Author: Νικόλαος Αρτεμιάδης

Title: Εκπαιδευτικά συστήματα και Μαθηματική Παιδεία

Abstract: Συμπεράσματα των κατά καιρούς ισχυσάντων και ισχυόντων εκπαιδευτικών συστημάτων έναντι μαθηματικής παιδείας

Μαθηματική Επιθεώρηση τ. 48, 1997

Εκπαιδευτικά συστήματα και Μαθηματική Παιδεία

Ομιλία του Ακαδημαϊκού κ. Νικολάου Κ. Αρτεμιάδη

Στην ΕΚΤΑΚΤΗ ΣΥΝΕΔΡΙΑ της 16ης Ιανουαρίου 1996

της ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ*

Κύριε Πρόεδρε,
Κύριοι Συνάδελφοι,
Κυρίες και Κύριοι,

Ο σκοπός της σημερινής ομιλίας είναι να εξετάσομε, εν συντομία, τη συμπεριφορά των κατά καιρούς ισχυσάντων και ισχυόντων Εκπαιδευτικών Συστημάτων (ΕΣ) έναντι της Μαθηματικής Παιδείας, να εκθέσουμε την από μακρού χρόνου επικρατούσα νοσηρή κατάσταση στον τομέα αυτό (και όχι μόνο στην Ελλάδα) και να καταλήξουμε σε γενικά μεν αλλά σαφή συμπεράσματα που αφορούν αναγκαία μέτρα τα οποία πρέπει να ληφθούν για την εξυγίανση της εν λόγω καταστάσεως.

Εξάλλου μια προσπάθεια όπως η σημερινή εμπίπτει στους σκοπούς της Ακαδημίας Αθηνών, οι οποίοι επιτυγχάνονται δι' ανακοινώσεων, συζητήσεων, ομιλιών, δημοσιευμάτων κ.λ.π., ήτοι δια πράξεων και έργων προερχομένων είτε εκ της ιδίας πρωτοβουλίας της Ακαδημίας είτε όταν αυτή αποδέχεται την εκτέλεση έργων ανατιθεμένων εις αυτήν υπό τους Κράτους ή άλλων ιδρυμάτων και ιδιωτών.

Και προχωρώ στην ανάπτυξη του θέματός μου.

Θα ήθελα εξ αρχής να καταστήσω γνωστό ότι τις ιδέες και απόψεις τις οποίες θα προσπαθήσω να παρουσιάσω συμμερίζεται ένας μεγάλος αριθμός συναδέλφων μαθηματικών εδώ στην Ελλάδα και στο Εξωτερικό.

Τα ΕΣ τα οποία έχω υπόψη είναι των χωρών εκείνων όπου έτυχε να εργασθώ υπό την επιστημονική μου ιδιότητα. Έχω όμως τη γνώμη ότι όσα θα λεχθούν ισχύουν και για πολλά άλλα ΕΣ.

Τα περισσότερα εκ των εν λόγω ΕΣ θεώρησαν τα μαθηματικά ως μία τεχνική ικανότητα για αριθμητικούς υπολογισμούς, μερικοί μάλιστα χρησιμοποίησαν τον όρο "ποσοτικώς σκέπτεσθαι" για να περιγράψουν την εφαρμογή των μαθηματικών

---

* Αναδημοσιεύεται από τα Πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών.

σε περιοχές που αφορούν άλλες επιστήμες.

Η παραπάνω αντίληψη είναι τελείως εσφαλμένη και παρεκώλυσε σοβαρά την ικανότητα των σπουδαστών μας να αντιληφθούν σπουδαίες προόδους που συντελέσθηκαν στο χώρο των Θετικών Επιστημών και της φιλοσοφικής σκέψης, και τούτο διότι κατ' αυτόν τον τρόπο αγνοήθηκε το γεγονός ότι τα μαθηματικά αποτελούν τη μια εκ των συνιστωσών κάθε σχεδίου φιλελεύθερης παιδείας. Ως μητέρα όλων των επιστημών, η Επιστήμη των Μαθηματικών οικοδομεί τη γόνιμη φαντασία, είναι η υφάντρια προτύπων καθαρής και λεπτής σκέψης, ο οραματιστής, ο ποιητής.

Είναι γνωστό, όχι μόνο στην Ελλάδα αλλά και σε άλλες χώρες, όπως λ.χ. στις USA, ότι παρατηρείται έντονο ενδιαφέρον και ανησυχία για την κατάσταση στην οποία ευρίσκεται εδώ και αρκετό καιρό η μαθηματική παιδεία, η δε αιτία για την ανησυχία αυτή φαίνεται να είναι οι πολλές και ποικίλες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι σπουδαστές στα μαθήματα των μαθηματικών. Είναι περιττό να σας υπενθυμίσω τα αποτελέσματα των τελευταίων ετών στις εισαγωγικές εξετάσεις στα Ανώτατα και Ανώτερα εκπαιδευτικά ιδρύματα της χώρας μας.

Η αντίδραση των ΕΣ έναντι του φαινομένου αυτού υπήρξε μια απεγνωσμένη προσπάθεια να αναγκάσει το σπουδαστή να "μάθει" μαθηματικά καθ' οιονδήποτε τρόπο.

Οι συλλογισμοί, κατά τις μακρές συσκέψεις και συζητήσεις, σχετικά με το ποια και πόση ύλη εκ των μαθηματικών πρέπει να διδάσκεται στα σχολεία, ακολούθησαν δυο αλληλοσυγκρουόμενες κατευθύνσεις.

Κατά την πρώτη εκ των απόψεων αυτών πρέπει να υπάρχει ένα ελάχιστο μέτρο, βάσει του οποίου να παρέχεται σε όλους ανεξαιρέτως τους σπουδαστές η ίδια ύλη. Οι υποστηρικτές της δεύτερης άποψης επέμεναν ότι η εκάστοτε παρεχόμενη "δόσις" των μαθηματικών πρέπει να περιορίζεται σε ό,τι είναι απολύτως αναγκαίο, που σημαίνει ότι μαθήματα μαθηματικών πρέπει να διδάσκονται μόνο όταν αυτά είναι προαπαιτούμενα για την παρακολούθηση κάποιων άλλων μαθημάτων.

Κατά τη διάρκεια των ως άνω συζητήσεων αυτού του είδους, αυτό τούτο το θέμα "μαθηματικά" περιήλθε, από πλευράς σπουδαιότητας, σε δεύτερη μοίρα. Μια τέτοια τοποθέτηση των μαθηματικών σε θέση δευτερεύουσας σημασίας είχε ως συνέπεια να θεωρηθούν αυτά ως αντικείμενο άκρως εσωτερικής φύσεως για το κάθε άτομο και ότι, παρά το γεγονός ότι τα μαθηματικά έχουν κάποιες πρακτικές εφαρμογές, ασθενείς είναι οι δεσμοί που έχουν με άλλες περιοχές της επιστημονικής σκέψης. Επίσης παραλείφθηκε στις συζητήσεις αυτές κάθε αναφορά στην πνευματική και αισθητική διάσταση που χαρακτηρίζουν τα μαθηματικά, με την αιτιολογία ότι μια τέτοια αναφορά θα ήταν άσχετη με το υπό μελέτη θέμα και ότι αυτή, εκτός από τους μαθηματικούς, κανένα άλλο δεν αφορά.

Στα περισσότερα προγράμματα διδασκόμενης ύλης (**curricula**) η υπάρχουσα αποσύνδεση (αποστασιοποίηση) των μαθηματικών από τα υπόλοιπα αντικείμενα μαθήσεως αποπροσανατολίζει το σπουδαστή. Παράδειγμα αποτελεί το γεγονός ότι μαθήματα των φυσικών επιστημών διδάσκονται σχεδόν πάντα χωρίς να προϋποθέτουν τη γνώση, ολίγων έστω, μαθηματικών από το διδασκόμενο.

Επίσης αναμένεται ο σπουδαστής να μάθει λ.χ. βιολογία χωρίς να στηριχθεί στις αρχές και στο φορμαλισμό των θετικών επιστημών. Πολλοί στατιστικολόγοι στην εποχή μας επιμένουν ότι το αντικείμενο με το οποίο ασχολούνται είναι κάτι τελείως ξεχωριστό από τα μαθηματικά και ως εκ τούτου στα μαθήματα στατιστικής δεν πρέπει να προαπαιτείται καμία προετοιμασία στα μαθηματικά.

Πολλοί επιστήμονες στον τομέα της Πληροφορικής καταλήγουν να υποστηρίξουν ότι, αν κανείς καταλαβαίνει τα μαθηματικά των "μηχανών" τους, αυτό είναι αρκετό και δεν είναι ανάγκη να καταλάβει τα μαθηματικά που απαιτούνται για την ερμηνεία των φυσικών φαινομένων.

Ο σπουδαστής από τη δική του πλευρά, μη έχοντας εποπτεία της όλης καταστάσεως, είναι φυσικό να ευρίσκει ότι τα πάντα έχουν καλώς. Έχει την εντύπωση ότι οι παράγοντες που προσδιορίζουν πότε ένα μάθημα είναι δύσκολο ή εύκολο, πότε είναι γενικής φύσεως ή εξειδικευμένο, είναι οι δυσκολίες που παρουσιάζουν οι προτεινόμενες σ' αυτόν ασκήσεις και προβλήματα προς λύση καθώς και το πόσο ογκώδες είναι το βιβλίο ή το σύγγραμμα στο οποίο θα εξετασθεί. Εξάλλου ελάχιστα ενημερώνεται αυτός για τη σημασία που έχει η έννοια "αυστηρότητα" όταν αυτή αναφέρεται στην απόδειξη ενός θεωρήματος ή στον ορισμό μιας μαθηματικής έννοιας κ.λ.π.

Μια προσεκτική εξέταση της φύσης της επιστήμης των μαθηματικών ως πνευματικής δραστηριότητας αποκαλύπτει το ασυνάρτητο και τη δυσαρμονία που χαρακτηρίζει την ως άνω κατάσταση. Έτσι οι σπουδαστές μας όχι μόνο δε μπόρεσαν να εκτιμήσουν την ομορφιά των μαθηματικών, αλλά πολύ λίγο μπόρεσαν να κατανοήσουν βαθύτερα το φυσικό κόσμο, η γνώση του οποίου κατέστη δυνατή χάρις στην επιστήμη των μαθηματικών. Οι νέοι μας πρέπει να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά δεν είναι μια απλή πνευματική περιέργεια ή κάποια χρήσιμη τεχνική επιδεξιότητα, αλλά ότι αυτά αποτελούν μια από τις σπουδαίες όψεις της πλέον χαρακτηριστικής ικανότητας του ανθρωπίνου είδους.

Για τους παραπάνω λοιπόν λόγους θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε από πιο κοντά τη φύση και άλλες όψεις των μαθηματικών.

Ως ένα γενικό ορισμό, μπορούμε να δεχθούμε ότι μαθηματικά είναι η μελέτη των αριθμών και του χώρου. Για να μπορέσουν όμως οι μαθηματικοί να μιλήσουν για τα πράγματα αυτά έπρεπε πρώτα απ' όλα να επινοήσουν ένα κατάλληλο λεξιλόγιο και ένα αλφάβητο. Τα οριζόμενα αντικείμενα είναι αφηρημένα και τα "βλέπουμε" μόνο με την ανθρώπινη φαντασία. Τα μαθηματικά είναι κατανοητά ακριβώς διότι είναι αφηρημένα και διαφέρουν από τις άλλες γλώσσες, διότι είναι πλήρως αποσυνδεδεμένα από τις πολυπλοκότητες που μας δημιουργεί η εμπειρία της απευθείας παρατηρήσεως. Και είναι σκόπιμο εδώ να υπενθυμίσουμε κάτι που θα μας χρησιμεύσει αργότερα, ότι δηλαδή η "φαντασία" και η "αφαίρεση" αποτελούν μέρη της εμπειρίας κάθε ανθρώπου και όχι μόνο του μαθηματικού.

Κατ' αρχήν ο λόγος για τον οποίο επινοήθηκαν τα μαθηματικά ως γλώσσα υπήρξε η αδυναμία της υφισταμένης γλώσσας να χειρισθεί το εν λόγω αντικείμενο. Ο Newton π.χ. θεώρησε αναγκαίο να εφεύρει το Διαφορικό Λογισμό για να μπορέσει να αναπτύξει και να εκφράσει τις ιδέες του. Το να επιχειρήσει κανείς να καταλάβει τα λεγόμενα από το Newton χωρίς να χρησιμοποιήσει το Διαφορικό Λογισμό είναι σα να προσπαθεί να καταλάβει το Σοφοκλή χωρίς τη χρήση λέξεων. Θα μπορούσε βέβαια κάποιος να παρουσιάσει την Αντιγόνη με μια σειρά εικόνων. Αν αυτό γίνει με προσοχή και καλή τεχνική, τα κύρια σημεία της όλης ιστορίας θα μπορούσαν να γίνουν καταληπτά. Όμως το όλο έργο προφανώς δεν περιορίζεται μόνο σε μια ιστορία που αναφέρεται σε ορισμένα άτομα τα οποία πεθαίνουν υπό τραγικές συνθήκες. Υπάρχουν πολύ περισσότερα πράγματα σ' αυτό. Οι οπτικές εικόνες, όσο σπουδαίες και αν είναι για την επικοινωνία των ανθρωπίνων μεταξύ τους, δεν αποτελούν είδος γλώσσας, ενώ αντιθέτως τα μαθηματικά είναι ένα είδος γλώσσας.

Αφού λοιπόν οι μαθηματικοί επινόησαν τη γλώσσα αυτή, προσπάθησαν χρησιμοποιώντας την να αποκαλύψουν, σε σχέση με τους αριθμούς και το χώρο, ποια πράγματα είναι δυνατά και ποια δεν είναι.

Η Ευκλείδειος Γεωμετρία που τόσο πολύ εκτιμάται για το κάλλος της είναι αποτέλεσμα μιας τέτοιας διαδικασίας. Ο A. Einstein συνήθιζε να λέγει: "Αν ο Ευκλείδης δεν κατάφερε να διεγείρει το νεανικό σου ενθουσιασμό, τότε δεν είσαι γεννημένος για να γίνεις επιστήμονας – στοχαστής".

Όταν κανείς καταλαβαίνει τη γλώσσα, τότε δε ξέρει μόνο τι είναι το τρίγωνο, αλλά γνωρίζει και τι μπορεί να λεχθεί για τα τρίγωνα εν γένει.

Ερχόμαστε τώρα στο ρόλο τον οποίο παίζει η αφηρημένη αυτή μαθηματική γλώσσα στις πειραματικές επιστήμες. Εκεί ο επιστήμων χρησιμοποιεί τα μαθηματικά για την κατασκευή των λεγομένων "μεταφορών", ήτοι ενοραμάτων τα οποία συντελούν στο να γνωρίσουμε καλύτερα τους εσωτερικούς μηχανισμούς λειτουργίας της φύσης.

Όπως και στην ποίηση, η χρήση μεταφορών αποτελεί και στις θετικές επιστήμες κοινό τόπο. Όμως αυτό που διακρίνει τη μαθηματική μεταφορά από τις άλλες, είναι η εκπληκτική ισχύς που έχει αυτή η γλώσσα να αποκαλύπτει τις επιπτώσεις που έχει η θεωρούμενη ιδέα. Οι μεταφορές δεν παρέχουν απαντήσεις σε ερωτήματα, αποκαλύπτουν όμως, όπως ετόνισα, συνέπειες ή επιπτώσεις. Όταν λ.χ. λέμε ότι η γη είναι μια σφαίρα, η μεταφορά αυτή αποτελεί μια βαρυσήμαντη δήλωση διότι γνωρίζουμε και μπορούμε να πούμε πολλά πράγματα για τις σφαίρες. Τέτοιες κατασκευές αποκαλούνται από μερικούς "πρότυπα" (models).

Υπάρχει όμως και ένας ακόμα λόγος που εξηγεί τον σπουδαίο ρόλο τον οποίο τα μαθηματικά διαδραματίζουν στις φυσικές επιστήμες. Πρόκειται για το ποσοστό εκείνο "βεβαιότητας" που αυτά εξασφαλίζουν σ' αυτές, κάτι που δε μπορεί να αποκτηθεί κατά κανένα άλλο τρόπο.

Όπως συμβαίνει σε κάθε επιστήμη, σε κάθε πνευματική δραστηριότητα, η κατανόηση ενός πράγματος επιτυγχάνεται κατόπιν κριτικής σκέψης και όχι απλώς μετά από σκληρή εργασία ρουτίνας. Όπως προσφυώς παρατηρεί ο **Paul Dirac**: "Κατανοώ τη σημασία μιας εξισώσεως αν διαθέτω κάποιο τρόπο να αντιληφθώ τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της λύσης της χωρίς να λύσω την ίδια την εξίσωση". Αυτό ακριβώς εννοούμε με τη λέξη "ενόραμα" που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Πρόκειται για τη διαίσθηση εκείνη η οποία βασίζεται στην κριτική ανάλυση των υπό θεώρηση βασικών θεμάτων, ο δε ρόλος του διδάσκοντος είναι να ενεργήσει έτσι ώστε ο διδασκόμενος να αποκτήσει την ικανότητα να έχει ενοράματα και όχι απλώς την τεχνική επιδεξιότητα στην εκτέλεση πράξεων.

Έχουμε λοιπόν μέχρι στιγμής την ακόλουθη, όχι τόσο σαφή, εικόνα του ρόλου τον οποίον παίζουν τα μαθηματικά στην ανάπτυξη των φυσικών επιστημών. Στη μια πλευρά της εικόνας είναι οι μαθηματικοί οι οποίοι επινοούν αξιωματικά συστήματα, αφηρημένους χώρους και παρέχουν τα σχετικά θεωρήματα τα οποία είναι στη διάθεση των εργαζομένων στις φυσικές και σε άλλες επιστήμες. Στην άλλη πλευρά της εικόνας ευρίσκονται οι φυσικοί, οι βιολόγοι, οι οικονομολόγοι και πολλοί άλλοι οι οποίοι προτείνουν στους μαθηματικούς πολλά από τα προς λύση προβλήματά τους και με ευγνωμοσύνη δέχονται τις λύσεις που τους δίδονται.

Έχει κανείς την αίσθηση ότι κάτι λείπει από την εικόνα αυτή. Συμβαίνει πολύ συχνά, προβλήματα που ανακύπτουν στο φυσικό κόσμο που μας περιβάλλει, όταν αυτά διατυπωθούν στη γλώσσα των μαθηματικών, να αποτελέσουν πηγή σπουδαίων προβλημάτων στα καθαρά μαθηματικά και τούτο διότι οι λύσεις των προβλημάτων αυτών οδηγούν συχνά σε γενικεύσεις οι οποίες καταλήγουν σε σπουδαίες αρχές και θεωρήματα στα καθαρά μαθηματικά. Για να γίνουμε περισσότερο κατανοητοί θα εξετάσουμε, πολύ σύντομα, μερικές συγκεκριμένες περιοχές των καθαρών μαθηματικών στις οποίες οι εφαρμογές έπαιξαν ένα σπουδαίο και ουσιαστικό ρόλο. Θα δώσουμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Το πρώτο παράδειγμα είναι η Γεωμετρία. Αυτή ξεκίνησε, ως μια εμπειρική επιστήμη, με τη μέτρηση της γης από τους Αιγυπτίους. Οι Έλληνες ήταν αυτοί (κορωνίδα αποτελεί το έργο του Ευκλείδη) οι οποίοι μετέτρεψαν τη Γεωμετρία από εμπειρική σε αξιωματική θεωρία, αποτέλεσε δε αυτή πρότυπο μαθηματικής σκέψης για τα επόμενα 2000 χρόνια. Είναι προφανές ότι αναφέρομαι στα Στοιχεία, το μνημειώδες έργο του Ευκλείδη. Με τη μετατροπή αυτή της Γεωμετρίας σε αξιωματική θεωρία άλλαξε και ο ρους της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Όμως το αξιωματικό αυτό σύστημα εθεωρείτο ότι αποτελούσε περιγραφή μόνο του φυσικού κόσμου και όχι μια ανεξάρτητη αφηρημένη μαθηματική θεωρία.

Οι προσπάθειες των μαθηματικών, κατά το 18ο και 19ο αιώνα, να αποδείξουν το 5ο Αξίωμα του Ευκλείδη (εκ σημείου εκτός ευθείας μία και μόνο μία παράλληλη άγεται προς την ευθεία) χρησιμοποιώντας τα υπόλοιπα τέσσερα αξιώματα, απέτυχαν. Αποτέλεσμα της αποτυχίας αυτής ήταν να γίνει βαθμιαίως αντιληπτό, ότι η "υπερβολική γεωμετρία" των **Bolay** και **Lobachevsky** δεν οδηγεί σε καμιά αντίφαση. Απεναντίας, οι Klein, Beltrami και H. Poincaré απέδειξαν ότι η "υπερβολική γεωμετρία" καθώς και η "ελλειπτική γεωμετρία" του Reimann είναι και αυτές λογικά συνεπείς όπως και η Ευκλείδειος. Πρόκειται πάντως για αφηρημένα μαθηματικά συστήματα, κατά τη σύγχρονη έννοια του όρου, εκ των οποίων κανένα δεν ισχυρίζεται ότι αποτελεί περιγραφή του φυσικού χώρου στον οποίο ζούμε.

Κατά το πρώτο ήμισυ του 20ου αιώνα, την εποχή ακριβώς που ολοκληρώνονται οι αφηρημένες γεωμετρικές θεωρίες που αναφέραμε παραπάνω, η ροή των πραγμάτων αντιστρέφεται. Ο Einstein, ζητώντας να βρει μια θεωρητική βάση για τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, την ευρίσκει στη γεωμετρία του Reimann. Η ιδέα ότι το φυσικό σύμπαν είναι πεπερασμένο αλλά απεριόριστο (μη φραγμένο) αποτελεί πλέον κοινό τόπο (cliché) για τη σύγχρονη φυσική. Ο Einstein έκανε το επαναστατικό εκείνο βήμα και ταύτισε το φυσικό μας κόσμο με ένα κυρτό μη Ευκλείδειο χώρο. Κατ' αυτόν τον τρόπο το χρέος που η Θεωρία της Σχετικότητας είχε προς τη θεωρητική γεωμετρία ξεπληρώθηκε πλήρως, και τούτο διότι πολλές ιδέες της σύγχρονης Διαφορικής Γεωμετρίας πηγάζουν από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Ως παραδείγματα θα αναφέρουμε τη θεωρία Πολλαπλοτήτων (manifolds), τους Εφαπτόμενους Χώρους (tangent spaces) και μέρη της Μιγαδικής Γεωμετρίας (complex geometry).

Παράδειγμα 2. Ο Απειροστικός Λογισμός μαζί με την ομάδα των ιδεών που τον ακολούθησαν αποτελούν τη λεγόμενη Μαθηματική Ανάλυση, η οποία είναι ένας από τους ακρογωνιαίους λίθους των συγχρόνων μαθηματικών. Η Μαθηματική Ανάλυση ξεκίνησε με τις προσπάθειες που καταβλήθηκαν στο να αναπτυχθεί μια θεωρία η οποία θα ασχολείτο με τις παρατηρήσεις και τις ποσοτικές μετρήσεις διαφόρων φαινομένων, τις οποίες εξετέλεσαν οι Galileo, Copernicus, Kepler, κ. ά., κατά τον 16ο και 15ο αιώνα. Ο Isaac Newton (1642 – 1727) στο μνημειώδες έργο του "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (1687), εξέφρασε υπό μαθηματική μορφή ορισμένες αρχές της φυσικής οι οποίες, όπως δήλωσε, διέπουν "όλη" την ύλη. Ο νόμος του Newton που αφορά την παγκόσμια έλξη των σωμάτων καθώς και οι τρεις νόμοι του που αναφέρονται στην κίνηση των σωμάτων αποτελούν το θεμέλιο της επιστήμης της Μηχανικής. Ο Newton, στην προσπάθειά του να αναπτύξει τους νόμους αυτούς, εφεύρε αυτό που ονομάζουμε σήμερα Διαφορικό Λογισμό (Calculus of fluxions), τον οποίο και χρησιμοποίησε για τη διατύπωση και μελέτη των ως άνω νόμων. Οι αρχές τις οποίες έφερε στο φως το ως άνω έργο Principia έγιναν πού γρήγορα αποδεκτές από το δυτικό επιστημονικό κόσμο και αποτελούν ακόμη τις βάσεις στη μελέτη της συμπεριφοράς των φυσικών συστημάτων σε φυσικά περιβάλλοντα.

Κατά τη διάρκεια όμως των 150 ετών μετά το Newton επικράτησε μια μη ακριβής, μη αυστηρή από μαθηματικής πλευράς, μια ημι–φυσική μόνο μορφή του Διαφορικού Λογισμού, παρά το γεγονός ότι κατά την περίοδο αυτή συντελέσθηκαν μερικές αξιοσημείωτες πρόοδοι.

Η Μαθηματική Ανάλυση κατέστη ένας αυστηρός και μη εμπειρικός κλάδος της μαθηματικής επιστήμης μόνο όταν εμφανίστηκε στο προσκήνιο ο Karl Weirstrass (1815–1897). Μερικοί μάλιστα διερωτώνται αν το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι ο Weirstrass πριν να γίνει μαθηματικός υπήρξε δικηγόρος.

Παράδειγμα 3. Το παράδειγμα αυτό αφορά την περιοχή εκείνη των μαθηματικών γνωστή με την ονομασία "Αρμονική Ανάλυση".

Όταν ο Joseph Fourier (1768–1830), στην αρχή του 19ου αιώνα, μελετούσε το φαινόμενο της αγωγιμότητας της θερμότητας, σκέφθηκε ότι, αφού οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ήταν περιοδικές με διαφορετικές περιόδους και πλάτη, θα ήταν ίσως δυνατό γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων αυτών να παραστήσουν με αρκετή ακρίβεια πολύπλοκα περιοδικά φαινόμενα. Ερευνώντας, ο Fourier, κατέληξε τελικά να συνειδητοποιήσει ότι αυτό που του χρειαζόταν ήταν να μπορέσει να παραστήσει μια συνάρτηση με μια σειρά, αυτή που σήμερα αποκαλούμε σειρά του Fourier (ΣF).

Η μελέτη των ιδιοτήτων των ΣF καθώς και των συναρτήσεων οι οποίες είναι δυνατόν να παρασταθούν με ΣF, εκίνησε το ζωηρό ενδιαφέρον ενός πολύ μεγάλου αριθμού μαθηματικών του 19ου αιώνα και τους οποίους οδήγησε σε εκπλήσσουσες και ποικίλες κατευθύνσεις έρευνας. Π.χ. ο Georg Cantor (1845–1918), ο θεμελιωτής της Θεωρίας των Συνόλων, μελετώντας τις ΣF αντελήφθει ότι έπρεπε να ασχοληθεί με σύνολα τα οποία είχαν άπειρο πλήθος στοιχείων (απειροσύνολα) στα σημεία των οποίων μια ΣF συγκλίνει. Στη συνέχεια οδηγήθηκε αυτός στη μελέτη των απειροσυνόλων εν γένει, καθώς και στη μελέτη των τακτικών αριθμών (ordinal numbers) και των πληθαρίθμων (cardinal numbers).

Επίσης ο Henri Lebesque (1875 – 1941), ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι το σύνηθες ολοκλήρωμα του Reimann δεν επέτρεπε τον υπολογισμό των συντελεστών του Fourier γενικότερων συναρτήσεων, γενίκευσε την έννοια του ολοκληρώματος εισάγοντας το γνωστό και απαραίτητο σήμερα ολοκλήρωμα Lebesque.

Θα μπορούσαμε να επεκταθούμε και σε άλλα παραδείγματα αναφερόμενα στην Θεωρία των διαφορικών εξισώσεων (συνήθων και με μερικές παραγώγους) – Θεωρία πιθανοτήτων – Θεωρία ομάδων κ.ά. Επειδή όμως ο χρόνος (όπως πάντα) δε μας το επιτρέπει, ας προσπαθήσουμε να διατυπώσουμε μερικά συμπεράσματα.

Ανέκαθεν υπήρξε και υπάρχει αλληλοεπίδραση μεταξύ των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών. Τα στάδια από τα οποία διέρχεται εν γένει η επιστήμη είναι τα ακόλουθα τρία:

Οι περιγραφικές επιστήμες ζητούν σταθερά τη συνδρομή των μαθηματικών ενώ ελάχιστες είναι οι υπηρεσίες που προσφέρουν σ' αυτά.

Οι πειραματικές επιστήμες χρησιμοποιούν τα μαθηματικά σε μεγάλη κλίμακα, αρχίζουν δε τελευταία να επιστρέφουν το "χρέος" τους σ' αυτά.

Μεταξύ των μαθηματικών και των θεωρητικών επιστημών υπάρχει μια ελεύθερη ανταλλαγή ιδεών.

Εσωτερικά είναι τα κίνητρα ενός μαθηματικού: Η πνευματική περιέργεια – η αίσθηση της μορφής και της δομής – η διαίσθηση.

Αντίθετα εξωτερικά είναι τα κίνητρα ενός φυσικού επιστήμονα, ακόμα και αν αυτός είναι θεωρητικός.

Δε μπορεί κανείς να προβλέψει ποιες θα είναι οι εφαρμογές μιας μαθηματικής θεωρίας και πότε αυτό θα γίνει.

Στο σημείο αυτό νομίζω ότι θα ήταν χρήσιμο να σχολιάσω με λίγα λόγια το πού πρόσφατο συνταρακτικό γεγονός της αποδείξεως του "Τελευταίου Θεωρήματος του **Fermat**".

Τον Ιούνιο του 1993 μια άκρως εντυπωσιακή ανακοίνωση διαδόθηκε με αστραπιαία ταχύτητα στο διεθνές μαθηματικό κοινό. Το περίφημο Θεώρημα του Fermat το οποίο παρέμενε αναπόδεικτο επί 350 χρόνια είχε επιτέλους αποδειχθεί από τον **Andrew Wiles**, καθηγητή του Πανεπιστημίου του **Princeton (USA)**. Προς μεγάλη έκπληξη πολλών μαθηματικών το νέο είχε διαδοθεί και δια μέσου των συνήθων μέσων μαζικής ενημέρωσης στο ευρύ κοινό, και φάνηκε να σαγηνεύει εξίσου και τους μη ειδικούς όπως και τους ειδικούς.

Κατά τις ημέρες που επακολούθησαν την ως άνω είδηση, οι μαθηματικοί κυριολεκτικά βομβαρδίστηκαν από ερωτήσεις προερχόμενες από παντού. Όμως δε νομίζω ότι με την ευκαιρία αυτή προσπάθησαν, επωφελούμενοι του εκδηλωθέντος μεγάλου ενδιαφέροντος, να ενημερώσουν το κοινό αναφορικά με τη μαθηματική επιστήμη γενικότερα.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι οι ειδικοί περί τα θέματα αυτά απεκάλυψαν, σύντομα, ένα χάσμα στη δοθείσα απόδειξη, το οποίο όμως ο **Wiles** με τη βοήθεια του πρώην φοιτητή του και νυν καθηγητή στο Πανεπιστήμιο του **Cambridge Richard Taylor**, κατάφερε σύντομα να γεφυρώσει και να προβεί στην ορθή λύση του προβλήματος. Η πλήρης απόδειξη, αποτελούμενη από 130 σελίδες δημοσιεύθηκε το Μάιο του 1995 στο επιστημονικό περιοδικό **Annals of Mathematics**. Έτσι, ως προς τα μέσα ενημερώσεως και το κοινό, το θέμα θεωρήθηκε λήξαν. Στην πραγματικότητα όμως η κατάσταση έχει ως εξής: Η πρόταση "κλειδί" την οποία απέδειξαν οι **Wiles** και **Taylor** δεν ήταν το "Τελευταίο Θεώρημα του **Fermat**" (ΤΘF), αλλά ένα τελείως διαφορετικό θεώρημα του οποίου του ΤΘF έτυχε να είναι συνέπεια. Οι **Wiles** και **Taylor** απέδειξαν την περίφημη εικασία – **STW** η οποία αποδίδεται στους: **Goro Shimoura (Princeton)**, τον αείμνηστο **Yutaka Taniyama** και τον **Andrθ Weil (Institute for Advanced Study)**.

Για να αποκτήσει ο ακροατής μια περιληπτική μεν αλλά πλήρη εικόνα του θεωρήματος θα υπενθυμίσουμε τα ακόλουθα:

Η εξίσωση $x^2 + y^2 = z^2$ έχει πολλές ακέραιες λύσεις, όπως π.χ. την $x = 3$, $y = 4$, $z= 5$. Όμως η εξίσωση $x^3 + y^3 = z^3$ δεν έχει ακέραιες λύσεις, ο δε **Fermat** το 1635 είχε δηλώσει ότι απέδειξε ότι η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει ακέραιες λύσεις για $n > 2$ εκτός βέβαια της προφανούς $x = y = z = 0$.

Το πρόβλημα φαίνεται απλό και "αθώο", μέχρι δε προ διετίας είχε αποδειχθεί ότι για τις τιμές του n μέχρι και **4000000** ή $x^n + y^n = z^n$ όντως δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Αξίζει να τονισθεί ότι οι προσπάθειες που καταβλήθηκαν για την απόδειξη του θεωρήματος του Fermat οδήγησαν στην ανακάλυψη σπουδαίων μεθόδων, οι οποίες επηρέασαν θετικά την ανάπτυξη των συγχρόνων μαθηματικών και συγκεκριμένα της "Θεωρίας των αλγεβρικών αριθμών". Τώρα βέβαια χάρις στον Wiles γνωρίζουμε ότι η εν λόγω εξίσωση δεν έχει ακέραιες λύσεις για κανένα n μεγαλύτερο του 2.

Όλη όμως αυτή η κατάσταση προκαλεί κάποια αμηχανία στο μη ειδικό ο οποίος διερωτάται γιατί οι μαθηματικοί να ασχολούνται με παρόμοια θέματα και μάλιστα να πληρώνονται γι' αυτά. Και διερωτάται ακόμα: Τι κερδίσαμε; Τι ωφελήθηκε ο κόσμος με την απόδειξη του εν λόγω θεωρήματος;

Προς το παρόν, για να είμαστε ειλικρινείς, δε κερδίσαμε τίποτα. Το αποδειχθέν θεώρημα δεν έχει ευεργετικές συνέπειες ούτε και στη Θεωρία Αριθμών όπου αυτό εμπίπτει.

Θα απαντήσουμε όμως στα παραπάνω ερωτήματα με το ακόλουθο ερώτημα, το οποίο φέρει στο φως μια αόρατη, συνήθως, πολιτιστική όψη των μαθηματικών:

Είναι σωστό να θέτει κανείς ερωτήματα όπως τα παραπάνω, όταν ευρίσκεται ενώπιον ενός αριστουργήματος τέχνης ή ενώπιον ενός έξοχου αθλητικού επιτεύγματος;

Όπως τονίσαμε προηγουμένως, τα μαθηματικά, καθώς και οι άλλες Καλές Τέχνες, αποτελούν μέρος της πολιτιστικής μας παράδοσης η οποία αποτελεί και τη δικαίωσή τους στις παλαιότερες και στη σύγχρονη εποχή. Όμως αντίθετα με τις Καλές Τέχνες, το κοινό που προσελκύουν τα μαθηματικά δεν είναι τόσο ευρύ, και μάλιστα μικραίνει πιο πολύ όσο τα λαμβανόμενα νέα αποτελέσματα έρευνας είναι πιο πρόσφατα και βαθύτερα.

Αν εξαιρέσουμε περιπτώσεις όπως εκείνη του Θεωρήματος του Fermat, τα μαθηματικά δεν αποτελούν συνήθως αντικείμενο ειδήσεων μέσα στα μέσα μαζικής ενημέρωσης.

Όμως τα παραπάνω, όπως είδαμε, δεν είναι παρά μόνο το ένα σκέλος της ιστορίας. Στο άλλο σκέλος ανήκουν οι πολυάριθμες εφαρμογές των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες. Στις εφαρμογές αυτές εκτός εκείνων που αναφέραμε, ανήκουν και πολλές άλλες μεταξύ των οποίων:

Η Θεωρία των Ομάδων του E. Galois η οποία μελετά τη λύση αλγεβρικών εξισώσεων και η οποία συνετέλεσε στη διαλεύκανση του "ατομικού φάσματος" (atomic spectra), η Άλγεβρα Boole, η οποία έχει τις ρίζες της στη Μαθηματική Λογική, και εφαρμόσθηκε στη θεωρία των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων, η ματασχηματισμένη του Radon με εφαρμογές στην τομογραφία δια των υπολογιστών (computer tomography), η Θεωρία Κατηγοριών στο σχεδιασμό "αυτομάτων" και "τυπικών γλωσσών" (formal languages), η Διαφορική Γεωμετρία, η Τοπολογία και η Άλγεβρα με εφαρμογές στη σύγχρονη θεωρητική φυσική.

Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε ότι μαθηματικές ιδέες ξεκινούν ως αφηρημένες έννοιες και στη συνέχεια γίνονται χρήσιμες εφαρμογές αυτών, ή ξεκινούν κατά τις διαδικασίες πρακτικών εφαρμογών και στη συνέχεια γενικεύονται και λαμβάνουν τη μορφή αφηρημένων εννοιών.

Τα τελευταία αυτά συμπεράσματα καθιστούν την εικόνα που αναφέραμε προηγουμένως περισσότερο σαφή αλλά όχι πλήρη. Για τη συμπλήρωσή της θα έπρεπε να εξετάσουμε την επίδραση των μαθηματικών στη φιλοσοφία, στις κοινωνικές επιστήμες, και να εξετάσουμε επίσης τις σπουδαιότερες κατευθύνσεις και τάσεις των συγχρόνων μαθηματικών. Όμως δε θα επεκταθούμε στις θεωρήσεις αυτές.

Από τα παραπάνω λεχθέντα συμπεραίνει κανείς ότι τα μαθηματικά αποτελούν μια πολύ σπουδαία κλάση πνευματικών επιτευγμάτων και ένα ουσιαστικό και θεμελιώδες στοιχείο της παιδείας.

Ως ασκούντες το λειτούργημα του εκπαιδευτικού οφείλουμε να κατευθύνουμε τους σπουδαστές μας έτσι ώστε αφ' ενός μεν να αντιλαμβάνονται τις ιδέες των άλλων αφ' ετέρου δε να είναι σε θέση να εκφράζουν τις δικές τους ιδέες. Το σημείο εκκίνησης μιας τέτοιας διαδικασίας είναι η μαθηματική γλώσσα, ο δε σκοπός της διαδικασίας είναι η μαθηματική παιδεία η οποία επιτυγχάνεται με στοχαστική προσεκτική ανάγνωση και κριτική ανάλυση.

Οι ακόλουθες παρατηρήσεις δε χρήζουν, κατά τη γνώμη μου, περαιτέρω επεξηγήσεων ή αιτιολογήσεων.

(α) Ο καθένας μπορεί να μάθει τη γλώσσα των μαθηματικών. Υπενθυμίζω εδώ τα όσα ανέφερα προηγουμένως, ότι δηλαδή η "φαντασία" και η "αφαίρεση" αποτελούν κοινή εμπειρία όλων. Ο ισχυρισμός ότι η εκμάθηση των μαθηματικών απαιτεί την ύπαρξη ειδικού ταλέντου, αποτελεί απλώς πρόφαση για τη μη εκμάθησή τους καθώς και τη μη καταβολή προσπάθειας διδασκαλίας του εν λόγω αντικειμένου. Η καλλιέργεια μιας τέτοιας άποψης δε πρέπει να επιτρέπεται στην εκπαιδευτική κοινότητα.

Τα Μαθηματικά πρέπει να διδάσκονται και να γίνονται κτήμα κάθε ατόμου το οποίο επιθυμεί να τύχει αληθινής παιδείας, καθότι αυτά καθορίζουν το κριτήριο – πρότυπο της αντικειμενικής αλήθειας σε κάθε διανοητική προσπάθεια.

Η ορθότητα της απόψεως αυτής διαπιστώνεται συχνά και ποικιλοτρόπως σε όλα τα στρώματα της σύγχρονης κοινωνίας μας.

Μία μαθηματική αλήθεια δεν είναι αφ' εαυτής ούτε απλή ούτε πολύπλοκη· απλώς Είναι (Emile Lemoine).

Ωστόσο, για να μπορέσει κανείς να ασχοληθεί με το περιεχόμενο (την "φιλολογία") της γλώσσας των μαθηματικών, πρέπει πρώτα να μάθει να διαβάζει την γλώσσα αυτή. Η αλήθεια της παρατήρησης αυτής είναι τόσο προφανής ώστε προξενεί κατάπληξη η συστηματική παραβίασή της ιδίως από τους μηχανικούς καθώς και από τα προγράμματα διδακτέας ύλης (curricula) των φυσικών επιστημών. Πολύ συχνά οι σπουδαστές καθώς και νέοι επιστήμονες αντιμετωπίζουν αιφνίδια ακατάληπτα για αυτούς μαθηματικά κείμενα συνοδευόμενα ενδεχομένως από ανεπαρκείς και πολύ σύντομες επεξηγήσεις. Το φαινόμενο αυτό θα μπορούσε να αποφευχθεί εάν δινόταν η ευκαιρία σ' αυτούς να διδαχθούν προηγουμένως αρκετά μαθηματικά ώστε να είναι σε θέση αργότερα να συλλαμβάνουν τις κεντρικές ιδέες άλλων αντικειμένων μελέτης.

(β) Η τυπική γνώση διαφόρων ορισμών ενός μεγάλου αριθμού εννοιών (λ.χ., εξισώσεις δευτέρου βαθμού, λογάριθμοι, συναρτήσεις Bessel κλπ.) δεν εγγυάται ότι ο σπουδαστής μπορεί να εκφράσει κάτι το σαφές, κάτι το κατανοητό για τις έννοιες αυτές. Είναι γνωστό ότι σε μια γλώσσα απαιτείται μεγάλη πρακτική για να μπορέσει κανείς να εκφράσει πλήρως τις σκέψεις του. Η αρχή αυτή μεταφερόμενη στη γλώσσα των μαθηματικών σημαίνει ότι ο σπουδαστής πρέπει να κατασκευάζει παραδείγματα αναφερόμενα στα συγκεκριμένα υπό μελέτη αντικείμενα και γεγονότα, ήτοι πρέπει ο σπουδαστής να ασχοληθεί με ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών.

(γ) Ασκούμε τους σπουδαστές μας στο να αποκτούν την ικανότητα να απαντούν σε ερωτήματα στα οποία δεν θα τους ζητηθεί ποτέ στο μέλλον να απαντήσουν.

Η βλάβη την οποία επιφέρει το είδος αυτό της άσκησης δεν έγκειται μόνο στη σπατάλη πολύτιμου χρόνου του σπουδαστή, αλλά σε κάτι πολύ πιο σπουδαίο: ότι αυτός ουσιαστικά δεν έχει αντιληφθεί τη σημασία των απαντήσεων που διδάχθηκε να δίνει, ενώ δεν είναι σε θέση να απαντήσει σε ερωτήματα τα οποία στην πραγματικότητα ανακύπτουν.

Οι περισσότεροι από τους σπουδαστές μας, οδηγημένοι στην αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι απλώς ένα σύνολο εξειδικευμένων τεχνικών, παρά ένας τρόπος του σκέπτεσθαι και εκφράζεσθαι, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα μαθηματικά είτε δεν έχουν καμιά αξία είτε είναι αδύνατον να γίνουν κατανοητά.

Προσφέροντας "μηχανική άσκηση" μόνο, και όχι μαθηματική παιδεία, έχουμε παραγάγει ένα πλήθος νεαρών ατόμων τα περισσότερα εκ των οποίων είναι κάτοχοι εκτεταμένων μεν αλλά επιφανειακών μόνο γνώσεων. Η διάσπαση και εξουδετέρωση του φαύλου αυτού κύκλου πρέπει να αποτελέσει τη σπουδαιότερη πρόκληση και τον κύριο στόχο της μαθηματικής παιδείας της οποίας το μέλλον είναι τόσο στενά συνδεδεμένο με το μέλλον των μαθηματικών.

(δ) Πρέπει να γίνει αντιληπτό, ειδικότερα μάλιστα από τον διδάσκοντα, ότι προκειμένου περί μαθηματικού προβλήματος του οποίου η λύση φαίνεται να είναι δύσκολη, είναι πολύ σπουδαίο να διακρίνουμε αν η λύση του προβλήματος απαιτεί κάποια ιδιαίτερη διαισθητική ικανότητα, κάποιο ιδιαίτερο βαθμό ευφυίας ή απλώς είναι ζήτημα ρουτίνας, δηλαδή σκληρής μόνο μηχανικής εργασίας. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι πρέπει να προτείνουμε στον σπουδαστή μόνο εύκολα προβλήματα προς λύση. Δίνοντας όμως δύσκολα προβλήματα ή ασκήσεις, καλό είναι να παρέχονται και οι σχετικές επεξηγήσεις και αιτιολογήσεις για την αντιμετώπισή τους.

Οι μαθηματικές ασκήσεις και προβλήματα που προτείνουμε στους σπουδαστές πρέπει να επιλέγονται κατά τρόπο ώστε να οξύνουν τη διαισθητική ικανότητα του σπουδαστή σε σχέση με τις γενικές αρχές της επιστήμης και όχι να τον ωθούν στο να ασκείται στην εκτέλεση πράξεων ρουτίνας.

Η ικανότητα του ατόμου να διαβάζει την αρχαία ελληνική γλώσσα δε συνεπάγεται κατ' ανάγκη και τη γνώση των έργων του Σοφοκλή ή του Αισχύλου, ούτε ότι αυτός αντιλαμβάνεται τις ιδέες των συγγραφέων αυτών ακούγοντας απλώς τις λέξεις του κειμένου. Παιδεία δε σημαίνει μόνο γραφή και ανάγνωση.

(ε) Το αντικείμενο που διδάσκουμε ή μελετούμε πρέπει να μελετάται από τις αρχικές του πηγές. Αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι ο καταλληλότερος τρόπος εκμαθήσεως της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των Στοιχείων του Ευκλείδη. Όταν το αντικείμενο μελέτης είναι γραμμένο σε άλλη γλώσσα, πρακτικώς δεν υπάρχει απώλεια των νοημάτων αν το ακριβές περιεχόμενο του μαθηματικού κειμένου έχει διατηρηθεί. Ωστόσο είναι ουσιώδες να παρουσιάζουμε στο διδασκόμενο την αρχική διατύπωση του θέματος, τις εξισώσεις που για πρώτη φορά απασχόλησαν το συγγραφέα. Γνωρίζοντες, διδάσκων και διδασκόμενος, την "αρχική ιδέα" θα αντιληφθούν περί τίνος πράγματος, βασικά, πρόκειται και τι ακριβώς είναι αυτό που θα προσθέσουν στις γνώσεις τους.

(ζ) Η προηγούμενη παρατήρηση οδηγεί στην ακόλουθη, η οποία είναι παρόμοιας φύσης.

Τα επιστημονικά επιτεύγματα του "χθες" δε πρέπει "σήμερα" να τα αγνοούμε, να τα θεωρούμε ξεπερασμένα. Κάμνω την παρατήρηση αυτή γιατί συχνά συμβαίνει, η επιστήμη που ήκμασε σε παρωχημένη εποχή να θεωρείται από τους συγχρόνους ως πρωτόγονος ή ακόμα και παράλογος. Είναι φανερό ότι στις λεγόμενες ανθρωπιστικές επιστήμες (κλασσική φιλολογία, κ.λ.π.) μια τέτοια άποψη θα εθεωρείτο τουλάχιστον γελοία.

Επειδή τα μαθηματικά θεωρούνται ότι ανήκουν (κατά τη γνώμη μου κακώς) μόνο στην κατηγορία των θετικών επιστημών, ενώ νομίζω ότι ανήκουν και στη φιλοσοφία και στην τέχνη, πολύς κόσμος, συμπεριλαμβανομένων και των σπουδαστών μας, έχει την τάση να πιστέψει ότι τα μαθηματικά που διδάσκονται σήμερα αποτελούν σύγχρονες ανακαλύψεις. Δυστυχώς η πλειονότητα των σπουδαστών εκτίθεται σε ένα πολύ μικρό μόνο αριθμό ιδεών στη μορφή που αυτές διατυπώθηκαν για πρώτη φορά σε παλαιότερες εποχές. Όμως θα έπρεπε αυτοί να γνωρίζουν ότι τα επιτεύγματα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών καθώς και εκείνων άλλων χωρών δεν έχουν μόνο ιστορική σημασία, δεν έχουν περιέλθει σε αχρηστία εξ αιτίας των μετέπειτα εξελίξεων, αλλά αντίθετα ότι αποτέλεσαν τη βάση της γενομένης προόδου.

Μερικοί θεωρούν την συζήτηση επί μαθηματικών θεμάτων παλαιότερων εποχών ως ανούσια διότι αναφέρεται αυτή σε μεθόδους που ήδη έχουν ξεχασθεί και έχουν παραχωρήσει τη θέση τους σε άλλες απλούστερες και γενικότερες μεθόδους.

Όμως παρόμοιες συζητήσεις μπορεί ακόμα να ενδιαφέρουν εκείνους οι οποίοι επιθυμούν να παρακολουθούν, βήμα προς βήμα, την πρόοδο των μαθηματικών και να παρατηρούν πώς οι απλές και γενικές μέθοδοι προκύπτουν από ειδικά θέματα και από πολύπλοκες και έμμεσες διαδικασίες.

Όπως τονίσαμε και προηγουμένως, και αξίζει να το επαναλάβουμε σε πολλές αξιόλογες θεωρίες αναφερόμενες σε φυσικές διαδικασίες υποβόσκει πάντοτε μια μαθηματική δομή η οποία δεν ελέγχεται μόνο ως ακριβής αλλά και ως εκλεπτυσμένη από μαθηματικής πλευράς.

Η εκθρόνιση παλαιότερων ιδεών της φυσικής, όπως είναι η θεωρία του **Newton** δε σημαίνει ότι οι ιδέες αυτές κατέστησαν άκυρες. Αντίθετα αν αυτές είναι αξιόλογες όπως εκείνες του Newton και του Galileo, τότε επιζούν και έχουν τη θέση τους μέσα στο νέο σχήμα. Επιπλέον αξίζει πολύ να τονίσουμε ότι ανακαλύψεις που αφορούν νέες συμπεριφορές της φύσης αποτελούν πηγές εμπνεύσεως για νέες μαθηματικές θεωρίες. Κλασσικό παράδειγμα αποτελεί η στενή σχέση μεταξύ της Κβαντικής Θεωρίας και της περιοχής των μαθηματικών που αναφέρεται στους μιγαδικούς αριθμούς. Επίσης η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και οι εξισώσεις του **Maxwell** οι αναφερόμενες στον ηλεκτρομαγνητισμό συνετέλεσαν στην πρόοδο των μαθηματικών. Όμως αυτό δεν αληθεύει μόνο για τις σχετικά πρόσφατες θεωρίες. Αληθεύει π.χ. για την συντελεσθείσα από τους Έλληνες ανάλυση της δομής του χώρου η οποία (ανάλυση) παρέσχε την έννοια της γεωμετρίας.

Υπάρχει ένα αξιοθαύμαστο βάθος, λεπτότητα και μαθηματικός πλούτος στις αρχές που υποκρύπτουν οι φυσικές διαδικασίες. Το γεγονός αυτό φυσικά δεν είναι γνωστό παρά μόνο σε εκείνους οι οποίοι ασχολούνται με τη μαθηματική έρευνα.

Επανερχόμενοι λοιπόν στη θεώρηση των ΕΣ παρατηρούμε ότι είναι πράγματι θλιβερό το γεγονός ότι τόσο λίγοι σπουδαστές έχουν μια αμυδρή έστω ιδέα της προόδου των μαθηματικών κατά τις παλαιότερες εποχές, ακόμα και κατά τα τελευταία πεντακόσια χρόνια.

Κυρίες και Κύριοι, τα διάφορα επιχειρήματα και απόψεις που εξέθεσα μέχρι τώρα αποτελούν κατά τη γνώμη μου σαφή ένδειξη ότι οι τρόποι με τους οποίους τα κατά καιρούς ΕΣ συμπεριφέρθηκαν και εξακολουθούν να συμπεριφέρονται έναντι της μαθηματικής παιδείας στην Ελλάδα καθώς και σε πολλές άλλες χώρες, πάσχουν και ως εκ τούτου απαιτείται ριζική αναθεώρηση αυτών. Πρέπει να γίνουν δραστικές αλλαγές στα προγράμματα διδασκόμενης ύλης (**curricula**), στον τρόπο διδασκαλίας καθώς και σε άλλες εκπαιδευτικές δραστηριότητες.

Για πολλούς από εμάς αποτελεί αντικείμενο οραματισμού και επιδίωξης, οι σπουδαστές μας: (1) να μάθουν να αξιολογούν τα μαθηματικά, (2) να έχουν εμπιστοσύνη στις δικές τους ικανότητες, (3) να καταστούν λύτες μαθηματικών προβλημάτων, (4) να μάθουν να επικοινωνούν κατά τρόπον μαθηματικόν, και (5) να μάθουν να σκέπτονται κατά τρόπον μαθηματικόν.

Η κάθε μια από τις παραπάνω επιδιώξεις πρέπει να μελετηθεί χωριστά και σε βάθος, ακολουθώντας τις γενικές κατευθύνσεις που αναπτύξαμε παραπάνω. Προφανώς πρόκειται για μια προσπάθεια πολύ δύσκολη, η οποία όμως πρέπει να αρχίσει να γίνεται και στον τόπο μας όπως έχει αρχίσει να γίνεται σε μερικές άλλες χώρες.

Βεβαίως έχουν διατυπωθεί ορισμένα, εύλογα, επιχειρήματα κατά των προτεινομένων αλλαγών, και τα οποία πρέπει να αντιμετωπισθούν με υπευθυνότητα και σοβαρότητα. Ένα από αυτά είναι: ότι οι προαναφερθείσες, καθ' όλα αξιέπαινες, προσπάθειες επικεντρούμενες στο να αποκτήσει ο σπουδαστής βαθιά και πλήρη αντίληψη της προσφερόμενης γνώσης μπορεί να έχουν ως αποτέλεσμα τη μείωση των ικανοτήτων αυτού ως προς τη τεχνική επιδεξιότητα στην εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων.

Δοθέντος ότι είναι ευκολότερο να εντοπίσει κανείς μια ατέλεια, ένα σφάλμα, στην εκτέλεση μαθηματικών υπολογισμών από το να διακρίνει μια αδυναμία του σπουδαστή στην κατανόηση ορισμένων ιδεών και εννοιών, υπάρχει ο κίνδυνος να γίνει κατάχρηση του ως άνω επιχειρήματος.

Από την άλλη πλευρά όμως το επιχείρημα αυτό δεν παύει να είναι ένα σοβαρό πρόβλημα διότι πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι οι μέλλοντες φυσικοί επιστήμονες, μηχανικοί και μαθηματικοί πρέπει να αποκτήσουν και τις δυο ικανότητες, ήτοι να αποκτούν βαθιές και πλήρεις γνώσεις, καθώς και την τεχνική επιδεξιότητα στην εκτέλεση μαθηματικών πράξεων και υπολογισμών.

Είναι απαραίτητο επίσης να τονισθεί ότι οι παρατηρούμενες δυσκολίες στην εκπαίδευση δεν οφείλονται μόνο σε οικονομικούς λόγους, και προπαντός δεν οφείλονται, όπως πολλοί πιστεύουν, στο ότι δεν κατορθώσαμε να συντονίσουμε το βήμα μας στον ταχύ ρυθμό το οποίο ακολουθεί η μεταβολή της γνώσης. Οφείλονται αυτές προπαντός στο ότι δώσαμε λανθασμένη κατεύθυνση σ' αυτό που ονομάζουμε "εκπαιδευτικό σύστημα".

Ευοίωνο μπορεί να θεωρηθεί το γεγονός ότι το **Oberwolfach Institute** άνοιξε τις πύλες του και σε εκείνους που ασχολούνται με την αναμόρφωση των εκπαιδευτικών συστημάτων και εν γένει με τη βελτίωση της Μαθηματικής και Παιδείας. Στο συνέδριο με τίτλο **"New Trends in the Teaching and Learning of Mathematics"** (27-11-97 – 1-12-95) έλαβαν μέρος επιστήμονες διαφόρων ειδικοτήτων από διάφορα κράτη της Ευρώπης, της Αμερικής και της Αυστραλίας. Συζητήθηκαν θέματα αναφερόμενα, (1) στην έρευνα του πώς ο σπουδαστής "μαθαίνει" μαθηματικά, (2) στην αναμόρφωση των εκπαιδευτικών συστημάτων με σκοπό να προσελκύσουν το ενδιαφέρον του μαθητή, (3) στη χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών, (4) σε γενικά θέματα όπως η αξιολόγηση της αποδείξεως ενός θεωρήματος, κ.ά.

Κυρίες και Κύριοι,

Ο ανθρώπινος νους είναι ικανός για πολύ περισσότερα επιτεύγματα από όσα στην πραγματικότητα επιτελεί. Δυστυχώς πολλές είναι οι ευκαιρίες που πολύ συχνά χάνονται, στερώντας έτσι τόσο από τους νέους όσο και από τα ώριμα άτομα τις δυνατότητες παραγωγής ωφέλιμου πνευματικού έργου.

Γονείς, Διδάσκοντες, Πολιτεία και το ευρύ κοινό, πρέπει να συνειδητοποιήσουν ότι οι προτεινόμενες αλλαγές είναι αναγκαίες και θα έχουν ως αποτέλεσμα να θωρακίσουν τους νέους μας για να αντιμετωπίσουν τον αιώνα που μας έρχεται.