Author: Π.Τ. Μαρκόπουλος

Title: Μερικές Χρήσιμες Παρατηρήσεις για τις Συναρτήσεις: Συνημίτονο, Ημίτονο, Εφαπτομένη, Συνεφαπτομένη, Εκθετική, Λογαριθμική.

Abstract: Στην εργασία αυτή εξετάζεται αν οι τιμές των συναρτήσεων ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, συνεφαπτομένη, εκθετική και λογαριθμική, είναι αριθμοί ρητοί ή αλγεβρικοί άρρητοι ή υπερβατικοί άρρητοι για τις διάφορες τιμές του x του πεδίου ορισμού των.

Creator: HDML

ΜΕΡΙΚΕΣ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ, ΗΜΙΤΟΝΟ, ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ, ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ, ΕΚΘΕΤΙΚΗ, ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ

Π.Τ. Μαρκόπουλος

1. **Εισαγωγή:**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \eta\mu x|\mathbb{R},\ \phi(x) = \sigma\upsilon\nu x|\mathbb{R},\ \sigma(x) =$$
$$= \varepsilon\phi x|\mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2} : \kappa \in \mathbb{Z}\},\ \tau(x) =$$
$$= \sigma\phi x|\mathbb{R} - \{\kappa\pi : \kappa \in \mathbb{Z}\},\ \rho\ (x) = e^x|\mathbb{R}$$

και
$$q(x) = \log x|\mathbb{R}^*_+.$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε, για τις διάφορες τιμές του x του πεδίου ορισμού των προηγουμένων συναρτήσεων, αν οι τιμές των συναρτήσεων είναι αριθμοί ρητοί ή αλγεβρικοί άρρητοι ή υπερβατικοί άρρητοι.

Συμβολίζομε με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών, με $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ το σύνολο των αρρήτων αριθμών, με Α το σύνολο των αλγεβρικών αρρήτων και με Υ το σύνολο των υπερβατικών αρρήτων.

2. **Χρήσιμα λήμματα:**

Στη μελέτη αυτή θα μας χρειαστούν τα εξής 5 λήμματα:

Λήμμα 1: Στο σύνολο Α ισχύουν [1] οι 7 ιδιότητες:

1) Εάν $\alpha \in A \Rightarrow -\alpha \in A$
2) Εάν $\alpha \in Y \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in A$
3) Εάν $\alpha \in A$ και $\rho \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \rho\alpha \in A, \frac{\alpha}{\rho} \in A, \frac{\rho}{\alpha} \in A$
4) Εάν $\alpha \in A$ και $\lambda \in \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda + \alpha \in A$
5) Εάν $\alpha \in A, \lambda \in \mathbb{Q}, \rho \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \lambda + \rho\alpha \in A$
6) Εάν $\alpha \in A$ και ν φυσικός $\geqslant 2 \Rightarrow \alpha^\nu$ ρητός ή $\alpha^\nu \in A$
7) Εάν $\alpha \in A : \alpha > 0$ και ν φυσικός $\geqslant 2 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} \in A$.

Λήμμα 2: Στο σύνολο Υ ισχύουν [2] οι 12 ιδιότητες:

1) Εάν $\alpha \in Y \Rightarrow -\alpha \in Y$

2) Εάν $\alpha \in Y \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha} \in Y$

3) Εάν $\alpha \in Y$ και κ φυσικός $\geqslant 1 \Rightarrow \alpha^\kappa \in Y$

4) Εάν $\alpha \in Y$ και μ ακέραιος $\neq 0 \Rightarrow \alpha^\mu \in Y$

5) Εάν $\alpha \in Y : \alpha > 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} \in Y$

6) Εάν $\alpha \in Y : \alpha > 0$ και κ φυσικός $\geqslant \Rightarrow \sqrt[\kappa]{\alpha} \in Y$

7) Εάν $\alpha \in Y : \alpha > 0$ και $\rho \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \alpha^\rho \in Y$

8) Εάν $\alpha \in Y$, $\rho \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \rho\alpha \in Y$

9) Εάν $\alpha \in Y$, $\lambda \in \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda + \alpha \in Y$

10) Εάν $\alpha \in Y$ και $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\kappa \in \mathbb{Q}$: $\lambda_\kappa \neq 0$ και $\kappa \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_0 + \lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha^2 + \ldots + \lambda_\kappa\alpha^\kappa \in Y$

11) Εάν $\alpha \in Y$, $\rho \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \dfrac{\rho}{\alpha}, \dfrac{\alpha}{\rho} \in Y$

12) Εάν $\alpha \in Y$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\rho \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \lambda + \rho\alpha \in Y$.

Λήμμα 3: Ισχύουν: $ημ1 \in Y$ και $συν1 \in Y$. Μία απόδειξη είναι η εξής: Στο περιοδικό [3] αναφέρεται ότι: $ημ1 \in Y$. Με την βοήθεια του λήμματος 2 έχομε: αφού

$$ημ1 \in Y \Rightarrow ημ^2 1 \in Y \Rightarrow -ημ^2 1 \in Y \Rightarrow 1 - ημ^2 1 \in Y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow συν^2 1 \in Y \Rightarrow \sqrt{συν^2 1} \in Y$$

και αφού $\qquad συν1 > 0 \Rightarrow συν1 \in Y$.

Λήμμα 4: Ισχύουν:

α) Εάν $συνx \in Y \Rightarrow ημx \in Y$

β) Εάν $συνx \in \mathbb{Q} \Rightarrow ημx \in \mathbb{Q}$ ή $ημx \in A$

γ) Εάν $συνx \in A \Rightarrow ημx \in \mathbb{Q}$ ή $ημx \in A$

αποδείξεις:

α) Από το λήμμα 2 έχομε:

αφού $\qquad συνx \in Y \Rightarrow συν^2x \in Y \Rightarrow -συν^2x \in Y \Rightarrow$
$$\Rightarrow 1 - συν^2x \in Y \Rightarrow \sqrt{1 - συν^2x} \in Y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \pm\sqrt{1 - συν^2x} \in Y \Rightarrow ημx \in Y.$$

β) έστω $συνx \in \mathbb{Q}$. Θέτομε: $\quad συνx = \dfrac{\mu}{\nu}$, όπου:

ν φυσικός > 1, μ ακέραιος με $|\mu| < \omega$ και $(\mu,\nu) = 1$. Τότε,

$$συνx = \frac{\mu}{\nu} \in \mathbb{Q} \Rightarrow συν^2x = \frac{\mu^2}{\nu^2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow -συν^2x =$$

$$= -\frac{\mu^2}{\nu^2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 1 - συν^2x = 1 - \frac{\mu^2}{\nu^2} \Rightarrow 1 - συν^2x =$$

$$= \frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{1 - \text{συν}^2 x} = \sqrt{\frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\sqrt{1 - \text{συν}^2 x} = \pm \frac{\sqrt{\nu^2 - \mu^2}}{\nu} \Rightarrow \text{ημ}x = \pm \frac{\sqrt{\nu^2 - \mu^2}}{\nu}$$

Ισχύει: ημx $\in \mathbf{Q}$ εάν $\nu^2 - \mu^2$ είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού και ημx $\in \mathbf{A}$ σαν $\nu^2 - \mu^2$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

γ) Από το λήμμα 1 έχομε:

αφού $\quad \text{συν}x \in A \Rightarrow \text{συν}^2 x \in \mathbf{Q}$

ή $\quad \text{συν}^2 x \in A \Rightarrow -\text{συν}^2 x \in \mathbf{Q}$

ή $\quad -\text{συν}^2 x \in A \Rightarrow 1 - \text{συν}^2 x \in \mathbf{Q}$

ή $\quad 1 - \text{συν}^2 x \in A \Rightarrow \sqrt{1 - \text{συν}^2 x} \in \mathbf{Q}$

ή $\quad \sqrt{1 - \text{συν}^2 x} \in A \Rightarrow \pm\sqrt{1 - \text{συν}^2 x} \in \mathbf{Q}$

ή $\quad \pm\sqrt{1 - \text{συν}^2 x} \in A \Rightarrow \text{ημ}x \in \mathbf{Q}$

ή $\quad \text{ημ}x \in A.$

Λήμμα 5: Ισχύει [4] ο εξής τύπος πολλαπλασίων για το συνημίτονο: $\quad \text{συν}(\nu\phi) =$

$$= \text{συν}^\nu\phi - \binom{\nu}{2}\text{συν}^{\nu-2}\phi \cdot \text{ημ}^2\phi - \binom{\nu}{4}\text{συν}^{\nu-4}\phi \cdot \text{ημ}^4\phi - \ldots,$$

όπου οι δυνάμεις: ν, $\nu - 2$, $\nu - 4$, ... είναι φυσικοί αριθμοί και $\quad \phi \in \mathbb{R}$.

3. 6 Βασικά θεωρήματα:

Θεώρημα 1: Θεωρούμε την συνάρτηση: $\phi(x) = \text{συν}x \mid \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

α) Εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{συν}x \in Y$
β) Εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{συν}(-x) \in Y$
γ) Εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{συν}\,\frac{1}{x} \in Y$
δ) Εάν $x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \text{συν}\,x \in Y$
ε) Εάν $x \in \mathbf{Q}^* \Rightarrow \text{συν}x \in Y$
στ) Εάν $x \in A \Rightarrow \text{συν}x \in Y$
ζ) Εάν $x \in Y \Rightarrow \text{συν}x \in \mathbf{Q}$ ή $\text{συν}\,x \in A$ ή $\text{συν}x \in Y$.

απόδειξεις:

α) Για $x = 1$ ισχύει από το λήμμα 3. Έστω x φυσικός $\geqslant 2$. Από λήμμα 5 για $\phi = 1$ και $\nu = x$ παίρνομε: $\quad$ συνx =

$$= συν^x 1 - \binom{x}{2} συν^{x-2}1 \cdot ημ^2 1 + \binom{x}{4} συν^{x-4}1 \cdot ημ^4 1 - \ldots, \quad (T)$$

Θέτομε: $ημ^2 1 = 1 - συν^2 1$, οπότε από την (T) σχέση παίρνομε:

$$συνx = συν^x 1 - \binom{x}{2} συν^{x-2}1 \cdot (1 - συν^2 1) +$$
$$+ \binom{x}{2} συν^{x-4}1 \cdot (1 - συν^2 1)^2 - \ldots$$

Εκτελούμε πράξεις και τελικά παίρνομε το συνx σαν ένα αλγεβρικό συνδυασμό του αριθμού συν1. Από την ιδιότητα 10 του λήμματος 2 και από το γεγονός συν$1 \in Y$ έχομε: συν$x \in Y$

β) Έστω $x \in \mathbb{N}^*$, τότε: συν$x \in Y$. Όμως: συν$(-x)$ = συνx. Έτσι: $\quad$ συν $(-x) \in Y$).

γ) Θα χρησιμοποιήσουμε την απαγωγή στο άτοπο:

Έστω: $\quad συν \dfrac{1}{x} \notin Y$.

Τότε, θα πρέπει: $\quad συν \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ ή $συν \dfrac{1}{x} \in A$.

1) Έστω: $συν \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Q}$. Από το λήμμα 6 για $\nu = x$ και $\theta = \dfrac{1}{x}$ παίρνομε:

$$συν\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = συν^x \frac{1}{x} - \binom{x}{2} συν^{x-2}\frac{1}{x} \cdot ημ^2 \frac{1}{x} +$$
$$+ \binom{x}{4} συν^{x-4}\frac{1}{x} \cdot ημ^4 \frac{1}{x} - \ldots \qquad (\Sigma)$$

Θέτομε: $ημ^2 \dfrac{1}{x} = 1 - συν^2 \dfrac{1}{x}$, οπότε: από την σχέση (Σ) έχομε:

$$συν1 = συν^x \frac{1}{x} - \binom{x}{2} συν^{x-2}\frac{1}{x} \cdot \left(1 - συν^2 \frac{1}{x}\right) +$$
$$+ \binom{x}{4} συν^{x-4}\frac{1}{x} \cdot \left(1 - συν^2 \frac{1}{x}\right)^2 - \ldots$$

Εκτελούμε στο δεύτερο μέλος τις πράξεις και τελικά παίρνομε το συν1 σαν ένα αλγεβρικό συνδυασμό του $συν \dfrac{1}{x}$. Επειδή συν $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ και $\binom{x}{2}, \binom{x}{4}, \ldots$ ρητοί αριθμοί, έχομε ότι ο αλγεβρικός συνδυασμός του δεύτερου μέλους θα είναι ένας ρητός αριθμός. Δηλαδή, οδηγούμαστε στο άτοπο ότι συν$1 \in \mathbb{Q}$ (ενώ συν $1 \in Y$).

2) Έστω: συν $\frac{1}{x} \in A$. Όπως και προηγουμένως θα φτάσομε σε ένα τύπο όπου το συν 1 θα γράφεται σαν ένας αλγεβρικός συνδυασμός του συν $\frac{1}{x}$. Επειδή συν $\frac{1}{x} \in A$, το δεύτερο μέλος του συνδυασμού αυτού θα μας δώσει ένα ρητό ή ένα αλγεβρικό άρρητο (λόγω του λήμματος 1). Δηλαδή, συν $1 \in \mathbb{Q}$ ή συν $1 \in A$. Τούτο είναι άτοπο διότι συν $1 \in Y$.

δ) Εάν $x \in \mathbb{Z}^*_+ \Rightarrow x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ συν $x \in Y$.
Εάν $-x \in \mathbb{Z}^*_- \Rightarrow \mathbb{Z}^*_+ \Rightarrow x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ συν$x \in Y$. Όμως συν $(-x) =$ συνx. Έτσι συν $(-x) \in Y$.

ε) Διακρίνομε δύο περιπτώσεις: $x \in \mathbb{Q}^*_+$ και $x \in \mathbb{Q}^*_-$
1) Έστω: $x \in \mathbb{Q}^*_+$. Τότε, το x γράφεται με την μορφή:

$$x = \frac{\mu}{\kappa}, \quad \text{όπου:} \quad \mu, \kappa \in \mathbb{N}^* \quad \text{και} \quad (\mu, \kappa) = 1.$$

Από το λήμμα 5 για $\nu = \mu$ και $\theta = \frac{1}{\kappa}$ παίρνομε:

$$\text{συν}\left(\mu \cdot \frac{1}{\kappa}\right) = \text{συν}^{\mu}\frac{1}{\kappa} - \binom{\mu}{2}\text{συν}^{\mu-2}\frac{1}{\kappa} \cdot \text{ημ}^2\frac{1}{\kappa} + $$

$$+ \binom{\mu}{4}\text{συν}^{\mu-4}\frac{1}{\kappa} \cdot \text{ημ}^4\frac{1}{\kappa} - \ldots \qquad (P)$$

Θέτομε: ημ$^2 \frac{1}{\kappa} = 1 -$ συν$^2 \frac{1}{\kappa}$, οπότε από την σχέση (P) έχομε:

$$\text{συν}x = \text{συν}\frac{\mu}{\kappa} = \text{συν}^{\mu}\frac{1}{\kappa} - \binom{\mu}{2}\text{συν}^{\mu-2}\frac{1}{\kappa} \cdot \left(1 - \text{συν}^2\frac{1}{\kappa}\right) +$$

$$+ \binom{\mu}{4}\text{συν}^{\mu-4}\frac{1}{\kappa} \cdot \left(1 - \text{συν}^2\frac{1}{\kappa}\right)^2 - \ldots$$

Εκτελούμε στο δεύτερο μέλος τις πράξεις και τελικά παίρνομε το συνx σαν ένα αλγεβρικό συνδυασμό του συν $\frac{1}{\kappa}$. Όμως $\kappa \in \mathbb{N}^*$. Έτσι συν $\frac{1}{\kappa} \in Y$. Οπότε ο αλγεβρικός συνδυασμός του συν $\frac{1}{\kappa}$ (από την ιδιότητα 10 του λήμματος 2) είναι υπερβατικός άρρητος. Δηλαδή συν$x \in Y$.

2) Έστω $x \in \mathbb{Q}^*_-$. Τότε: $x = -\frac{\mu}{\kappa}$, όπου: $\mu, \kappa \in \mathbb{N}^*$ και $(\mu, \kappa) = 1$. Έτσι $\text{συν}x = \text{συν}\left(-\frac{\mu}{\kappa}\right) = \text{συν}\frac{\mu}{\kappa}$. Από την πρώτη περίπτωση (επειδή: $\frac{\mu}{\kappa} \in \mathbb{Q}^*_+$) έχομε: $\text{συν}\frac{\mu}{\kappa} \in Y$, δηλαδή: $\text{συν}\,x \in Y$.

στ) Θα χρησιμοποιήσομε την απαγωγή στο άτοπο:
έστω $\text{συν}x \notin Y$. Τότε, θα πρέπει: $\text{συν}x \in \mathbb{Q}$ ή $\text{συν}x \in A$.

1) έστω: $\text{συν}x \in \mathbb{Q}$. Τότε, υπάρχει $\frac{\mu}{\nu} \in \mathbb{Q}$ τέτοιος, ώστε: $\text{συν}x = \frac{\mu}{\nu}$. Πάλι, υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\text{συν}x = \text{συν}\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z} \qquad (K)$$

Προφανώς: $\theta \notin Y$ (αλλιώς: για $\kappa = 0 \Rightarrow x = \theta$. Δηλαδή $x \in Y$, άτοπο αφού $x \in A$).

Αφού $\theta \notin Y \Rightarrow \theta \in \mathbb{Q}$ ή $\theta \in A$. Από την σχέση (K) και από το λήμμα 2 έχομε: $x \in Y$, άτοπο διότι: $x \in A$.

2) Έστω: $\text{συν}x \in A \Rightarrow \text{συν}x = \alpha,\ \alpha \in A \Rightarrow \exists\ \theta \in \mathbb{R}$:

$$\text{συν}\theta = \alpha.$$

Έτσι
$$\text{συν}x = \text{συν}\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z} \qquad (\Lambda)$$

Προφανώς: $\theta \notin Y$ (αλλιώς: για $\kappa = 0 \Rightarrow x = \theta$, δηλαδή $x \in Y$, άτοπο αφού $x \in A$).

Αφού $\theta \notin Y \Rightarrow \theta \in \mathbb{Q}$ ή $\theta \in A$. Από την σχέση (Λ) και από το λήμμα 2 έχομε: $x \in Y$, άτοπο διότι: $x \in A$.

ζ) Δίνομε τα εξής αντιπαραδείγματα:

1) Εάν $x = \frac{\pi}{3} \in Y \Rightarrow \text{συν}x = \text{συν}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

2) Εάν $x = \frac{\pi}{6} \in Y \Rightarrow \text{συν}x = \text{συν}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \in A$

3) Εάν $x = \pi + 1 \in Y \Rightarrow \text{συν}x = \text{συν}(\pi + 1) =$
$\text{συν}\pi \cdot \text{συν}1 - \text{ημ}\pi \cdot \text{ημ}1 = -\text{συν}1 \in Y$.

Παραδείγματα: Οι αριθμοί: $\text{συν}\,4$, $\text{συν}\frac{1}{5}$, $\text{συν}\,100$, $\text{συν}(-50)$, $\text{συν}\frac{2}{3}$, $\text{συν}\left(-\frac{4}{5}\right)$, $\text{συν}(1 + \sqrt[3]{3})$, $\text{συν}(\pi + 2)$ είναι υπερβατικοί άρρητοι.

Θεώρημα 2: Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = \eta\mu x | \mathbb{R}$.

Τότε ισχύουν: α) Εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \eta\mu x \in Y$

β) Εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \eta\mu\,(-x) \in Y$

γ) Εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \eta\mu\,\dfrac{1}{x} \in Y$

δ) Εάν $x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \eta\mu x \in Y$

ε) Εάν $x \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \eta\mu x \in Y$

στ) Εάν $x \in A \Rightarrow \eta\mu x \in Y$

ζ) Εάν $x \in Y \Rightarrow \eta\mu x \in \mathbb{Q}$ ή $\eta\mu x \in A$ ή $\eta\mu x \in Y$.

αποδείξεις:

α) Έστω $x \in \mathbb{N}^*$. από το θεώρημα 1 έχομε: $\sigma\upsilon\nu x \in Y$. Από το λήμμα 4 έχουμε: $\eta\mu x \in Y$.

β), γ), δ), ε), στ): Οι αποδείξεις γίνονται όπως στο α) με την βοήθεια του θεωρήματος 1 και του λήμματος 4.

ζ) Δίνομε τα εξής αντιπαραδείγματα:

1) εάν $x = \dfrac{\pi}{6} \in Y \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

2) Εάν $x = \dfrac{\pi}{3} \in Y \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \in A$

3) Εάν $x = \pi + 1 \in Y \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\,(\pi + 1) =$
$= \eta\mu\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 1 + \eta\mu 1 \cdot \sigma\upsilon\nu\pi = -\,\eta\mu 1 \in Y$.

Παραδείγματα: Οι αριθμοί: $\eta\mu 3$, $\eta\mu\dfrac{1}{6}$, $\eta\mu 200$, $\eta\mu(-30)$, $\eta\mu\dfrac{4}{5}$, $\eta\mu\left(-\dfrac{7}{8}\right)$, $\eta\mu\sqrt{3}$, $\eta\mu(3 + \sqrt[4]{2})$, $\eta\mu(\pi + 2)$ είναι υπερβατικοί άρρητοι.

Θεώρημα 3: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\sigma(x) = \varepsilon\varphi x \mid \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2} : \kappa \in \mathbb{Z}\}.$$

Τότε ισχύουν: α) Εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \varepsilon\varphi x \in Y$

β) Εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \varepsilon\varphi\,(-x) \in Y$

γ) Εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \varepsilon\varphi\,\dfrac{1}{x} \in Y$

δ) Εάν $x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \varepsilon\varphi x \in Y$

ε) Εάν $x \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \varepsilon\varphi x \in Y$

στ) Εάν $x \in A \Rightarrow \varepsilon\varphi x \in Y$

ζ) Εάν $x \in Y - \{\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} : \kappa \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ εφ $x \in \mathbb{Q}$ ή εφ$x \in A$ ή εφ$x \in Y$.

Αποδείξεις:

α) έστω $x \in \mathbb{N}^*$. Από το θεώρημα 1 έχομε: συν $x \in Y$. Από το λήμμα 2 έχομε:

$$\text{συν}^2 x \in Y \Rightarrow \frac{1}{\text{συν}^2 x} \in Y \Rightarrow \frac{1}{\text{συν}^2 x} - 1 \in Y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\text{συν}^2 x} - 1} \in Y \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{1}{\text{συν}^2 x} - 1} \in Y \Rightarrow \text{εφ}x \in Y.$$

β) έστω $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ εφ$x \in Y \Rightarrow -$ εφ$x \in Y \Rightarrow$ εφ$(-x) \in Y$.

γ) έστω $x \in \mathbb{N}^*$. Από το θεώρημα 1 έχομε: συν $\frac{1}{x} \in Y$. Από το λήμμα 2 προκύπτει:

$$\text{συν}^2 \frac{1}{x} \in Y \Rightarrow \frac{1}{\text{συν}^2 \frac{1}{x}} - 1 \in Y \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\text{συν}^2 \frac{1}{x}} - 1} \in Y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm \sqrt{\frac{1}{\text{συν}^2 \frac{1}{x}} - 1} \in Y \Rightarrow \text{εφ}\frac{1}{x} \in Y.$$

δ) έστω $x \in \mathbf{Z}^*$. Τότε: $x \in \mathbf{Z}^*_+$ ή $x \in \mathbf{Z}^*_-$. Από α) και β) έχομε: εφ$x \in Y$.

ε), στ) οι αποδείξεις γίνονται όπως στο α).

ζ) δίνομε τα εξής αντιπαραδείγματα:

1) εάν $x = \frac{\pi}{4} \in Y \Rightarrow$ εφ$x =$ εφ $\frac{\pi}{4} = 1 \in \mathbb{Q}$

2) εάν $x = \frac{\pi}{3} \in Y \Rightarrow$ εφ$x =$ εφ $\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \in A$

3) εάν $x = \pi + 1 \in Y \Rightarrow$ εφ$x =$ εφ $(\pi + 1) =$

$$= \frac{\text{εφ}\pi + \text{εφ}1}{1 - \text{εφ}\pi \cdot \text{εφ}1} = \text{εφ}1 \in Y.$$

Παραδείγματα: οι αριθμοί: εφ 5, εφ $\frac{1}{7}$, εφ 300, εφ (-40),

$\varepsilon\varphi\, \frac{7}{8}$, $\varepsilon\varphi \left(-\frac{9}{5}\right)$, $\varepsilon\varphi\, \sqrt{7}$, $\varepsilon\varphi\, (4 + \sqrt[3]{3})$, $\varepsilon\varphi\, (\pi + 2)$ είναι υπερβατικοί άρρητοι.

Θεώρημα 4: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\tau(x) = \sigma\varphi x | \mathbb{R} - \{\kappa\pi : \kappa \in Z\}.$$

Τότε, ισχύουν:

α) εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sigma\varphi x \in Y$

β) εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sigma\varphi(-x) \in Y$

γ) εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sigma\varphi\, \frac{1}{x} \in Y$

δ) εάν $x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \sigma\varphi x \in Y$

ε) εάν $x \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \sigma\varphi x \in Y$

στ) εάν $x \in A \Rightarrow \sigma\varphi x \in Y$

ζ) εάν $x \in Y \Rightarrow \sigma\varphi x \in \mathbb{Q}$ ή $\sigma\varphi x \in A$ ή $\sigma\varphi x \in Y$.

Αποδείξεις:

α) έστω $x \in \mathbb{N}^*$. Από το θεώρημα 3 έχομε: $\varepsilon\varphi x \in Y$. Από το λήμμα 2 έχομε: $\frac{1}{\varepsilon\varphi x} \in Y \Rightarrow \sigma\varphi x \in Y$.

Οι αποδείξεις των β), γ), δ), ε), στ) γίνονται όπως στο α).

ζ) έχομε το εξής αντιπαράδειγμα:

1) εάν $x = \frac{\pi}{4} \in Y \Rightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\, \frac{\pi}{4} = 1 \in \mathbb{Q}$

2) εάν $x = \frac{\pi}{6} \in Y \Rightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\, \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \in A$

3) εάν $x = \pi + 1 \in Y \Rightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi(\pi + 1) = \frac{1}{\varepsilon\varphi(\pi + 1)} =$

$= \frac{1}{\varepsilon\varphi 1} = \sigma\varphi 1 \in Y.$

Παραδείγματα: οι αριθμοί: $\sigma\varphi 2$, $\sigma\varphi\sqrt{8}$, $\sigma\varphi 13$, $\sigma\varphi(-15)$, $\sigma\varphi(-4 + \sqrt{6})$, $\sigma\varphi\, \frac{2}{7}$, $\sigma\varphi(-\frac{3}{11})$ είναι υπερβατικοί άρρητοι.

Θεώρημα 5: Θεωρούμε την συνάρτηση: $r(x) = e^x | \mathbb{R}$. Τότε, ισχύουν:

α) εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow e^x \in Y$

β) εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow e^{-x} \in Y$

γ) εάν $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \in Y$

δ) εάν $x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow e^x \in Y$

ε) εάν $x \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow e^x \in Y$

στ) εάν $x \in A \Rightarrow e^x \in Y$

ζ) εάν $x \in Y \Rightarrow e^x \in \mathbb{Q}$ ή $e^x \in A$ ή $e^x \in Y$

Αποδείξεις:

Οι προτάσεις α), β), γ), δ), ε) ισχύουν από το λήμμα 2.

στ) Από [5], (επειδή $x \in A \Rightarrow x$ αλγεβρικός αριθμός) έχομε ότι ο αριθμός e^x δεν πρέπει να είναι αλγεβρικός. 'Αρα: $e^x \in Y$.

ζ) έχομε τα εξής παραδείγματα:

1) εάν $x = \pi \in Y \Rightarrow e^\pi \in Y$, [6].

2) εάν $x = \log 2 \in Y$ (βλέπε θεώρημα 6) $\Rightarrow e^x = e^{\log 2} = 2 \in \mathbb{Q}$

3) εάν $x = \log\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \log 2 \in Y \Rightarrow e^x = e^{\log\sqrt{2}} = \sqrt{2} \in A$.

Παραδείγματα: Οι αριθμοί: e^3, $e^{1/4}$, $e^{2/5}$, $e^{-3/7}$, e^{-5}, $e^{\sqrt{2}}$, $e^{3\sqrt{3}}$ είναι υπερβατικοί άρρητοι.

Θεώρημα 6: Θεωρούμε την συνάρτηση $q(x) = \log x | \mathbb{R}^*_+$. Τότε, ισχύουν:

α) Εάν $x \in \mathbb{N}^* - \{1\} \Rightarrow \log x \in Y$

β) Εάν $x \in \mathbb{N}^* - \{1\} \Rightarrow \log \frac{1}{x} \in Y$

γ) Εάν $x \in \mathbb{Q}^*_+ - \{1\} \Rightarrow \log x \in Y$

δ) Εάν $x \in A : x > 0 \Rightarrow \log x \in Y$

ε) Εάν $x \in Y : x > 0 \Rightarrow \log x \in \mathbb{Q}$ ή $\log x \in A$ ή $\log x \in Y$.

Αποδείξεις:

α) έστω $x \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Εάν $\log x \notin Y$, τότε, πρέπει: $\log x \in \mathbb{Q}$ ή $\log x \in A$.

1) έστω: $\log x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \log x = p,\ p \in \mathbb{Q} \Rightarrow e^p = x$. Από το θεώρημα 5 έχομε: $e^p \in Y \Rightarrow x \in Y$, άτοπο διότι:

$$x \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

2) έστω: $\log x \in A \Rightarrow \log x = \alpha,\ \alpha \in A \Rightarrow e^{\alpha} = x$. Από το θεώρημα 5 έχομε: $e^{\alpha} \in Y \Rightarrow x \in Y$, άτοπο διότι:

$$x \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

β) έστω $x \in \mathbb{N}^* - \{1\} \Rightarrow \log x \in Y$. Από το λήμμα 2 έχομε: $-\log x \in Y \Rightarrow 0 - \log x \in Y \Rightarrow \log 1 - \log x \in Y \Rightarrow \log \frac{1}{x} \in Y$.

γ) έστω $x \in \mathbb{Q}^*_+ - \{1\}$. Υποθέτομε ότι: $\log x \notin Y$. Τότε, πρέπει: $\log x \in \mathbb{Q}$ ή $\log x \in A$.

1) Εάν $\log x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \log x = p,\ p \in \mathbb{Q} \Rightarrow e^p = x$. Από το θεώρημα 5 έχομε: $e^p \in Y$, δηλαδή: $x \in Y$. Τούτο είναι άτοπο διότι: $x \in \mathbb{Q}^*_+ - \{1\}$.

2) Εάν $\log x \in A \Rightarrow \log x = \alpha,\ \alpha \in A \Rightarrow e^{\alpha} = x$. Από το θεώρημα 5 πρέπει: $e^{\alpha} \in Y$. Δηλαδή $x \in Y$, άτοπο διότι

$$x \in \mathbb{Q}^*_+ - \{1\}.$$

δ) έστω $x \in A : x > 0$. Υποθέτομε ότι $\log x \notin Y$. Τότε,

ή $\log x \in \mathbb{Q}$ ή $\log x \in A$.

1) εάν $\log x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \log x = p,\ p \in \mathbb{Q} \Rightarrow e^p = x$. Από το θεώρημα 5 πρέπει: $e^p \in Y$. Δηλαδή: $x \in Y$, άτοπο διότι·

$$x \in A : x > 0.$$

2) εάν $\log x \in A \Rightarrow \log x = \alpha,\ \alpha \in A \Rightarrow e^{\alpha} = x$. Από το θεώρημα 5 πρέπει: $e^{\alpha} \in Y$. Δηλαδή: $x \in Y$, άτοπο διότι·

$$x \in A : x > 0.$$

Έτσι πρέπει: $\log x \in Y$.

ε) Έχομε το εξής αντιπαράδειγμα:

1) εάν $x = e \in Y \Rightarrow \log x = \log e = 1 \in \mathbb{Q}$

2) εάν $x = e^{\sqrt{2}} \in Y \Rightarrow \log x = \log e^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \in A$

3) εάν $x = e^{\pi} \in Y$ [6] $\Rightarrow \log x = \log e^{\pi} = \pi \in Y$.

Παραδείγματα: οι αριθμοί $\log 3$, $\log\frac{1}{4}$, $\log 2e$, $\log\sqrt{5}$, $\log\frac{5}{4}$, $\log e^{2\pi}$ είναι υπερβατικοί άρρητοι.

Παρατηρήσεις:

1) Θεωρούμε την συνάρτηση $E(x)\ \alpha^x|\mathbb{R}$, όπου:

$$\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}.$$

Επειδή ισχύει: $E(x) = \alpha^x = e^{x\log\alpha}$ γίνεται φανερό πώς γνωρίζοντας το είδος των αριθμών x και α μπορούμε να βρούμε το είδος των τιμών της συνάρτησης E(x).

2) Θεωρούμε την συνάρτηση $L(x) = \log_\alpha x|\mathbb{R}_+^*$, όπου:

$$\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}.$$

Επειδή ισχύει: $L(x) = \log_\alpha x = \dfrac{\log x}{\log \alpha}$ προκύπτει ότι γνωρίζοντας το είδος των αριθμών x και α μπορούμε να βρούμε το είδος των τιμών της συνάρτησης L(x).

Παραδείγματα: οι αριθμοί $\log_3 e^2$, $\left(\dfrac{1}{e}\right)^\pi$ είναι υπερβατικοί άρρητοι.

4. Προτεινόμενες ασκήσεις:

1) δείξατε ότι εάν ημx ∈ Υ ⇒ συνx ∈ Υ
2) δείξατε ότι εάν ημx ∈ $\mathbb{Q}$ ⇒ συνx ∈ $\mathbb{Q}$ ή συνx ∈ A
3) δείξατε ότι εάν ημx ∈ A ⇒ συνx ∈ $\mathbb{Q}$ ή συνx ∈ A
4) δείξατε ότι εάν εφx ∈ Υ ⇒ συνx ∈ Υ
5) δείξατε ότι εάν σφx ∈ Υ ⇒ ημx ∈ Υ
6) δείξατε ότι εάν εφx ∈ $\mathbb{Q}$ ⇒ συνx ∈ $\mathbb{Q}$ ή συνx ∈ A
7) δείξατε ότι εάν εφx ∈ A ⇒ συνx ∈ $\mathbb{Q}$ ή συνx ∈ A
8) δείξατε ότι εάν σφx ∈ $\mathbb{Q}$ ⇒ σφx ∈ $\mathbb{Q}$ ή σφx ∈ A
9) δείξατε ότι εάν σφx ∈ A ⇒ σφx ∈ $\mathbb{Q}$ ή σφx ∈ A
10) δείξατε ότι η διαφορά δύο φυσικών λογαρίθμων αλγεβρικών αριθμών είναι είτε ρητός είτε υπερβατικός αριθμός
11) δείξατε ότι ο λόγος δύο φυσικών λογαρίθμων αλγεβρικών αριθμών είναι είτε ρητός είτε υπερβατικός (υπόδειξη: χρήσιμη είναι η πρόταση [7]).

5. Βιβλιογραφία — Επεξηγήσεις:

[1] Μία απόδειξη, βλέπε το περιοδικό «Μαθηματική Επιθεώρηση», τεύχος 26, σελ. 28-29, εκδόσεις ΕΜΕ.

[2] Βλέπε ίδιο περιοδικό, σελ. 23-28.

[3] «Ευκλείδης Γ'», τεύχος 6, σελ. 44, εκδόσεις ΕΜΕ.

[4] Μία απόδειξη, βλέπε «ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ», Γ' ΤΟΜΟΣ, σελ. 203, εκδόσεις ΠΑΓΟΥΛΑΤΟΣ.

[5] Στην σελίδα 221 του τόμου Ε της «Εγκυκλοπαίδειας των Μαθηματικών», εκδόσεις ΠΑΓΟΥΛΑΤΟΣ, υπάρχει η πρόταση: «Εάν $\alpha \neq 0$, τότε είναι αδύνατον οι α και e^{α} να είναι αμφότεροι αλγεβρικοί αριθμοί». Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων.

[6] «Ευκλείδης Γ΄», τεύχος 6, σελ. 44, εκδόσεις ΕΜΕ.

[7] Ισχύει η πρόταση του DAVID HILBERT (1862-1943): «Εάν α αλγεβρικός, διάφορος του 0 και του 1, και β άρρητος αλγεβρικός, τότε ο αριθμός α^{β} είναι υπερβατικός άρρητος.

6.2 Μαθηματικά Ερωτήματα:

1) Υπάρχουν στα Μαθηματικά αλγεβρικοί άρρητοι αριθμοί (δηλαδή, αριθμοί που είναι ρίζες πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές) τέτοιοι, ώστε όταν τους γράφουμε **να μη** χρησιμοποιούμε γι' αυτούς το σύμβολο της τετραγωνικής (γενικώτερα της νιοστής) ρίζας;

2) Ο αριθμός $x = 0,1010010001...$ είναι άρρητος. Είναι όμως αλγεβρικός ή υπερβατικός; Γενικώτερα, πως μπορούμε να διακρίνουμε αν ένας άρρητος αριθμός, όταν τεθεί στην δεκαδική του μορφή, είναι αλγεβρικός ή υπερβατικός;

Υπεύθυνος Κρίσης: Α. Τσιακατάρας