διαλεκτικής μεθόδου. Με μερικά παραδείγματα που θα παραθέσουμε παρακάτω θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι αυτός ο τρόπος σκέψης ανήκει και στις μεθόδους των μαθηματικών. Ήδη έχουμε αναφερθεί σε μια άποψη της διαλεκτικής ενότητας του ειδικού και του γενικού, όταν αναφερθήκαμε στην εναλλαγή μεταξύ θεωρίας και παραδείγματος.

Μία άλλη άποψη της διαλεκτικής ενότητας του ειδικού και γενικού είναι, το γνωστό σε όλους τους μαθηματικούς γεγονός, ότι ο μαθηματικός στηριζόμενος στις εμπειρίες που απέκτησε, κατά την ενασχόλησή του με τα μαθηματικά αντικείμενα μιας περιοχής, έχει την τάση, ορισμένα φαινόμενα που παρουσιάζονται στην περιοχή αυτή, να τα βλέπει σαν κανονικά, φυσιολογικά (normal), ενώ άλλα σαν αποκλίνοντα από την κανονικότητα. Ο αριθμός των μαθηματικών εννοιών, οι οποίες περιγράφουν κανονική συμπεριφορά των αντικειμένων, είναι πολύ μεγάλος και μάλιστα επειδή η γλώσσα έχει λίγες λέξεις για την περιγραφή της κανονικής κατάστασης, γιαυτό για τις διάφορες έννοιες χρησιμοποιούνται πάντα οι ίδιες λέξεις: ομαλό (regulär), normal, γενικό (allgemein), γενικό (generisch), Standard-, κανονικό (kanonisch), φυσικό (natürlich). Το ίδιο ισχύει και για τις λέξεις που αναφέρονται στο ειδικό: ανώμαλο (singulär), ειδικό (speziell), exzeptionell, εξωτικό (exotisch), παθολογικό (pathologisch). Αυτές οι αντιθέσεις δεν σημαίνουν κατά κανένα τρόπο μια στατική αντιπαράθεση, μα ακριβώς το αντίθετο, δηλαδή ένα δυναμικό στάδιο. ΄Ετσι π.χ. αναμένει συνήθως ο μαθηματικός, κατά την εξέταση των δομών, παρόμοια συμπεριφορά με αυτήν που ήδη γνωρίζει δηλαδή γενική, κανονική συμπεριφορά. Και πράγματι αυτή η ευρετική αρχή (heuristisches Prinzip), λόγω της ενότητας των μαθηματικών, είναι πολύ αποτελεσματική. Οι καλοί Μαθηματικοί προλέγουν συχνά, με τον τρόπο αυτό, αποτελέσματα ερευνών, των οποίων η απόδειξη χρειάζεται χρόνια για να πραγματοποιηθεί. Η πίστη στη φυσιολογική, γενική, «καλή» συμπεριφορά είναι σίγουρα «συνυπεύθυνη» για κάποιες περίφημες υποθέσεις, από τις οποίες αρκετές δεν έχουν αποδειχθεί ακόμη μέχρι σήμερα.

΄Ομως αν και ο μαθηματικός αναζητά το γενικό (allgemein), πάντα συναντά το ανώμαλο, την εξαίρεση, το παθολογικό. Και η προσπάθεια να κατανοήσει αυτό το εντελώς νέο, το ειδικό, να το εξομαλύνει και να το υπαγάγει στη γενική αρχή, είναι ένα αποφασιστικό στάδιο για την παραπέρα ανάπτυξη της επιστήμης. ΄Ετσι π.χ. από την ανακάλυψη εξωτικών σφαιρών δημιουργήθηκε η διαφορική τοπολογία, ένας από τους πιο ζωντανούς κλάδους των σημερινών Μαθηματικών. Η εναλλαγή μεταξύ ειδικού και γενικού μπορεί μάλιστα να συμπεριληφθεί σε έννοιες, κατασκευές, θεωρίες.

Ας πάρουμε σαν παράδειγμα τα ομαλά (regulär) και τα ανώμαλα (singulär) σημεία στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων ή στην αλγεβρική γεωμετρία. Τα ομαλά σημεία ενός μιγαδικού χώρου, είναι τα σημεία στα οποία ο χώρος παρουσιάζει την γενική, την απλούστερη, ας πούμε την «καλύτερη» συμπεριφορά. Τα ομαλά σημεία σχηματίζουν ένα ανοικτό πυκνό σύνολο, δηλαδή σχεδόν όλατ α σημεία του χώρου είναι ομαλά. ΄Ομως για τα ομαλά σημεία δεν μπορεί να λεχθεί τίποτε περισσότεορ από το ότι είναι ομαλά. Αντιθέτως, η εξέταση των ανωμάλων σημείων παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες και δίνει αφορμή για συνδυασμούς κάθε είδους.

Λόγω λοιπόν των δυσκολιών που παρουσιάζονται εδώ, προσπαθούμε να απλουστεύσουμε την εξέταση, και για να το πετύχουμε αυτό μετασχηματίζουμε (deformieren) κατά κάποιο τρόπο τις ανωμαλίες, ή τις τροποποιούμε ή τις ομαδοποιούμε με σκοπό, όσο είναι δυνατόν, να τις αναγάγουμε σε ομαλές περιπτώσεις. Και αυτό το κατορθώνουμε με εξαιρετικά σύνθετες κατασκευές. Οι προτάσεις, οι οποίες λένε, ότι η κατασκευή μας οδηγεί πράγματι στο στόχο μας, όπως π.χ. η πρόταση που αναφέρεται στην ύπαρξη ημιγενικών μετασχηματισμών μεμονωμένων ανωμαλιών (Existenz semiuniverseller Deformationen isolierter Singularitäten), ή η πρόταση που αναφέρεται στην ύπαρξη άρσης ανωμαλιών (Existenz der Auflösung von Singularitäten), έχουν πάρα πολύ δύσκολη απόδειξη. Η απόδειξη του Hironaka, που αναφέρεται στην άρση των ανωμαλιών, είναι μια από τις δυσκολότερες αποδείξεις που συναντάμε σε όλα τα Μαθηματικά. Στον ίδιο κύκλο προβλημάτων ανήκει και η γενική ανάπτυξη των ανωμαλιών των συναρτήσεων (universelle Entfaltung der Singularitäten von Funktionen), η οποία είναι η σημαντικότερη κατασκευή στη θεωρία καταστροφών του R. Thom. Σ' αυτήν συναντάται η αντίθεση ειδικό - γενικό με την αντίθεση ποιότητα - ποσότητα. Για το θέμα αυτό θα μιλήσουμε και παρακάτω.

Ανάλυση και σύνθεση

Όπως σε κάθε σκέψη, έτσι και στη μαθηματική σκέψη, πραγματοποιείται μια συνεχής εναλλαγή μεταξύ ανάλυσης και σύνθεσης, όταν προσπαθούμε από κάποια δεδομένα να φτάσουμε σε κάτι νέο. Με μερικά παραδείγματα θα δείξουμε ότι η εναλλαγή ανάλυσης - σύνθεσης ανήκει στις μαθηματικές μεθόδους απόδειξης και κατασκευής. Το ότι αυτό πάντα ίσχυε φαίνεται από παραδείγματα της αρχαίας γεωμετρίας και της άλγεβρας π.χ. ο διαχωρισμός χωραφιών και σχημάτων σε τρίγωνα με σκοπό τον υπολογισμό των εμβαδών τους, η ανάλυση φυσικών αριθμών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων. Ο κατάλογος παραδειγμάτων από τα σύγχρονα Μαθηματικά είναι χωρίς τέλος. Παρακάτω αναφέρουμε μια μικρή επιλογή τέτοιων παραδειγμάτων: στις βασικές πράξεις της θεωρίας συνόλων ανήκουν, ο σχηματισμός της ένωσης συνόλων, ο διαμερισμός ενός συνόλου σε υποσύνολα, η σύνθεση συναρτήσεων και η ανάλυση συναρτήσεως σε παράγοντες* (Faktorisierung), αυτή δε η ανάλυση συναρτήσεως σε παράγοντες είναι μια από τις βασικές έννοιες της θεωρίας των κατηγοριών (Kategorientheorie).

Στην τοπολογία και στη γεωμετρία παρατηρούνται πολλά είδη διαμερισμού (Zerlegung) και σύνθεσης, π.χ. διαμερισμός σε κλάσεις ισοδυναμίας (Faserungen), χωρισμός και συνένωση χώρων (Zerschneiden und Zusammenkleben von Räumen), αναλύσεις σε παράγοντες (Produktzerlegungen), Blätterungen, Triangulierungen, FIltrierungen, Stratifikationen, διαμερισμοί σε συνεκτικές συνιστώσες (Zerlegungen in Zusammenhangskomponewten), Zellenzerlegung, Henkelkörperzerlengungen, κάλυψη μιας πολλαπλότητας με περιοχές συντεταγμένων (überdeckung einer Mannigfaltigkeit mit koordinatenumgebungen), Orbit-διαμερισμοί (Orbitzerlengungen), διαμερισμός του χώρου φάσεων δυναμικών συστημάτων σε ευσταθείς πολλαπλότητες (Zerlegung des Phasenraums dynamischer Systeme in stabile Mannigfaltigkeiten), διαμερισμός της μονάδος (Zerlegung der Eins) κτλ., κτλ. χωρίς τέλος.

Και ο ειδικός στην άλγεβρα θα μπορούσε να κάνει μια αντίστοιχη λίστα χωρίς τέλος π.χ. εδώ συναντάμε κάθε είδους σειρές σύνθεσης (Kompositionsreihen), αναλύσεις σε προσθετέους ή παράγοντες (Zerlegungen in Summanden oder Faktoren), η ανάλυση αλγεβρικών Varietäten σε μη απλοποιήσιμες συνιστώσες (die Zerlegung algebraischer Varietäten in irreduzible komponenten και πιθανώς πολλά ακόμη παραδείγματα τα οποία ξέρουν μόνο οι ειδικοί στην άλγεβρα).

Τέλος η Ανάλυση είναι ανάλυση και σύνθεση par excellence. Ανάλυση Fourier, αρμονική ανάλυση και φασματική ανάλυση τελεστών (harmonische Analyse und Spektralzerlegung von Operatoren), είναι μόνο μερικά στην τύχη διαλεγμένα παραδείγματα.

Ανάλυση - σύνθεση, είναι η βασική αρχή πολλών αποτελεσμάτων ταξινόμισης σε κλάσεις (Klassifikationsresultate): τα προς ομαδοποίηση αντικείμενα αναλύονται στα βασικά συστατικά τους, από τα οποία βρίσκουμε ως προς ποια στοιχεία (ως προς ποια γνωρίσματα) μπορεί να γίνει η ομαδοποίηση. Για να δείξουμε δε ότι ένα από τα αρχικά αντικείμενα έχει κά-

*Σ.Μ. σε συναρτήσεις των οποίων η σύνθεση είναι η αρχική συνάρτηση ποιο από τα γνωρίσματα (ως προς τα οποία έγινε η ομαδοποίηση), τότε απαιτείται να συνθέσουμε το αντικείμενο από τα συστατικά του.

Ανάλυση - σύνθεση είναι επίσης η βασική αρχή πολλών αποδεικτικών μεθόδων στην Γεωμετρία, Άλγεβρα και Ανάλυση, με την οποία, προβλήματα που αναφέρονται στο όλο, ανάγονται στη μελέτη τοπικών σχέσεων. Από όλα αυτά τα παραδείγματα φαίνεται ότι: ανάλυση και σύνθεση σαν μια ενότητα ανήκουν στη μαθηματική μέθοδο.

Το πεπερασμένο και το άπειρο

Στο βιβλίο του «Φιλοσοφία των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών» (35), και στο τέλος του κεφαλαίου «η ουσία της μαθηματικής γνώσης» γράφει ο Hermann Weyl: «εάν θα ήθελε κανείς να πει κάτι που να χαρακτηρίζει συνοπτικά το ζωντανό κεντρικό σημείο των Μαθηματικών, τότε θα μπορούσε να πει: τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη του απείρου. Η μεγάλη προσφορά των αρχαίων Ελλήνων είναι ότι, στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν την πραγματικότητα, αξιοποίησαν την ένταση που υπάρχει μεταξύ πεπερασμένου και απείρου. Στα παρακάτω θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τη σημασία που είχε και έχει για την ιστορία της θεωρητικής γνώσης η ένταση αυτή μεταξύ πεπερασμένου και απείρου, καθώς και τη σημασία που έχουν οι προσπάθειες που έγιναν για την αντιμετώπισή της.

Σχετικά με το άπειρο γράφει ο Hilbert: το άπειρο συνετάραξε τον ανθρώπινο νου τόσο όσο κανένα άλλο ερώτημα· το άπειρο επέδρασε στη διανόηση τόσο παρακινητικά και γόνιμα όσο καμία άλλη ιδέα· όμως το άπειρο χρειάζεται τόση διασαφήνιση όσο καμία άλλη έννοια».

Οι Έλληνες μαθηματικοί συνάντησαν το πρόβλημα του απείρου τόσο στη γεωμετρία όσο και στην αριθμητική. Στη γεωμετρία το συνάντησαν στο πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού και του όγκου, στη μελέτη της φύσης του συνεχούς καθώς και στη μελέτη των χώρο-χρονικών μεταβολών των φαινομένων, η οποία βρίσκει την υψηλότερη έκφρασή της στα παράδοξα του Ζήνωνα. Στην αριθμητική το συνάντησαν στην ανακάλυψη, από τους Πυθαγόρειους, των αρρήτων αριθμών όπως π.χ. $\sqrt{2}$.

Η προσπάθεια παράκαμψης των δυσκολιών που συνδέονται με την προβληματική του απείρου, οδήγησε τα ελληνικά μαθηματικά στις σπουδαιότερες επιτυχίες τους, που είναι: μια θεωρία, γεωμετρικής μορφής, των αρρήτων αριθμών, το αξίωμα του Αρχιμήδη και η θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου, και η ανάπτυξη δύο μεθόδων υπολογισμού εμβαδών και όγκων: μια ακριβής, αλλά από ευρετικής (heuristisch) πλευράς μη παραγωγική, την εξαντλητική (τη μέθοδο των διαδοχικών αποκλεισμών) (Exhaustionsmethode), και μια όχι και τόσο αυστηρή, όμως πολύ παραγωγική μέθοδο, την μέθοδο του Αρχιμήδη.

Χρησιμοποιώντας την σημερινή ορολογία θα μπορούσαμε να πούμε ότι το αξίωμα του Αρχιμήδη λέει, ότι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν την αρχιμήδεια διάταξη, και στην θεωρία των αναλογιών ένας πραγματικός αριθμός χαρακτηρίζεται από την αντίστοιχη τομή στο σύνολο των ρητών αριθμών. Όμως οι Έλληνες δεν έκαναν και το άλλο βήμα, δηλαδή να επεκτείνουν έτσι την έννοια του αριθμού ώστε και σε κάθε τομή να αντιστοιχεί ένας αριθμός, αλλά παρουσίασαν την θεωρία των αναλογιών σαν καθαρά γεωμετρική θεωρία. Το τελευταίο αυτό βήμα, που δεν έκαναν οι έλληνες, το έκανε ο Dedekind ο οποίος όρισε το συνεχές των πραγματικών αριθμών μέσω των ομωνύμων τομών, δηλαδή όρισε το συνεχές των πραγματικών αριθμών σαν συνεκτικό, αρχιμήδεια διατεταγμένο σώμα. Μπορεί να πει κανείς ότι με αυτό τον γεωμετρικό ορισμό των πραγματικών αριθμών από τον Dedekind έφτασαν στο στόχο τους οι ιδέες που είχαν οι Έλληνες για το συνεχές, βέβαια αυτό επιτεύχθηκε μέσω της αποδοχής τυχαίων τομών και επομένως με την αποδοχή πάρα πολλών απειροσυνόλων ρητών αριθμών, πράγμα που σημαίνει την αποδοχή του «ενεστωτικού» (Aktual) απείρου, για το οποίο οι Έλληνες ένιωθαν φόβο.

Στην εποχή της αναγέννησης ασχολήθηκαν πάλι οι μαθηματικοί με την εξαντλητική μέθοδο (Exhaustionsmethode) και με τη μέθοδο του Αρχιμήδη, την οποία αυτός είχε χρησιμοποιήσει μεταξύ άλλων και για να υπολογίσει κατά προσέγγιση το π, και από τις έρευνες αυτές ξεκίνησε η ανάπτυξη της Ανάλυσης. Έτσι για δεύτερη φορά «η ένταση μεταξύ πεπερασμένου και απείρου επέδρασε πολύ γόνιμα στην προσπάθεια κατανόησης της πραγματικότητας».

Η παραγώγιση μιας συνάρτησης είναι η ανάλυσή της σε «απειροστά», η ολοκλήρωση είναι το αντίθετο βήμα, είναι η σύνθεση. Από την συμπεριφορά των «απειροστών» συμπεραίνουμε την συμπεριφορά του πεπερασμένου. Στην πράξη η παραγώγιση αντιστοιχεί στην περιγραφή των φυσικών νόμων με τη βοήθεια διαφορικών εξισώσεων, και η ολοκλήρωση στην πρόβλεψη της συμπεριφοράς των υλικών συστημάτων που περιγράφουν οι διαφορικές εξισώσεις.

Βέβαια στην αρχή οδηγηθήκαμε σε παραδοξολογίες και μερικές φορές και σε αντινομίες. Η προσπάθεια για την εξάλειψη των παραδοξολογιών και αντινομιών οδήγησε στην αντικατάσταση των «απειροστών» με την έννοια του ορίου, ακριβέστερα με την έννοια του ορίου ακολουθιών αριθμών που τείνουν στο μηδέν, και η αντικατάσταση αυτή οδήγησε, μέσω των εργασιών των Cauchy, Bolzano και Weierstrass, σε μια αυστηρότερη θεμελίωση της Ανάλυσης. Όμως το ότι με την εισαγωγή της διαδικασίας του ορίου, και έτσι με την εισαγωγή του δυναμικού (potentiell) απείρου, δεν εξαφανίστηκε η ένταση μεταξύ πεπερασμένου και απείρου, φάνηκε αμέσως μετά. Διότι η Ανάλυση στηριζόταν στα θεμέλια της θεωρίας των πραγματικών αριθμών, και οι θεμελιώσεις των πραγματικών αριθμών από τους Weierstrass, Dedekind και Cantor, εμπεριείχαν το ενεστωτικό άπειρο. Η θεμελίωση του Cantor περιείχε το σπέρμα μιας πάρα πολύ θαρραλέας προσπέλασης του απείρου, η οποία οδήγησε στην μεγαλύτερη κρίση που παρουσιάστηκε στην ιστορία της μαθηματικής επιστήμης μα και σε ένα φανταστικό άλμα στην εξέλιξή της.

Ο ορισμός των πραγματικών αριθμών από τον Cantor μέσω βασικών* ακολουθιών ρητών αριθμών, βρίσκεται σε μια εργασία του που αναφέρεται στο μονοσήμαντο της παράστασης συναρτήσεων με σειρές Fourier ((7) σελ. 92-101). Στην ίδια εργασία εμφανίζεται η πρώτη προσφορά του Cantor στη μελέτη υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, των οποίων η εξέταση γίνεται όλο και πιο αναγκαία καθώς αναπτύσσεται η Ανάλυση. Όπως λέει και ο Zermelo, στην εργασία αυτή βρίσκεται το σπέρμα των μελλοντικών μεγάλων επιτυχιών του Cantor: η δημιουργία της θεωρίας συνόλων με τη θεωρία των μη πεπερασμένων πληθικών και τακτικών αριθμών, καθώς και σημαντικά στοιχεία για την ανάπτυξη της τοπολογίας και της θεωρίας μέτρου. Το έργο λοιπόν του Cantor είχε σαν αφετηρία την Ανάλυση, αυτή πάλι είχε την διπλή αφετηρία της στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία, σε προβλήματα, στα οποία ήδη από την αρχαιότητα είχε φανεί η ένταση μεταξύ πεπερασμένου και απείρου.

---

* Σ.Μ. ακολουθίες Cauchy.

Στο έργο του συσχέτισε ο Cantor την αντίθεση πεπερασμένο - άπειρο με την αντίθεση ποιότητα - ποσότητα και έτσι η αντίθεση πεπερασμένο - άπειρο έγινε παραγωγική. Ο Cantor είχε αντιληφθεί την σπουδαιότητα αυτής της συσχέτισης και είχε προαισθανθεί τη δυνατότητα εφαρμογής της και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών. Το βασικό ενδιαφέρον του ήταν η σχέση των ιδεών της ποσότητας και του απείρου. Προσπαθούσε να επεξηγήσει τις διάφορες φιλοσοφικές παραστάσεις του απείρου και τους τρόπους με τους οποίους εμφανιζόταν το άπειρο στα Μαθηματικά. 'Εκανε διάκριση μεταξύ του σχετικά μη προβληματικού, και κατά κάποιο τρόπο γενικά αποδεκτού δυναμικού απείρου, και του γενικά απορριπτομένου, ενεστωτικού απείρου. Υποστήριζε το δικαίωμα ύπαρξης του ενεστωτικού απείρου στα Μαθηματικά επικαλούμενος την ύπαρξη απειροσυνόλων. Στην προσπάθειά του να αντικρούσει τους φιλοσόφους, οι οποίοι ισχυρίζονταν ότι δεν είναι δυνατή μια προσέγγιση του απείρου, όρισε μη πεπερασμένους πληθικούς αριθμούς με τη βοήθεια της ισχύος (Mächtigkeit) των απειροσυνόλων, και μη πεπερασμένους τακτικούς αριθμούς με τη βοήθεια του τύπου τάξης (Ordnungstyp) καλώς διατεταγμένων απειροσυνόλων. Ανέπτυξε τη θεωρία αυτών των μη πεπερασμένων αριθμών, της οποίας όλα τα ουσιαστικά μέρη ισχύουν ακόμη και σήμερα, και με την υπόθεση για το συνεχές, έθεσε ένα από τα σπουδαιότερα προβλήματα αυτής της θεωρίας, το οποίο, αν και παρ' όλες τις προσπάθειές του δεν μπόρεσε να το λύσει, αποδείχθηκε για το μέλλον τόσο γόνιμο. (Η υπόθεση του συνεχούς λέει ότι η ισχύς του συνεχούς, δηλαδή του συνόλου των πραγματικών αριθμών, είναι ίση με τον πρώτο μη αριθμήσιμο πληθικό αριθμό.)

Ο Cantor αντιλήφθηκε, από τις μαθηματικές του έρευνες, τόσο την γονιμότητα όσο και το πόση μεγάλη διασαφήνιση χρειάζεται η ιδέα του απείρου, και συνέβαλε στην αντιμετώπιση αυτού του θέματος τόσο όσο κανείς άλλος μαθηματικός, ή φιλόσοφος πριν ή μετά από αυτόν. Για να αντιμετωπίσει τις αντιρρήσεις πυ είχαν για το ενεστωτικό άπειρο φιλόσοφο και μαθηματικοί όπως οι Leibnitz, Gauss, Cauchy και Kronecker, αναγκάστηκε πολλές φορές να φιλονικήσει διότι οι αντίπαλοί του, στην πολεμική που εξασκούσαν εναντίον των ιδεών του, έκαναν και κατάχρηση της δύναμης που τους έδινε το υψηλό επιστημονικό πόστο τους.

Προσπάθησε να δείξει ότι οι ιδέες του έχουν τις ρίζες τους σε μια μακρά μαθηματική εξέλιξη. Έτσι σχετικά με τον ορισμό του πεπερασμένου πληθικού αριθμού επεσήμενε ότι ο Ευκλείδης «βλέπει τον αριθμό σε συσχέτιση με τα σύνολα, που είναι η αληθινή πηγή του, και δεν τον βλέπει σαν ένα σύμβολο που επισυνάπτεται σε μεμονωμένα αντικείμενα με μια υποκειμενική διαδικασία αρίθμησης». Μια πάρα πολύ καλή επιβεβαίωση της άποψης του Cantor σχετικά με την ουσία του αριθμού, και ιδιαίτερα για τη συγχώνευση των εννοιών του τακτικού και πληθικού αριθμού στην περίπτωση των πεπερασμένων συνόλων, βρίσκεται στις πειραματικές έρευνες του Piaget, που αναφέρονται στη δημιουργία της έννοιας του αριθμού στα παιδιά (23). Ο Cantor επισήμανε ακόμη το γεγονός ότι παρόμοιες με τις δικές του ιδέες βρίσκονται στο άρθρο «παραδοξολογίες του απείρου» που έγραψε το 1851 ο Bolzano.

Σχετικά με το θέμα του απείρου δεν συγκρούστηκε ο Cantor μόνο με τους μαθηματικούς αλλά και με άλλους όπως π.χ. τους πατέρες της εκκλησίας (Kirchenuäter) και τους συγχρόνους του φιλοσόφους από τους εγελιανούς (Hegelianen) μέχρι τους εμπειριστές (Empiristen) και τους θετικιστές (Posetiviste). Έτσι π.χ. στο «Grundlagen der allgemeinen Mannigfaltigkeitslėhre» ((7), σελ. 165-209), όπου για πρώτη φορά εκθέτει τις βασικές ιδέες του για τη θεωρία συνόλων, μεταξύ των άλλων ασχολείται και με τον Dühring, τον ίδιο Dühring, για τον οποίο ο Engels άσκησε αυστηρή κριτική στο Αντι-Dühring.

Δεν είναι δυνατόν να παραβλέψει κανείς τη σημασία που είχαν για τη δημιουργία και επικράτηση της θεωρίας συνόλων, οι μεγάλες προσπάθειες που κατέβαλε ο Cantor για να εντάξει τις ιδέες του μέσα στα γενικά πλαίσια της ανάπτυξης της ανθρώπινης σκέψης. Και για το λόγο αυτό είναι μια παραχάραξη της ιστορικής αλήθειας το γεγονός, ότι ο Bourbaki στην περιγραφή της δημιουργίας της θεωρίας συνόλων που κάνει στο (6) κάνει μεν κάποια αναφορά στην εξέλιξη της ανθρώπινης σκέψης, όμως δεν αναφέρει ούτε μια λέξη για τις σε βάθος και θεμελιώδεις αντιπαραθέσεις του Cantor τόσο με το φιλοσοφικό πρόβλημα του απείρου όσο και με το πρόβλημα της σχέσης της θεωρίας του με την πραγματικότητα.

Η στάση που κρατάει εδώ ο Bourbaki είναι η ίδια πάντα στάση, η οποία δείχνει την έλλειψη φιλοσοφικού ενδιαφέροντος, η οποία αποστομώνει* τον Riemann (Riemann über den Mund fährt) — αφού κατά την νοοτροπία αυτή, η ερώτηση για τη φύση του πραγματικού χώρου «προφανώς» δεν έχει καμία σχέση με τα Μαθηματικά — η οποία, περιφρονητικά, εμφανίζει την γενική ερώτηση που αναφέρεται στη σχέση των μαθηματικών προς κάτι εξωμαθηματικό, σαν νεφελώδες πρόβλημα της Ψυχολογίας ή της Μεταφυσικής.

Είναι αδύνατον να μην εκπλήσσεται κανείς όταν βλέπει να επιχειρείται η σύλληψη (κατανόηση) όλων των Μαθηματικών σαν μια ιεραρχία συνολοθεωρητικών δομών, χωρίς να αναφέρεται τίποτε για την προέλευση και τη σημασία όχι μόνο των δομών, μα ακόμη ούτε και της έννοιας αυτού του ίδιου του συνόλου.

Οι ιδέες του Cantor για το ενεστωτικό άπειρο ήταν αντίθετες προς τις ιδέες που είχε για το άπειρο η πλειονότητα των μαθηματικών του παρελθόντος και της εποχής του. Από που πήρε ο Cantor το δικαίωμα και το θάρρος να υποστηρίξει με τόση συνέπεια το ενεστωτικό άπειρο στα Μαθηματικά; Ο Cantor εκφράζεται με πολύ σαφήεια για το θέμα αυτό στην παράγραφο 8 της βασικής εργασίας του (7). Κατ' αρχήν, με σκοπό να διασαφηνίσει το θέμα της «πραγματικότητας ή ύπαρξης» μαθηματικών αντικειμένων, κάνει μια διάκριση μεταξύ δύο σημασιών της έννοιας «πραγματικότητα» (Realität): διακρίνει από τη μια μεριά την «immanente πραγματικότητα» και από την άλλη την «transiente πραγματικότητα». Η πρώτη αναφέρεται στην ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων σαν έννοιες της διανόησης που βρίσκονται μέσα στο μηχανισμό της ανθρώπινης σκέψης. Η δεύτερη (σημασία) αναφέρεται στο ότι σ' αυτές τις έννοιες «αποδίδουμε αλήθεια» («λέμε ότι είναι αληθινές») όταν μπορούν να δόσουν μια έκφραση ή μια απεικόνιση των φαινομένων και σχέσεων του εξωτερικού κόσμου (του κόσμου που είναι έξω από το άτομο).

Ο Cantor δεν είχε καμια αμφιβολία για το «ότι και τα δύο είδη της πραγματικότητας συνυπάρχουν» υπό το πνεύμα ότι μια έννοια με «immanente πραγματικότητα» έχει πάντοτε και «transiende πραγματικότητα», η οποία τις πιο πολλές φορές

Σ.Μ. Τον Riemann τον απασχολεί πάρα πολύ το πρόβλημα της φύσης του πραγματικού χώρου. Ιδέ σχετικό απόσπασμα του έργου του στο τέλος του κεφαλαίου Αφαίρεση και πραγματικότητα της παρούσης εργασίας.

διαπιστώνεται καθώς αναπτύσσονται οι εμπειρικές επιστήμες (Erfahrungswissenschaften). «Ο λόγος αυτής της συσχέτισης των δύο πραγματικοτήτων, είναι η ενότητα του Σύμπαντος στο οποίο ανήκουμε και εμείς». Ακριβώς αυτή η ενότητα είναι για τον Cantor και η προϋπόθεση για τη δυνατότητα που έχουν τα Μαθηματικά «κατά την ανάπτυξη του υλικού των ιδεών τους να λαμβάνουν υπόψη τους μόνο την immanente πραγματικότητα». Οι προϋποθέσεις για την ένταξη νέων εννοιών στο σύστημα εννοιών που υπάρχει στην εκάστοτε χρονική στιγμή, καθώς και η φύση των Μαθηματικών, είναι έτσι «ώστε να υπάρχει πολύ λίγος χώρος για αυθαιρεσίες· ακόμη κάθε μαθηματική έννοια έχει μέσα της και ένα διορθωτικό στοιχείο, δηλαδή αν μια έννοια είναι μη αποδοτική ή άσκοπη, αυτό φαίνεται γρήγορα από το γεγονός ότι δεν χρησιμοποιείται, και έτσι λόγω ελλείψεως επιτυχίας πέφτει. Παρόλα αυτά νομίζω ότι κάθε περιττός περιορισμός στη μαθηματική έρευνα εμπεριέχει έναν πολύ μεγαλύτερο κίνδυνο (από τον κίνδυνο να εισαχθεί μια άχρηστη έννοια) και ο κίνδυνος αυτός γίνεται ακόμη μεγαλύτερος αφού από την ουσία της επιστήμης δεν μπορεί να δικαιολογηθεί με κανένα τρόπο ένας τέτοιος περιορισμός, διότι η ουσία των Μαθηματικών έγκειται ακριβώς στην ελευθερία τους».

Το θεωρήσαμε σκόπιμο να παραθέσουμε ολόκληρο αυτό το απόσπασμα από το έργο του Cantor διότι αποσπώντας από το κείμενο τις λέξεις «ελευθερία των Μαθηματικών» δεν εμφανίζεται σωστά το πνεύμα με το οποίο χρησιμοποιήθηκε η έκφραση αυτή από τον Cantor. Νομίζουμε ότι η άποψη που είχε ο δημιουργός της θεωρίας συνόλων για την ουσία των Μαθηματικών είναι πολύ κοντύτερα στη δική μας άποψη απ' ότι στην άποψη που έχουν μερικοί «μοντέρνοι» πρωταγωνιστές των «Μαθηματικών σαν θεωρία συνόλων» ή «σαν δομικά Μαθηματικά», οι οποίοι διαχωρίζουν απόλυτα τα Μαθηματικά από την πραγματικότητα.

Ο Cantor δεν ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με τη θεωρία συνόλων. Σύνολα ή κλάσεις είχαν ήδη εμφανισθεί πολύ πιο μπροστά, περισσότερο ή λιγότερο άμεσα στις εργασίες πολλών μαθηματικών. Κυρίως είχαν εμφανισθεί σύνολα σημείων ή αριθμών στην Ανάλυση, από δε τον 19ο αιώνα, με αυξανόμενο ρυθμό, και σε άλλους τομείς των Μαθηματικών.

Ήδη στο κάθε παιδί, και μάλιστα πριν ακόμη πάει σχολείο, γεννιέται, από τη συναναστροφή του με σύνολα συγκεκριμένων αντικειμένων, μια έννοια του συνόλου, φυσικά όχι σε υψηλό επίπεδο αφαίρεσης, συγχρόνως με μια αντίστοιχη έννοια του αριθμού. Επίσης στην ηλικία αυτή γεννιώνται οι έννοιες απλών λογικών πράξεων και απλών πράξεων στα πεπερασμένα σύνολα. (Ιδέ (23)).

Η μετάβαση στα απειροσύνολα, για τα οποία δεν έχουμε άμμεση εποπτική αντίληψη, είναι κάθε άλλο παρά απλή, και ακριβώς εδώ βρίσκεται η μεγάλη προσφορά του Cantor ο οποίος πραγματοποιεί συνειδητά αυτό το μεγάλο άλμα, ορίζει, κάνοντας μια μεγάλη γενίκευση, την έννοια του συνόλου, και ανάπτυσσει συστηματικά τη θεωρία συνόλων.

Ο Cantor δεν χρησιμοποίησε από την αρχή τη λέξη «σύνολο». Στο έργο του συναντάται ένα πλήθος άλλων εκφράσεων. παραθέτουμε μερικά παραδείγματα: σύνολα ή κλάσεις χαρακτηρίζονται σαν αποτελέσματα μιας διαδικασίας αφαίρεσης, επίσης σαν «διανοητική απεικόνιση στο πνεύμα μας», σαν σύστημα ή σαν το ουσιώδες (Inbegriff). Σύνολα θεωρούνται σαν ενότητα (Einheit) ενός πλήθους αντικειμένων: «κάθε σύνολο (Menge) καλώς διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων μπορεί αν θεωρηθεί σαν ένα ενιαίο πράγμα στο οποίο το κάθε αντικείμενο είναι συστατικό μέρος (Bestandteil) ή προσδιοριστικό στοιχείο (Konstitutives Element)». Στο τέλος αυτής της εξέλιξης εμφανίζεται και ο περίφημος ορισμός, ο οποίος βρίσκεται στην αρχή του έργου «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre»:

«Με την έκφραση «σύνολο» εννοούμε κάθε συμπερίληψη M ορισμένων και διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων m του εποπτικού χώρου ή της σκέψης μας (τα οποία ονομάζουμε «στοιχεία» του M), σε ένα όλον (zu einem Ganzen)».

Στον τονισμό που κάνει ο Cantor στην «ενότητα ενός πλήθους», δηλαδή στον τονισμό που κάνει σε ένα διαλεκτικό σχηματισμό εννοιών, μπορεί να δει κανείς μια έκφραση της βασικής διαλεκτικής σχέσης που υπάρχει μεταξύ ισότητας και διαφορετικότητας (Verschiedenheit). Η αναγνώριση της ισότητας (Gleichheit) στα διαφορετικά είναι η πρώτη προϋπόθεση για τη σκέψη (ιδέ (13) σελίδα 132).

Για μια τέτοια αντίληψη συνηγορεί και ο τρόπος που χρησιμοποιούν τις λέξεις οι μαθηματικοί, οι οποίοι όταν αναφέρονται σε διαφορετικά μεταξύ τους αντικείμενα προτιμούν να μιλάνε για «ταύτιση» παρά για «κλάση» αυτών των αντικειμένων.

Γενικά είναι φανερό ότι όλοι οι ορισμοί του Cantor παραπέμπουν στην ικανότητα που έχουμε να βλέπουμε, με τη διαδικασία της αφαίρεσης, πολλά διαφορετικά πράγματα σαν ένα, να σκεφτόμαστε την ουσία των πραγμάτων. Είναι δε η ικανότητα αυτή η απολύτως βασική προϋπόθεση για τη λειτουργία της σκέψης μας. Και επειδή έτσι έχουν τα πράγματα, επειδή εδώ πρόκειται για τη θεμελιωδέστερη διαδικασία της σκέψης, γιαυτό μπόρεσε η θεωρία συνόλων να γίνει η βάση των Μαθηματικών, και στην παραπέρα εξέλιξη όχι μόνο αποδείχτηκε πράγματι σαν βάση των Μαθηματικών, όχι μόνο έκανε δυνατή μια όλο και πιο σύνθετη ανάπτυξη των Μαθηματικών, μα συνέβαλλε ακόμη στο να αναπτυχθεί πλήρως η αφαιρετική ικανότητα των Μαθηματικών σε κάθε βαθμίδα, ακόμη και στη βαθμίδα της αρχικής απεικόνισης πραγματικών (real) σχέσεων με τη βοήθεια μοντέλων — και εδώ έχουμε μια ακόμη επιβεβαίωση του γεγονότος ότι η σωστή αφαίρεση όχι μόνο δεν απομακρύνεται από την πραγματικότητα μα αντιθέτως την αποδίδει σωστότερα, βαθύτερα και πληρέστερα. Μια ακόμη απόδειξη για την πρόταση του Hegel: «Εκείνο που είναι Πρώτο (Erste) για την επιστήμη, έπρεπε να εμφανιστεί ιστορικά σαν Πρώτο». Σ' αυτή την αλήθεια έμεινε πιστός και ο Cantor παρόλλες τις επιθέσεις των αντιπάλων του.

Στην ουσία των Μαθηματικών δεν ανήκει μόνο η αφαίρεση, αλλά και η ακρίβεια. 'Ομως και η ακρίβεια είναι μια σχετική έννοια. Ο ορισμός των συνόλων που έδωσε ο Cantor ήταν ακριβώς τόσο ικανοποιητικός όσο χρειαζόταν για να του επιτρέψει να αναπτύξει τις βασικές αρχές της θεωρίας συνόλων. 'Ομως δεν ήταν τόσο ακριβής ώστε να αποτελέσει μια μονοσήμαντη βάση για τον ορισμό συνόλων και για συνολοθεωρητικές παραγωγές (Deduktionen). Εμφανίστηκαν σχηματισμοί εννοιών που περιείχαν την αντίφαση, όπως π.χ. «το σύνολο όλων των συνόλων» — πράγμα που και ο Cantor το συνάντησε — και άλλες αντινομίες. Οι προσπάθειες για τη δημιουργία μιας σίγουρης αφετηρίας οδήγησαν τους Zermelo, Fränkel, Gödel, Bernays, von Neumann και άλλους, σε συνολοθεωρητικά συστήματα αξιωμάτων, και η έρευνα αυτών των αξιωμάτων συνέβαλε στην κατανόηση του προβλήματος της θεμελίωσης.

Οι προτάσεις του Gödel που αναφέρονται στην μη πληρότητα (Unvollständigkeitssätze) έδειξαν ότι κατά τον πλήρη φορμαλισμό τέτοιων αξιωματικών συστημάτων, υπάρχουν πάντα προτάσεις μέσα στα συστήματα αυτά που δεν είναι δυνατόν να εξετασθούν ως προς την αλήθειά τους, με τα μέσα του συστήματος, δηλαδή για να ελέγξει κανείς την ορθότητά τους πρέπει να χρησιμοποιήσει μέσα που βρίσκονται εκτός του συστήματος. Και μόνο αυτό το γεγονός σημαίνει, ότι κανένα μεμονωμένο συνολοθεωρητικό σύστημα αξιωμάτων δεν είναι δυνατόν να ταυτιστεί με τη θεωρία συνόλων και ακόμη ότι μια ενδεχόμενη απόδειξη΄ του συμβιβασμού (Wiederspruchs freiheit) ενός συστήαμτος αξιωμάτων δεν θα αποδείκνυε το συμβιβαστόν όλων των Μαθηματικών.

Πολύ σημαντικά ήταν τα αποτελέσματα των εργασιών του Gödel, Cohen και Vopenka στο πρόβλημα της υπόθεσης του συνεχούς, το οποίο έθεσε σαν πρώτο στη διάλεξή του στο Παρίσι ο Helbert. Η υπόθεση του συνεχούς μας λέει, ότι η ισχύς του συνεχούς, δηλαδή η ισχύς του συνόλου των πραγματικών αριθμών, είναι ίση με τον πρώτο μη αριθμήσιμο πληθικό αριθμό. Με άλλη διατύπωση: η υπόθεση του συνεχούς μας λέει ότι κάθε υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών ή είναι αριθμήσιμο ή έχει ακριβώς τόσα στοιχεία όσα το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών.

Τα αποτελέσματα των εργασιών των παραπάνω ερευνητών μας λένε π.χ. ότι το πρόβλημα της υπόθεσης του συνεχούς είναι τελείως ανεξάρτητο από τα συνολοθεωρητικά αξιώματα των Zermelo και Fränkel. Αυτό σημαίνει ότι εάν από το σύστημα αξιωμάτων (Zermelo, Fränkel) δεν προκύπτει καμία αντίφαση, τότε πάλι δεν εμφανίζεται καμία αντίφαση και από το σύστημα αυτό μαζί με την υπόθεση του συνεχούς, και τέλος και στη περίπτωση που δεχθούμε το σύστημα αξιωμάτων (Zermelo, Fränkel) και την άρνηση της υπόθεσης του συνεχούς, πάλι δεν εμφανίζονται αντιφάσεις. Για να το πούμε απλούστερα: ούτε η υπόθεση του συνεχούς ούτε η άρνησή της συνάγονται από το σύστημα αξιωμάτων (Zermelo, Fränkel). Παρόμοια προβλήματα εμφανίζονται και για τα λεγόμενα ισχυρά αξιώματα του απείρου (starke Unendlichkeits axiome) στα οποία αιτείται (postulieren) η ύπαρξη μη εφικτών πληθικών αριθμών (unerreichbare Kardinal-zahlen).

Τι σημαίνουν αυτά τα αποτελέσματα; Η απάντηση δεν είναι εύκολη. Η συζήτηση μεταξύ των ειδικών στη θεωρία συνόλων δείχνει μόνο, ότι το θέμα είναι τελείως ανοικτό. ΄Ομως όταν βλέπει κανείς π.χ. με πόση προσοχή διαπραγματεύεται τέτοια

ερωτήματα ο Cohen στο τέλος της εργασίας του (8), ότι αυτός αναρωτιέται μήπως ίσως στα επόμενα στάδια της παραπέρα ανάπτυξης αυτού που διαισθητικά (intuitiv) θεωρούμε σαν σύνολο, η υπόθεση του συνεχούς (ή η άρνησή της) μας φανούν σαν αληθείς, όταν στο (9) τολμάει να εκφράσει την υπόνοια ότι ίσως για τις διάφορες περιοχές της μαθηματικής σκέψης θα μπορούσαν να φανούν σαν κατάλληλα ουσιαστικώς διαφορετικά μεταξύ τους συστήματα αξιωμάτων, τότε ένα πράγμα είναι σίγουρο:
όταν κάποιος ισχυρίζεται ότι θα μπορούσε με ένα ορισμένο συνολοθεωρητικό σύστημα αξιωμάτων, για την προέλευση του οποίου δεν δίνει καμία πληροφορία, να δώσει μια οριστική, τελείως ακριβή (völlig exakte), απηλλαγμένη από αντινομίες και ασάφειες, βάση των Μαθηματικών, τότε απλά αυτό δεν είναι αλήθεια.

Σε σχέση με μια τέτοια αντίληψη, της θεωρίας των συνόλων είναι χίλιες φορές καλύτερα να τα βλέπει κανείς όπως τα έβλεπε ο Cantor, κάτι που άλλωστε κάνουν οι πιο πολλοί μαθηματικοί.

Και στα Μαθηματικά όπως και σε όλη την επιστημονική σκέψη εμφανίζεται «η αναπόφευκτη έλλειψη τελειότητας των αρχικών (πρώτων) εννοιών» (Hegel (19) σελ. 224). Είναι πολύ ωραίο το ότι η ίδια η ανάπτυξη των Μαθηματικών οδήγησε στην συνειδητοποίηση του γεγονότος ότι οι αρχές και των Μαθηματικών δεν είναι τέλειες, διότι έτσι φαίνεται η συσχέτιση των Μαθηματικών με το σύνολο της ανθρώπινης διανόησης και δράσης, κάτι που τόσο συχνά αρνούνται ή παραβλέπουν εκείνοι οι οποίοι θέλουν να περιορίζονται στην φαινομενική ακρίβεια κάποιων κλειστών στον εαυτό τους Μαθηματικών.

Η — βασική (prinzipielle) — δυνατότητα της περιγραφής όλων των μαθηματικών δομών με τη βοήθεια μόνο της έννοιας «σύνολο» και της βασικής σχέσης «το m ανήκει στο M» έκανε δυνατή όχι μόνο μία ανεπανάληπτη ενοποίηση των Μαθηματικών αλλά και την εμφάνιση ενός τόσο συνθέτου πλήθους αλληλοσυνδεόμενων δομών, προβλημάτων και θεωριών, που δεν είναι δυνατό να περιληφθούν σε μια, όσο και αν είναι αυτή διεξοδική, παράσταση των Μαθηματικών σαν κάτι το ενιαίο. Έτσι φαίνεται σαν προφανής η άποψη που διατυπώνει ο Atiyah στο (2): «η ανάπτυξη των Μαθηματικών μπορεί κάλλιστα να εννοηθεί σαν μια φυσιολογική αντίδραση στην συνεχώς αυξανόμενη δυσκολία και πολυπλοκότητα των προβλημάτων, με τα οποία ασχολούνται τα Μαθηματικά. 'Οσο αυτά τα προβλήματα έχουν άμεσα ή έμμεσα τις ρίζες τους στις θετικές ή σε άλλες επιστήμες, η πολυπλοκότητά τους αντικατοπτρίζει την συνεχώς αυξανόμενη πολυπλοκότητα και διαφοροποίηση των μοντέρνων επιστημών».

Στην πραγματικότητα, πολύ δύσκολα μπορεί να αντιληφθεί ένας μη μαθηματικός την πολυπλοκότητα των προβλημάτων τα οποία διαπραγματεύονται σήμερα τα Μαθηματικά. Μια άποψη αυτού του γεγονότος είναι η τάση να χρησιμοποιούνται για τη λύση αυτών των προβλημάτων όλο και «μεγαλύτερα» αντικείμενα όλο και πιο πολύπλοκες «κατασκευές», από των οποίων την απειρότητα (Unenlichkeit) ενδεχομένως θα ένιωθαν φόβο οι παλαιότεροι μαθηματικοί — ίσως και απέχθεια.

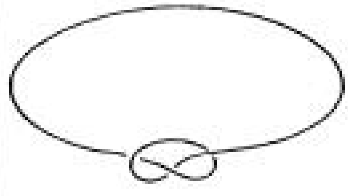
'Ομως από την άλλη μεριά, ο κάθε Μαθηματικός ξέρει ότι σε όλες τις περιοχές των Μαθηματικών, για να μπορούμε να εργαζόμαστε, βάζουμε ένα πλήθος περιορισμών. Και ακριβώς προτάσεις με πολύ μεγάλο βάθος αλληλοσυνδέουν τέτοιου είδους περιορισμούς, όπως π.χ. η πρόταση του Grauert, η οποία λέει ότι με μία απεικόνιση f η εικόνα μιας συνεκτικής (Kohärent) Garbe (δεμάτι) είναι συνεκτική (Kohärent), όταν τα αρχέτυπα, ως προς την f, συμπαγών (kompakt) συνόλων είναι συμπαγή.

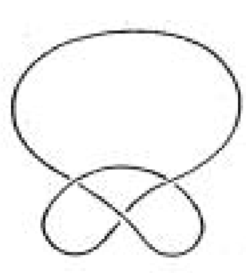
Τέτοιες προτάσεις κάνουν φανερό ότι όταν εξετάζουμε μια κατά κάποιο τρόπο πεπερασμένη κατάσταση, τότε πολλές φορές πρέπει να θεωρούμε και μια αντίστοιχη μη πεπερασμένη. Συχνά η εισαγωγή ή η μη εισαγωγή προϋποθέσεων που μας ανάγουν σε κάτι πεπερασμένο, οδηγεί στην ανάπτυξη εξειδικευμένων (speziell) θεωριών με αντίθετες κατευθύνσεις, όπως π.χ. η θεωρία συναρτήσεων σε συμπαγείς επιφάνειες Riemann από τη μια μεριά και σε μη συμπαγείς από την άλλη. 'Ολη αυτή η πληθώρα και η ενότητα θα ήταν αδύνατη εάν δεν είχε εισαχθεί στα Μαθηματικά το ενεστωτικό άπειρο (Aktual - Unendlich) από τον Cantor.

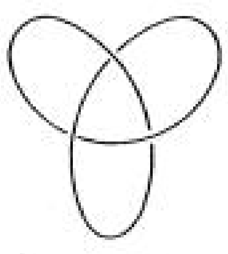
Ποιότητα και ποσότητα

Μια άλλη εξαιρετικά σπουδαία άποψη της αντίθεσης μεταξύ συνθετότητας και απλότητας, είναι, όπως τονίζει ο Atiyah, η αυξανόμενη εμφάνιση ποιοτικών τρόπων θεώρησης πολυπλόκων προβλημάτων, με σκοπό την απλοποίησή τους. Η διαλεκτική της αντίθεσης μεταξύ ποιότητας και ποσότητας έχει μεγάλη σπουδαιότητα στην ανάπτυξη των Μαθηματικών, και αν ήθελε κανείς να διαπραγματευτεί σωστά το θέμα αυτό τότε θα έπρεπε να γράψει πάρα πολλά, πράγμα που δυστυχώς δεν είναι δυνατόν να γίνει εδώ για λόγους χώρου. Έτσι θα περιοριστούμε μόνο σε λίγες βασικές παρατηρήσεις.

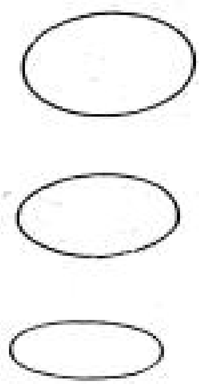
Πριν ακόμη σχηματίσουν τα μικρά παιδιά τις πρώτες έννοιες σχετικά με τους αριθμούς και τα σύνολα, μπορούν και αντιλαμβάνονται ποιότητες (Qualitäten) όπως π.χ. γεωμετρικά σχήματα (23). Αναμφίβολα ο άθρωπος, συγχρόνως με τις πρώτες ποσοτικές παραστάσεις, είχε και ποιοτικές παραστάσεις στοιχειωδών γεωμετρικών ιδιοτήτων των σωμάτων, οι οποίες δεν μεταβάλοντο κατά τις συνεχείς μεταβολές των μορφών των σωμάτων, και επί πλέον είχαν και πρακτική σημασία, όπως π.χ. κόμποι ή η υφή μιας πλεξούδας. Παρατηρώντας κανείς π.χ. σχήματα σαν τα παρακάτω αντιλαμβάνεται άμεσα (δηλαδή με βάση τις εμπειρίες που απέκτησε στη ζωή του σχετικά με το χώρο) ότι όλα αυτά τα σχήματα έχουν κάτι κοινό, ότι όλα κατά κάποιο τρόπο έχουν το ίδιο «μπέρδεμα» ή έχουν ίδιας μορφής «κόμπο».







Εάν θελήσει κανείς να κατανοήσει μαθηματικά αυτήν την τελείως εποπτική ιδιότητα, τότε, κατά παράξενο τρόπο, απαιτείται υψηλοτέρου βαθμού αφαιρετική ικανότητα, απ' ότι απαιτείται για να αντιληφθεί κανείς, ότι οι παρακάτω τρεις ελλείψεις έχουν ένα κοινό τρόπο γεωμετρικής κατασκευής, κάτι που ήδη είχαν συλλάβει και οι αρχαίοι, ή να αντιληφθεί κανείς την κοινή μορφή $ax^2 + by^2 = 1$ που έχουν οι εξισώσεις που τις περιγράφουν.

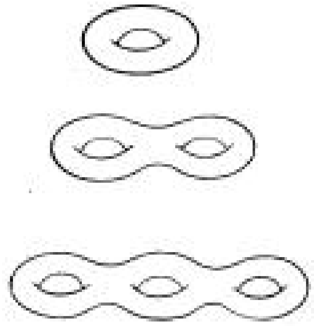


Φυσικά ήδη από την αρχαιότητα είχαν μελετηθεί προβλήματα που αναφέρονταν σε συνεχείς μεταβολές, και φυσικά περιείχαν οι μελέτες γεωμετρικών σχημάτων ποιοτικά στοιχεία, όμως επειδή ήταν δυνατόν να μελετηθούν τα σχήματα αυτά με ποσοτικές σχέσεις, δεν είχαν συνειδητοποιηθεί τα ποιοτικά στοιχεία. Δεν ήταν λιγότερη η ένταση (Spannung) μεταξύ ποιότητας και ποσότητας που υπήρχε στο συνεχές των πραγματικών αριθμών και στην αντίθεση (Gegensatz) μεταξύ άλγεβρας και γεωμετρίας. Όταν από την συνένωση αυτών των δύο δημιουργήθηκε η ανάλυση, εμφανίστηκε και η ανάλυση situs.

Γενικά η ανάλυση μέχρι την εποχή του Gauss είχε κάνει περιορισμένες προόδους, αν και από τη μελέτη σημειοσυνόλων του συνεχούς καθώς και από τις προσπάθειες που έγιναν για τον ορισμό της συνεχείας στις συναρτήσεις, προετοιμάστηκε η δημιουργία της συνολοθεωρητικής τοπολογίας. Άλλες πρόοδοι στη γεωμετρία και την ανάλυση εμφανίστηκαν στο πρώτο ήμισυ του 19ου αιώνα, και στα μέσα του αιώνα αρχίζει με τον Riemann η φανταστική ανάπτυξη της Τοπολογίας, η οποία συνεχίζεται μέχρι και σήμερα, και η οποία (τοπολογία) επέδρασε σε βάθος σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών. Δεν είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί στην εργασία μας αυτή η εξέλιξη της Τοπολογίας και γιαυτό παραπέμπουμε στο σχετικό συνοπτικό σημείωμα που υπάρχει στο (6).

Στα παρακάτω θα προσπαθήσουμε να δείξουμε με δύο παραδείγματα, πως στην τοπολογία και τη γεωμετρία και στην αλληλεπίδρασή τους σε άλλους κλάδους γίνεται άμεσα κατανοητή η διαλεκτική σχέση ποιότητας (Qualität) και ποσότητας (Quntität).

Είναι μια πολύ παλιά ιδέα, το ότι μια συσχέτιση μεταξύ ποιότητας και ποσότητας παράγεται μέσω ενός μέτρου (Mass). Ένα μέτρο για μια ορισμένη ποιότητα αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο, το οποίο δύναται να έχει την εν λόγω ποιότητα, ένα ορισμένο μέγεθος, και θα μπορούσε, κάπως χονδρικά, να πει κανείς, ότι αυτό το μέγεθος είναι ένα μέτρο για το σε ποιο βαθμό η εν λόγω ποιότητα ταιριάζει στο εξεταζόμενο αντικείμενο. Ίσως κάπως καλύτερη θα ήταν η παρακάτω διατύπωση: όταν μας δοθούν δυο αντικείμενα τότε τα αντίστοιχα μεγέθη μετρούν πόσο διαφέρουν τα δύο αυτά αντικείμενα ως προς την θεωρούμενη ποιότητα. Συνήθως έχουμε την εντύπωση ότι αυτό το μέγεθος, το οποίο μετράει την ποιότητα, θα πρέπει να είναι ένας αριθμός και μάλιστα πραγματικός αριθμός. Βέβαια από μαθηματικής απόψεως δεν υπάρχει κανένας ιδιαίτερος λόγος να είναι αυτό το μέγεθος σώνει και καλά ένας αριθμός και μάλιστα πραγματικός. Θα μπορούσε π.χ. να είναι φυσικός αριθμός, που είναι και απλούστερος, ή ακόμη θα μπορούσε να είναι ένα άλλο μαθηματικό αντικείμενο με μία δομή, κατά προτίμηση ποσοτικού χαρακτήρα, π.χ. μια ομάδα ή ένα στοιχείο μιας ομάδας κ.λ.π.



Και τώρα ένα παράδειγμα, το οποίο και από ιστορικής απόψεως ήταν το πρώτο σημαντικό παράδειγμα.

Ας παρατηρήσουμε διδιάστατες επιφάνειες σαν αυτές που φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.

Βλέπει κανείς αμέσως ότι οι επιφάνειες αυτές διαφέρουν κατά κάποιο τρόπο ποιοτικά. Δεν είναι προφανές, ως προς ποια ποιότητα μπορεί κανείς να αντιληφθεί τις διαφορές αυτών των επιφανειών. Μια δυνατότητα θα ήταν να δει κανείς τις επιφάνειες αυτές σαν τοπολογικούς χώρους. Τότε η αναζητούμενη ποιότητα είναι ο τύπος ομοιομορφίας (Homöomorphiety p).

Πως βρίσκει λοιπόν κανείς ένα μέτρο γιαυτή την ποιότητα; Τα σχήματα υποδεικνύουν ότι, ίσως θα μπορούσε για το σκοπό αυτό να χρησιμοποιηθεί ο αριθμός p των «οπών». Και πράγματι έτσι είναι, μπορεί κανείς να ορίσει με κατάλληλο τρόπο αυτόν τον αριθμό p, το γένος της επιφάνειας, και αποδεικνύεται ότι αυτός ο αριθμός είναι ένα τόσο καλό μέτρο για την θεωρούμενη ποιότητα, όσο ακριβώς θα επιθυμούσε κανείς: δύο επιφάνειες είναι ακριβώς τότε ομοιόμορφες (homöomorph) όταν έχουν ίσα γένη. Αυτό το παράδειγμα έγινε μοντέλο για ένα ολόκληρο κλάδο, την αλγεβρική τοπολογία, της οποίας ο στόχος είναι να μετασχηματίζει ποιοτικά προβλήματα σε ποσοτικά. Εδώ πρέπει για κάθε μια γεωμετρική κατάσταση και για κάθε τύπο προβλήματος, το μέτρο (Mass) το οποίο αντιστοιχίζει σε ποιοτικά δεδομένα ποσοτικά δεδομένα, «αναλλοίωτες» (Invarianten), να κατασκευαστεί κατάλληλα. Η εύρεση τέτοιων αναλλοίωτων είναι συχνά ένα μεγάλο κατόρθωμα.

Η αλγεβρική τοπολογία, η οποία διαθέτει ένα σεβαστό απόθεμα τέτοιων κατασκευών, είναι ένα εξαιρετικό εργαλείο για τον μετασχηματισμό προβλημάτων. Έτσι π.χ. είναι δυνατόν, ενώ αρχικά προσπαθεί να λύσει κανείς ένα πρόβλημα από την Ανάλυση ή την Γεωμετρία ή ακόμη από την Άλγεβρα, ήδη στα πρώτα στάδια της προσπάθειας να ανάγεται το αρχικό πρόβλημα σε ένα καθαρά ποιοτικό τοπολογικό πρόβλημα. Τότε η αλγεβρική τοπολογία το ανάγει παραπέρα σε ένα καθαρά ποσοτικό πρόβλημα, π.χ. σε ένα πρόβλημα της θεωρίας των αριθμών. Εάν τώρα μπορεί να λυθεί αυτό το τελευταίο πρόβλημα τότε έχει λυθεί και το αρχικό. Όμως είναι δυνατόν η διαδικασία να αρχίσει ξανά από το καινούργιο πρόβλημα. Μια ωραία παρουσίαση αυτού του ρόλου της αλγεβρικής τοπολογίας δίνει π.χ. ο Atiyah στο (1).

Οι ασχολούμενοι με την διαλεκτική έδωσαν μεγάλη αξία στο γεγονός ότι, η αλλαγή των ποιοτήτων δεν πρέπει να νοείται σαν μια βαθμιαία αλλαγή των αντιστοίχων ποσοτήτων αλλά σαν ένα άλμα, και για να κάνουν πιο παραστατικό αυτό το γεγονός παρέπεμπαν στην αλματώδη αλλαγή ποιοτήτων όπως π.χ. στην αλλαγή της κατάστασης σωμάτων που παρατηρείται όταν τα σχετικά μεγέθη (π.χ. πίεση και θερμοκρασία) ξεπεράσουν κάποιες κρίσιμες τιμές. Μια μαθηματική έκφραση αυτής της ιδέας μπορούμε να δούμε στη θεωρία καταστροφών (Katastrophentheorie) του R. Thom (33). Είναι τελείως αδύνατο να επεξηγήσουμε εδώ τις μαθηματικές ιδέες του Thom γιαυτό περιοριζόμαστε μόνο στο να παραθέσουμε ένα μικρό απόσπασμα από το (33) με την ελπίδα ότι ο αναγνώστης θα πάρει μια ιδέα:

«Για την παραμετρική παράσταση (Parametrisierung) των τοπικών καταστάσεων ενός συστήματος προτείνουμε το παρακάτω μοντέλο. Σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα (differenzierbare Mannigfaltigkeit) M κείται ένα κλειστό υποσύνολο K, το οποίο ονομάζουμε σύνολο «καταστροφών». Όσο το σημείο m, το οποίο αντιπροσωπεύει το σύστημα, δεν συναντάει το σύνολο K, δεν αλλάζει ο τοπικός φαινομενολογικός τύπος του συστήματος (lokale phänomenologische Typ des Systems). Η βασική ιδέα, για την οποία πρόκειται εδώ, είναι ότι η τοπική κατάσταση του υποσυνόλου K, ο τοπολογικός τύπος των ανωμαλιών του (Singularitäte) κ.λ.π., στην πραγματικότητα προσδιορίζονται από τη βασική δυναμική (zugrunde liegende Dynamik), η οποία όμως δεν μπορεί, εν γένει, να περιγραφεί άμεσα. Η μετάλλαξη (Evolution) του συστήματος προσδιορίζεται από ένα διανυσματικό πεδίο X επί του M, και δι' αυτού ορίζεται η μακροσκοπική δυναμική. Όταν το σημείο m συναντά το κλειστό σύνολο K προκύπτει μια ασυνεχής μεταβολή στην φαινομενική εικόνα του συστήματος, και αυτό θα το εκφράζουμε λέγοντας ότι πραγματοποιήθηκε μια μορφογένεση. Οι προαναφερθείσες περιοριστικές υποθέσεις για την τοπική κατάσταση των ανωμαλιών του συνόλου K μας δίνουν τη δυνατότητα να ταξινομούμε και να προβλέπουμε, μέχρι ένα ορισμένο βαθμό, τις ανωμαλίες στη μορφογένεση του συστήαμτος... Το πρόγραμμα λοιπόν που προτείνεται εδώ, τονίζει κυρίως τις ανωμαλίες στη μορφογένεση μιας διαδικασίας, τις ασυνέχειες, που παρατηρούμε στα φαινόμενα... Θα αναφέρουμε μια πολύ γενική ταξινόμηση αυτών των μεταβολών των μορφών, την οποία θα ονομάζουμε «καταστροφές»... Το μοντέλο μας αναφέρεται μόνο στην ταξινόμηση των τοπικών μορφογενετικών διαδικασιών, τις οποίες θα ονομάζουμε «στοιχειώδεις καταστροφές». Όμως η ολική μακροσκοπική εικόνα, η μορφή με τη συνήθη σημασία της λέξης, εμφανίζεται όταν συνέλθουν πολλές μαζί τέτοιες τοπικές διαδικασίες, και η στατιστική αυτών των τοπικών καταστροφών, οι Korrelationen (οι συντελεστές συσχέτισης), οι οποίοι προσδιορίζουν την εμφάνισή της κατά τη διάρκεια μιας δοθείσης διαδικασίας, προσδιορίζονται από την τοπολογική δομή της εσωτερικής δυναμικής... Με τον πλούτο της τοπολογικής δομής αυτής της εσωτερικής δυναμικής... επεξηγείται τελικά η απειρία των φαινομένων του κόσμου και ίσως και η βασική διαφορά μεταξύ του νεκρού και του ζωντανού».

Νομίζουμε ότι δεν υπάρχει κανένα καλύτερο παράδειγμα από το παραπάνω που να δείχνει πως πρέπει να αντιληφθούμε στα Μαθηματικά την ιδέα του Hegel, «ότι η μεταβολές του Είναι δεν είναι γενικά μόνο μια μετάβαση ενός μεγέθους σε ένα άλλο μέγεθος, αλλά είναι μετάβαση από το ποιοτικό στο ποσοτικό και αντιστρόφως, είναι ένα άλλο γίγνεσθαι, το οποίο είναι μια διακοπή του βαθμιαίου και ένα ποιοτικά 'Αλλο σε σχέση με την προϋπάρχουσα ύπαρξη».

'Ετσι φτάνουμε στο τέλος της προσπάθειάς μας που είχε σαν σκοπό να αντιληφθούμε τα Μαθηματικά σαν διαλεκτική κίνηση. Τα συμπεράσματα που θα μπορούσε να βγάλει κανείς από αυτόν τον τρόπο θεώρησης των Μαθηματικών δεν μπορούν να συναχθούν εδώ. 'Οταν κάποιος θέλει να προτείνει συγκεκριμένες αλλαγές στην επιστημονική διαδικασία, θα πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του τις προϋποθέσεις της ατομικής του εργασίας.

Ο σκοπός που θα μπορούσε να έχει ένα άρθρο σαν αυτό, είναι μόνο να συμβάλλει στο να προβληματισθούμε ως προς την επιστήμη μας. Διότι χωρίς ένα τέτοιο προβληματισμό δεν είναι δυνατόν να δικαιολογηθεί σωστά καμιά απαίτησή μας για κάποιες αλλαγές.

LITERATUR

1. Atiyah, M.F.: The Role of Algebraic Topology in Mathematics. J. London Math. Soc. 41 (1966), 63-69.

2. Atiyah, M.F.: Wandel und Fortschritt in der Mathematik. Bild der Wissenschaft 1969, 315-323. Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart.

3. Benacerraf, P.: Putnam, H. Philosophy of Mathematics, Selected Readings. Prentice Hall Englewood Cliffs, N. 5 1964 N.Y.

4. Bishop, E.A.: Schizophrenia in contemporary mathema-

tics. Vervielfältigtes Manuskript. Distributed in conjunction with the Colloquium. Lectures given at the seventy-eight summer meeting of the American Mathematical Society. AMS, 1973.

5. Bourbaki, N.: Die Architektur der Mathematik in: Physik. Blätter, Jg. 17, 1961, S. 161-166 und S. 212-218.

6. Bourbaki, N.: Elemente der Mathematikgeschichte. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1971. Arch. d. Math. u. Phys. 1, 44-63 und 213-237.

7. Cantor, G.: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Herausgegeben von E. Zermelo. Springer, Berlin 1932.

8. Cohen, P.J.: Set Theory and the Continuum Hypothesis. Benjamin, N.Y. 1966.

9. Cohen, P.J., Hersh, R.: Non-Cantorian Set Theory, in: "Mathematics in the Modern World", Readings from Scientific American. Freeman and Co., San Francisco 1968.

10. Courant, R., Robbins, H.: Was ist Mathematik? Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962.

11. Einstein, A.: Grundzüge der Relativitätstheorie. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1956.

12. Gaub, C.F.: Vorrede zu: G. Eisenstein, Mathematische Abhandlungen Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, Reprografischer Nachdruck der Ausgabe Berlin 1847.

13. Havemann, R.: Dialektik ohne Dogma? Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg 1964.

14. Halmos, P.R.: "Nicolas Bourbaki". In: Mathematics in the Modern World. Readings from Scientific American, Freeman and Co., San Francisco 1968.

15. Halmos, P.R.: Innovation in Mathematics. a.a.o.

16. Hegel, G.W.F.: Wissenschaft der Logik. Band III-V der ersten deutschen Ausgabe der Werke Hegels.

17. Hilbert, D.: Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreb zu Paris 1900.

18. Labérenne, P.: Mathematik und Technik, in: Die Wissenschaft im Lichte des Marxismus. Rotdruck 1970.

19. Lenin, W.I.: Philosophische Hefte. Dietz Verlag Berlin 1971.

20. Moritz, R.E.: On Mathematics. A Collection of Witty, Profound, Amusing Passages about Mathematics and Mathematicians. Dover Publ. Inc. N.Y. 1958.

21. MOS: AMS (MOS) Subject Classification Index. American Math. Soc. Providence, Rh. I. 1970.

22. Otte, M., Franke, B., Boob, B.: Gesetzmäbigkeit in der Entwicklung mathematischer Tätigkeit. Diskussionsbeitrag zum internationalen Hegel-Kongreb, Antwerpen 1972.

23. Piaget, Szeminska: Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. 3. Aufl. Klett, Stuttgart 1972.

24. Planungskommission Naturwissenschaften der Univ. Oldenurg: Zur Berufspraxisanalyse des Mathematikers. 1972, Drucksache 473-72.

25. Queneau, R.: Die Dialektik der Mathematik bei Engels, in: Mathematik von Morgen, Nymphenburger Verlagsbuchhandlung 1967.

26. Queneau, R.: Bourbaki und die Mathematik von Morgen. A.a.O.

27. Riemann, B.: Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlab. Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind und H. Weber, 2. Aufl. 1892.

28. Rochhomse, R., Grau, G.: Lenin und die Naturwissenschaften II. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1970.

29. Schulz, G., Heitsch, W.: Philosophische Probleme der Mathematik, in: Naturforschung und Weltbild. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1967.

30. Stegmüller, W.: Metaphysik, Skepsis, Wissenschaft. 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1969.

31. Struik, D.J.: Abriss der Geschichte der Mathematik. 3. Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965.

32. Thom, R.: Modern Mathematics: An educational and philosophic error? American Scientist 59 (1971)

33. Thom, R.: Stabilité structurelle et morphogénèse. Benjamin, Reading, Mass. 1972.

34. Weil, A.: The Future of Mathematics. The Amer. Math. Monthly 57 (1950). 295-306.

35. Weyl, H.: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. 3. Auflage. Oldenbourg, München, Wien 1966.

36. Weyl, H.: David Hilbert and his Mathematical Work, Bull. AMS 50 (1944), 612-654.

37. Wissenschaftsrat: Uberlegungen zu einem mathematischen Grundstudium. In: Empfehlungen zur Struktur und zum Ausbau des Bildungswesens im Hochschulbereich nach 1970, Band 2, Anlagen, Bundesdruckerei, Bonn 1970.

Υ.Κ.: Σ. Παπασταυρίδης