Author: Γ. Τσίντσιφας

Title: Η Ανισότητα Α.Μ. – Γ.Μ.

Abstract: Η γνωστή ανισότητα μεταξύ του αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου και μη αρνητικών πραγματικών αριθμών είναι βασική και θεμελιώδης για την ανάπτυξη της θεωρίας των ανισοτήτων. Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται μια ακόμα νέα απόδειξη της ανισότητας μεταξύ Α.Μ. – Γ.Μ..

Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ Α.Μ. — Γ.Μ.

Γ. Τσίντσιφας

Η γνωστή ανισότητα μεταξύ του αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου n μη αρνητικών πραγματικών αριθμών είναι βασική και θεμελιώδης για την ανάπτυξη της θεωρίας των ανισοτήτων. Υπάρχουν διάφορες αξιόλογες αποδείξεις της παραπάνω ανισότητας. Όλες έχουν ξεχωριστό ενδιαφέρον και συγκεντρωμένες, δώδεκα αποδείξεις, βρίσκονται στο [1]. Σε Ελληνικό κείμενο μπορεί ο αναγνώστης να βρει μερικές στο [2].

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μια καινούρια ανισότητα μεταξύ $n+1$ μη αρνητικών πραγματικών αριθμών $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ την

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(x+x_i)}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x+x_i)\right]^n} \geq \frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]^n} \qquad (1)$$

και θα ακολουθήσει μια νέα απόδειξη της ανισότητας μεταξύ Α.Μ. — Γ.Μ. η οποία παρουσιάστηκε πρώτη φορά στο [3]. Ακόμη θα δώσουμε μια σειρά εφαρμογών της (1) όπως και της ανισότητας Α.Μ. — Γ.Μ.

1. Η ανισότητα Gauchy-Schwarz, ως γνωστό, μπορεί να προκύψει από το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

$$\vec{\alpha}\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n),\ \vec{\beta}\ (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)$$

Διότι
$$|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \geq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

ή ακόμη
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2.$$

Άμεση εφαρμογή της παραπάνω για

$$\alpha_i^2 = x + x_i > 0, \quad \beta_i^2 = \frac{1}{x + x_i} > 0$$

είναι η ανισότητα:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (x + x_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x + x_i}\right] \geq n^2 \tag{2}$$

2. Θέτομε $g(x) = \prod_{i=1}^{n} (x + x_i)$ και $f(x) = \dfrac{g(x)}{\left[\sum_{i=1}^{n} (x + x_i)\right]^n}$

όπου $x_1, x_2, \ldots x_n > 0,\ x \geq 0$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x + x_i}$$

εύκολα βλέπουμε:

$$f'(x) = \frac{g(x)\left[\sum_{i=1}^{n} (x + x_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x + x_i}\right] - n^2 g(x)}{\left[\sum_{i=1}^{n} (x + x_i)\right]^{n+1}}. \tag{3}$$

Από τις (2), (3) διαπιστώνουμε: $f'(x) \geqslant 0$, δηλαδή η συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα για $x \geqslant 0$, άρα $f(x) \geqslant f(0)$ και η (1) απεδείχθει.

Εύκολα τώρα φαίνεται ότι $f(x) \leqslant 1$, δηλαδή η αύξουσα συνάρτηση $f(x)$ είναι φραγμένη άνω, άρα συγκλίνει. Για $x \to +\infty$ βλέπουμε ότι η $f(x)$ έχει όριο τον αριθμό $\frac{1}{n^n}$, δηλαδή

$$\frac{1}{n^n} \geqslant \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{[x_1 + x_2 + \ldots + x_n]^n} \tag{3}$$

3. Εφαρμογές της (1).

Έστω $\sum_{i=1}^{p} \kappa_i = n$ όπου $\kappa_i \in \mathbb{N}^*$ και ότι από τους n αριθμούς $x_1, x_2, \ldots x_n$ ένα πλήθος κ_i είναι ίσοι με α_i, $i = 1, 2, 3, \ldots p$.

Από την (1) θα έχουμε:

$$\frac{(x+\alpha_1)^{\kappa_1}\cdot(x+\alpha_2)^{\kappa_2}\dots(x+\alpha_p)^{\kappa}}{[(\kappa_1+\kappa_2+\dots+\kappa_p)x+\alpha_1\kappa_1+\alpha_2\kappa_2+\dots+\alpha_p\kappa_p]^n}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\alpha_1^{\kappa_1}\,\alpha_2^{\kappa_2}\dots\alpha_p^{\kappa_p}}{[\alpha_1\kappa_1+\alpha_2\kappa_2+\dots+\alpha_p\kappa_p]^n}$$

ή τελικά

$$\prod_{i=1}^{p}\left(1+\frac{x}{\alpha_i}\right)^{\kappa_i}\geqslant\left[1+\frac{nx}{\alpha_1\kappa_1+\alpha_2\kappa_2+\dots+\alpha_p\kappa_p}\right]^n. \quad (4)$$

Η παραπάνω (4) για $x=1$ γίνεται:

$$\prod_{i=1}^{p}\left(1+\frac{1}{\alpha_i}\right)^{\kappa_i}\geqslant\left[1+\frac{n}{\alpha_1\kappa_1+\alpha_2\kappa_2+\dots+\alpha_p\kappa_p}\right]^n. \quad (5)$$

για $x=\frac{1}{n}$.

$$\prod_{i=1}^{p}\left(1+\frac{1}{n\alpha_i}\right)^{\kappa_i}\geqslant\left[1+\frac{1}{\alpha_1\kappa_1+\dots+\alpha_p\kappa_p}\right]^n. \quad (6)$$

και για $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_p=1,\ \ p=n$

$$\left(1+\frac{x}{\alpha_1}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{\alpha_2}\right)\dots\left(1+\frac{x}{\alpha_n}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left[1+\frac{nx}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}\right]^n. \quad (7)$$

4. Εφαρμογές της ανισότητας Α.Μ — Γ.Μ.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι μια επέκταση της ανισότητας Bernoulli προκύπτει από την παρακάτω μορφή της Α.Μ. — Γ.Μ., την οποία παίρνουμε από την (3′)

$$\left[\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right]^n\geqslant x_1x_2\dots x_n \quad (8)$$

Πράγματι στην (8) θέτομε

$x_1=x_2=\dots=x_\kappa=x+n,\ \ x_{\kappa+1}=x_{\kappa+2}=\dots=x_n=x>0$

οπότε γίνεται:

$$\left[\frac{(x+n)\kappa + x(n-\kappa)}{n}\right]^n \geqslant (x+n)^\kappa x^{n-\kappa}$$

$$\text{ή} \quad \left(1+\frac{\kappa}{x}\right)^n \geqslant \left(1+\frac{n}{x}\right)^\kappa$$

ή τελικά $(1+\kappa\alpha)^n \geqslant (1+n\alpha)^\kappa$, $\frac{1}{x}=\alpha$, που για $\kappa=1$ δίνει τη γνωστή ανισότητα Bernoulli.

Αν στην ανισότητα Α.Μ. — Γ.Μ. τεθεί

$$x_1 = x_2 = \dots = x_\kappa = x - n \geqslant 0,$$

$$x_{\kappa+1} = x_{\kappa+2} = \dots = x_n = x > 0$$

και εργαστούμε με ανάλογο τρόπο λαμβάνομε

$$\left(1-\frac{\kappa}{x}\right)^n \geqslant \left(1-\frac{n}{x}\right)^\kappa$$

που για $\frac{1}{x}=\alpha$ γίνεται $(1-\kappa\alpha)^n \geqslant (1-n\alpha)^\kappa$, όπου

$\frac{1}{\alpha} \geqslant n$ και για $\kappa = 1$ δίνει τη γνωστή ανισότητα

$$(1-\alpha)^n \geqslant 1 - n\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}.$$

Βιβλιογραφία

1. E. Beckenbach, R. Bellman, Inequalities, Springer - Verlag 1971.
2. Σ. Μπαλλής, Ανισότης Gauchy, Σύγχρονον 1972 ('Εκδοση Συγχρόνου Φροντιστηρίου)
3. Tsintsifas, Another proof of the A.M.-G.M. inequality, Crux Mathematicorum Vol 8 No 6 June-July 1982.

Υπεύθυνος Κρίσης: Σ. Λεκάκη.