Author: Χαράλαμπος Ταμβάκης

Title: Αριθμοί Bernoulli και το Γενικευμένο Θεώρημα του Pick

Creator: HDML

Μαθηματική Επιθεώρηση τ. 48, 1997

Αριθμοί Bernoulli και το Γενικευμένο Θεώρημα του Pick

Διάλεξη Χαράλαμπου Ταμβάκη στην Ε.Μ.Ε. 19 Μαΐου 1998

Είναι γνωστές οι ταυτότητες

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Οι αριθμοί Bernoulli ανακαλύφθηκαν από τον Jacob Bernoulli (1654 –.1705) σε μια προσπάθεια γενίκευσης των τύπων (1), στον υπολογισμό του αθροίσματος

$$S_\kappa(n)=1^\kappa+2^\kappa+\ldots+n^\kappa$$

σαν πολυώνυμο του n. Η ακολουθία $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ αυτών των αριθμών ορίζεται από τη δυναμοσειρά Taylor

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$
(2)

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη της (2) με $e^x-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ και εξισώσουμε τους συντελεστές του x στα δυο μέλη παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$\binom{n}{0}B_0+\binom{n}{1}B_1+\ldots+\binom{n}{n-1}B_{n-1}=0,\ B_0=1 \tag{3}$$

Η (3) επίσης ορίζει την ακολουθία $\{B_n\}$, π.χ. βρίσκουμε

$$B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ \ldots$$

Αποδεικνύεται (βλέπε π.χ. το [1]) ότι $B_{2n+1}=0$ για $n\geqslant 1$ και $(-1)^{\kappa-1}B_{2\kappa}>0$. Οι αριθμοί Bernoulli εμφανίζονται συχνά στη μοντέρνα **θεωρία αριθμών** και **γεω-**

μετρία: π.χ. στον τύπο του Euler για το άθροισμα

$$J(2\kappa) = 1^{2\kappa} + \frac{1}{2^{2\kappa}} + \frac{1}{3^{2\kappa}} + \frac{1}{4^{2\kappa}} + \ldots = (-1)^{\kappa-1}\frac{(2\pi)^{2\kappa}}{2\cdot(2\kappa)!}B_{2\kappa}$$

Από τη σκοπιά της γεωμετρίας σπουδαίο ρόλο παίζει η δυναμοσειρά **Todd**:

$$\mathrm{Todd}(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{\kappa=1}^{\infty}(-1)^{\kappa-1}\frac{B_{2\kappa}}{(2\kappa)!}x^{2\kappa} \qquad (4)$$

η οποία εμφανίζεται στη θεωρία των "χαρακτηριστικών κλάσεων", μια γενίκευση της "χαρακτηριστικής του Euler". Η (4) θα παίξει βασικό ρόλο και στη συνέχεια.

Θα φτάσουμε τώρα στον υπολογισμό των αθροισμάτων $S_\kappa(n)$ με μια μέθοδο που μας βολεύει για τη συνέχεια. Γενικότερα μας ενδιαφέρει για ένα πολυώνυμο $f(x)$ και $\alpha, b \in \mathbb{Z}$, $\alpha < b$ να υπολογίσουμε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=\alpha}^{b} f(\kappa)$$

Η προσέγγισή μας στο ερώτημα αυτό θα είναι ανάλογη με τον τύπο:

$$\left(\frac{\partial}{\partial h_1} + \frac{\partial}{\partial h_2}\right)\left(\int_{\alpha-h_1}^{b+h_2} f(x)dx\right)\Bigg|_{h_1=h_2=0} = f(\alpha) + f(b)$$

που προκύπτει ουσιαστικά από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένας διαφορικός τελεστής $T\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}\right)$ τέτοιος ώστε

$$T\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}\right)\left(\int_{\alpha-h_1}^{b+h_2} f(x)dx\right)\Bigg|_{h_1=h_2=0} = \sum_{r=\alpha}^{b} f(r), \text{ για κάθε πολυώνυμο } f(x).$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι σε κάθε δυναμοσειρά $p(x) = \sum_{n\geq 0}\alpha_n x^n$ αντιστοιχεί ένας διαφορικός τελεστής $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{n\geq 0}\alpha_n\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ που προκύπτει με αντικατάσταση του x με $\frac{\partial}{\partial x}$ (το $p(x)$ είναι το **σύμβολο** του $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$). Γενικότερα σε μια δυναμοσειρά πολλών μεταβλητών $p(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_m)} \alpha_I x_1^{i_1}\ldots x_m^{i_m}$ αντιστοιχούμε το

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) = \sum_I \alpha_I \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}}\cdots\frac{\partial^{i_m}}{\partial x_m^{i_m}}$$

Έχουμε τώρα ότι

$$\sum_{r=\alpha}^{b} e^{rt} = e^{\alpha t}(1 + e^t + e^{2t} + \ldots + e^{(b-\alpha)t}) = e^{\alpha t}\frac{1-e^{(b-\alpha)t}}{1-e^t} = \frac{e^{bt}}{1-e^{-t}} + \frac{e^{\alpha t}}{1-e^t} =$$

$$\mathrm{Todd}(t)\frac{e^{bt}}{t} - \mathrm{Todd}(-t)\frac{e^{\alpha t}}{t} = \mathrm{Todd}\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)\mathrm{Todd}\left(\frac{\partial}{\partial h_2}\right)\left[e^{h_2 t}\frac{e^{bt}}{t} - e^{-h_1 t}\frac{e^{\alpha t}}{t}\right]_{h_1 = h_2 = 0} =$$

$$\mathrm{Todd}\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)\mathrm{Todd}\left(\frac{\partial}{\partial h_2}\right)\left(\int_{\alpha - h_1}^{b + h_2} e^{tx}dx\right)\Bigg|_{h_1 = h_2 = 0} \tag{5}$$

Αν παραγωγίσουμε και τα δυο μέλη της (5) κ φορές ως προς t και θέσουμε t = 0 τότε γίνεται

$$\sum_{r=\alpha}^{b} r^{\kappa} = \mathrm{Todd}\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)\mathrm{Todd}\left(\frac{\partial}{\partial h_2}\right)\left(\int_{\alpha - h_1}^{b + h_2} x^{\kappa}dx\right)\Bigg|_{h_1 = h_2 = 0} \tag{6}$$

Λόγω γραμμικότητας η (6) δίνει για οποιοδήποτε πολυώνυμο f(x)

$$\sum_{r=\alpha}^{b} f(r) = T\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}\right)\left(\int_{\alpha - h_1}^{b + h_2} f(x)dx\right)\Bigg|_{h_1 = h_2 = 0} \tag{7}$$

με $T\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}\right) = \mathrm{Todd}\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)\mathrm{Todd}\left(\frac{\partial}{\partial h_2}\right)$

Με χρήση της (4) η (7) δίνει τον τύπο **Euler – MacLaurin**:

$$\sum_{r=\alpha}^{b} f(r) = \int_{\alpha}^{b} f(x)dx + \frac{1}{2}[f(\alpha) + f(b)] + \sum_{r=2}^{\infty}(-1)^{r}\frac{B_r}{r!}[f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(\alpha)] \tag{8}$$

Παίρνοντας σαν ειδική περίπτωση $f(x) = x^{\kappa}$ και $\alpha = 0$, $b = n$ η (8) δίνει

$$S_{\kappa}(n) = \frac{1}{\kappa + 1}\sum_{r=0}^{\kappa}(-1)^{r} B_r \binom{\kappa + 1}{r} n^{\kappa + 1 - r}$$

Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $f(x) = 1$ στην (8) παίρνουμε $\sum_{r=\alpha}^{b} 1 = \#[\alpha, b] \cap \mathbb{Z} = b - \alpha + 1$, το πλήθος των ακεραίων στο διάστημα $[\alpha, b]$.

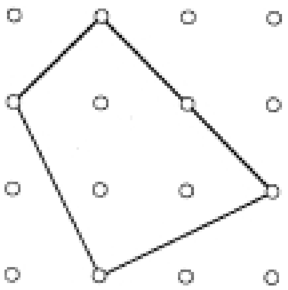
Θεωρούμε τώρα το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^2$ με ακέραιες συντεταγμένες (τα "ακέραια σημεία"). Θα λέμε ότι ένα πολύγωνο P είναι ακέραιο αν οι κορυφές του είναι ακέραια σημεία. Το πιο γνωστό αποτέλεσμα για τα ακέραια πολύγωνα οφείλεται στον Georg Pick (1900):

Θεώρημα (Pick): Αν P είναι ακέραιο πολύγωνο με ε ακέραια σημεία στο εσωτερικό του και σ ακέραια σημεία στο σύνορό του, τότε το εμβαδόν του E(P) δίνεται από τον τύπο

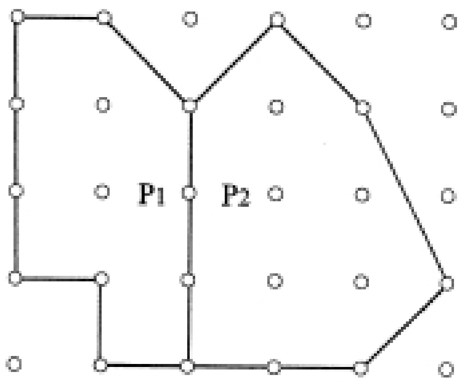
$$E(P) = \varepsilon + \frac{\sigma}{2} - 1 \tag{9}$$

Για παράδειγμα στο Σχήμα 1 έχουμε $\varepsilon = 3$, $\sigma = 5$ και $E(P) = \frac{9}{2}$

Μια απόδειξη του θεωρήματος συνήθως γίνεται σε 2 στάδια:



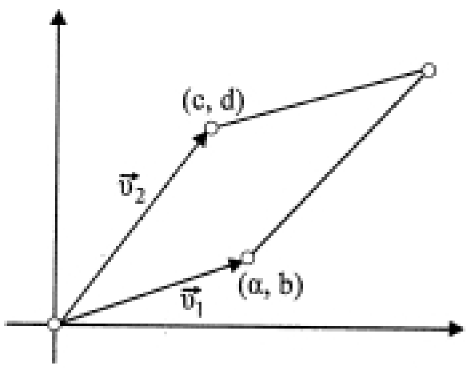
Σχήμα 1



Σχήμα2

1) Καλούμε ένα ακέραιο τρίγωνο T **αρχικό** αν $\varepsilon(T) = 0$ και $\sigma(T) = 3$. Τότε κάθε αρχικό τρίγωνο έχει εμβαδό $\frac{1}{2}$.

2) Αν $N(P)$ το δεξί μέλος της (9), τότε το $N(P)$ είναι προσθετικό, με τη έννοια ότι αν P_1, P_2 δυο πολύγωνα που έχουν ένα μέρος του συνόρου τους κοινό, τότε $N(P_1 \cup P_2) = N(P_1) + N(P_2)$ (Σχήμα 3)

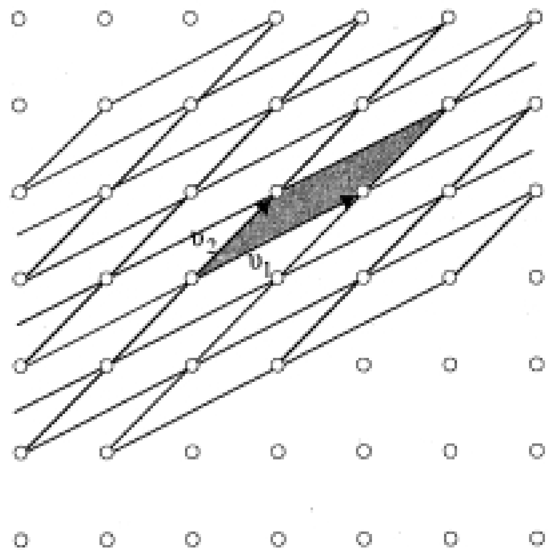


Σχήμα 3

Επειδή κάθε ακέραιο πολύγωνο διαμερίζεται σε αρχικά τρίγωνα, το θεώρημα έπεται επαγωγικά από τις 1), 2). Θα δώσουμε μια απόδειξη για το (1):

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε αρχικό (ή **θεμελιώδες**) παραλληλόγραμμο (με $\varepsilon = 0$, $\sigma = 4$) έχει εμβαδό 1 (Σχήμα 3). Αν $\vec{\upsilon}_1(\alpha, b)$ και $\vec{\upsilon}_2(c, d)$ τα διανύσματα των πλευρών του, πρέπει να δείξουμε ότι $E = \left| \begin{vmatrix} \alpha & c \\ b & d \end{vmatrix} \right| = |\alpha d - bc| = 1$.

Επειδή το παραλληλόγραμμο $(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2)$ είναι αρχικό σημαίνει ότι αν προεκτείνουμε τις πλευρές του και με παράλληλες μεταφορές κατά $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ σχηματίσουμε ένα δίκτυο (Σχήμα 4), κάθε ακέραιο σημείο θα είναι κορυφή ενός παραλληλογράμμου του δικτύου. Έπεται ότι το $\{\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2\}$ είναι μια **βάση** του προτύπου $\mathbb{Z}^2$, δηλαδή ότι για κάθε $\vec{\upsilon}(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ ώστε $\lambda\vec{\upsilon}_1 + \mu\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon} \Leftrightarrow$ το σύστημα $\left.\begin{matrix} \lambda\alpha + \mu c = x \\ \lambda b + \mu d = y \end{matrix}\right\}$ έχει ακέραιες λύσεις $\forall$ επιλογή των $x, y \in \mathbb{Z}$. Από τον κανόνα του Cramer πρέπει η ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & c \\ b & d \end{vmatrix} = \pm 1$, ο.ε.δ. (για μια άλλη απόδειξη δες π.χ.[5]).



Σχήμα 4

Σκοπός μας είναι τώρα να περιγράψουμε μια γενίκευση του θεωρήματος σε ακέραια πολύτοπα $P \subset \mathbb{R}^N$ (υποθέτουμε ότι το P είναι κυρτό, δηλαδή τομή ημιχώρων του $\mathbb{R}^N$). Ακριβές ανάλογο αποτέλεσμα δεν υπαρχει στο χώρο $\mathbb{R}^3$, όπως δείχνει το παράδειγμα του Reeve: το τετράεδρο με κορυφές (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) και (1, 1, κ), $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ έχει $\varepsilon = 0$, $\sigma = 4$ αλλά οσοδήποτε μεγάλο όγκο. Για να αποφύγουμε αυτή τη δυσκολία χρειάζεται να θεωρήσουμε ρητά σημεία μέσα στο P, ή ισοδύναμα ακέραια σημεία μέσα στα πολλαπλάσια nP του P, $n \in \mathbb{N}$.

Στις εφαρμογές ενδιαφέρει περισσότερο η καταμέτρηση των ακεραίων σημείων στην κλειστότητα του P, παρά ο υπολογισμός του όγκου του. Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση

$i(P, n) = \#(\mathbb{Z}^N \cap nP)$

όπου **nP** είναι ομοιόθετο πολύτοπο του P με λόγο n. Αν P^c είναι το εσωτερικό του P ορίζεται και η $i^\circ(P, n) = \#(\mathbb{Z}^N \cap nP^\circ)$

Έχουμε τώρα το

Θεώρημα (Ehrhart):

α) Τα $i(P, n)$, $i^\circ(P, n)$ είναι πολυώνυμα του n με βαθμό N, όπου N = **dimP** η διάσταση του P.

b) (αντίστροφη): $i^\circ(P, n) = (-1)^N i(P, -n)$

Αν τώρα $i(P, \kappa) = \alpha_N \kappa^N + \alpha_{N-1}\kappa^{N-1} + \ldots + \alpha_0$, ο **Ehrhart** έδειξε ότι: $\alpha_N = V(P)$ είναι ο όγκος του P, α_{N-1} είναι το μισό τυ αθροίσματος των όγκων των $(N-1)$–διάστατων εδρών του P (ο όγκος εδώ μετριέται με βάση το $(N-1)$–διάστατο δίκτυο στην κάθε έδρα), και $\alpha_0 = 1$. Για παράδειγμα από το θεώρημα του **Pick** προκύπτει εύκολα ότι για κάθε ακέραιο πολύγωνο $P \subset \mathbb{R}^2$,

$$i(P, \kappa) = E(P)\kappa^2 + \frac{1}{2}S(P)\kappa + 1,$$

όπου S(P) είναι το μισό του αθροίσματος των μηκών των ακμών του P (ως προς τα επαγόμενα δίκτυα κάθε ακμής).

Επειδή το $i(P, \kappa)$ είναι πολυώνυμο βαθμού N, αν γνωρίζουμε N από τους αριθμούς $i(P, 1)$, $i(P, 2)$, … μπορούμε να προσδιορίσουμε τον V(P):

Πόρισμα: Αν $P \subset \mathbb{R}^N$ κυρτό ακέραιο N–πολλαπλάσιο τότε ο όγκος

$$V(P) = \frac{1}{N!}\left\{(-1)^N + \sum_{\kappa=1}^{N}\binom{N}{\kappa}(-1)^{N-\kappa}\, i(P, \kappa)\right\}$$

Το Πόρισμα γενικεύει κατά κάποιον τρόπο το θεώρημα του Pick, όμως το ουσιαστικό ερώτημα είναι το εξής: να βρεθούν όλοι οι συντελεστές α_i του πολυωνύμου Ehrhart $i(P, n)$ συναρτήσει της γεωμετριας του P. Για τετράεδρα το πρόβλημα λύθηκε πλήρως από τον J. Pommersheim με χρήση **αθροισμάτων Dedekind**. Για $p, q \in \mathbb{Z}^+$ με $(p, q) = 1$ το άθροισμα Dedekind $s(p, q)$ ορίζεται από τον τύπο

$$s(p, q) = \sum_{\kappa=1}^{q-1}\left(\left(\frac{\kappa}{q}\right)\right)\cdot\left(\left(\frac{p\kappa}{q}\right)\right)$$

όπου $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$. (Διαφορετικά έχουμε επίσης ότι $s(p, q) = \frac{1}{4q}\sum_{\kappa=1}^{q-1}\sigma\varphi\left(\frac{\pi\kappa}{q}\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi p\kappa}{q}\right)$)

Ενδεικτικά αναφέρουμε το:

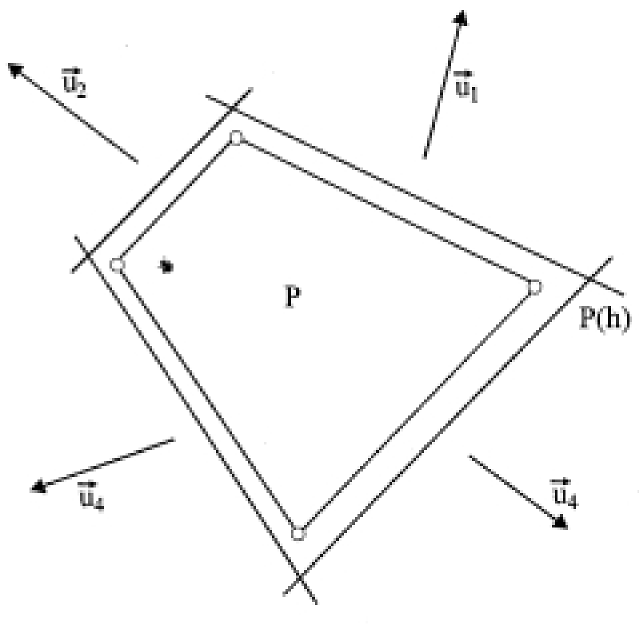
Θεώρημα (Pommersheim, 1993): Αν $\alpha, b, c \in \mathbb{Z}^+$ με Μ.Κ.Δ.$(\alpha, b, c) = 1$, $A = (b, c)$, $B = (\alpha, c)$, $C = (\alpha, b)$ και $d = ABC$, και Δ το τετράεδρο του $\mathbb{Z}^3$ με κορυφές $(0, 0, 0)$, $(\alpha, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, τότε $i(\Delta, n) = \#(\mathbb{Z}^3 \cap n\Delta) =$

$$\frac{\alpha bc}{6} n^3 + \left(\frac{\alpha b + \alpha c + bc + 1}{4}\right) n^2 +$$

$$\left\{\frac{1}{4}(A+B+C+\alpha+b+c)+\frac{1}{12}\left(\frac{bc}{\alpha}+\frac{\alpha c}{b}+\frac{\alpha b}{c}+\frac{d^2}{\alpha bc}\right)-As\left(\frac{bc}{d},\frac{\alpha A}{d}\right)-Bs\left(\frac{\alpha c}{d},\frac{bB}{d}\right)-Cs\left(\frac{\alpha b}{d},\frac{\alpha C}{d}\right)\right\} \kappa+1$$

Το αποτέλεσμα από τον **Pommersheim** γενίκευσε παλιότερο του **Mordell**, που εξέτασε την περίπτωση όταν οι α, b, c είναι ανά δύο σχετικά πρώτοι. Με τη χρήση αλγεβρικής γεωμετρίας ο **Pommersheim** βρήκε τύπο για το συντελεστή α_{N-Z} του πολυωνύμου **Ehrhart** σ' όλες τις διαστάσεις.

Το γενικό πρόβλημα λύθηκε μόλις τα τελευταία 3 χρόνια από πολλούς μαθηματικούς, ο καθένας με δικιά του μέθοδο: οι **Pommersheim**, **Brion – Vergne**, **Khovanski – Pukhlikov** με αλγεβρική γεωμετρία (**toric** geometry), οι **Ginzburg – Guillemin – Karshon** με συμπλεκτική γεωμετρία, οι **Diaz – Robins** με ανάλυση **Fourier** (!) και οι **Cappell – Shaneson** με διαφορική και αλγεβρική τοπολογία. Θα περιγράψουμ ετο αποτέλεσμα των **Brion – Vergne** στην ειδική περίπτωση που το P είναι πολύτοπο **Delzant**, δηλαδή όταν από κάθε κορυφή του P άγονται N ακμές και τα ελαχιστικά διανύσματα με ακέραιες συντεταγμένες παράλληλα στις ακμές που άγονται σε οποιαδήποτε δοσμένη κορυφή του P αποτελούν βάση του $\mathbb{Z}^N$ (για τη γενική περίπτωση χρειάζονται επιπλέον ορισμοί βλέπε)



Σχήμα 5

Η ιδέα που λύνει το πρόβλημα είναι ανάλογη με αυτό που κάναμε με το διάστημα $[\alpha, \beta] \to [\alpha - h_1, b + h_2]$ προηγουμένως: αν $F_1, \ldots, F_d$ οι $(N-1)$–διάστατες έδρες του P, μετακινούμε την κάθε μια παράλληλα προς τον εαυτό της και μελετάμε τη συνάρτηση όγκου που προκύπτει. Για να ακριβολογούμε: έστω $h \in \mathbb{R}^d$, $h(h_1, \ldots, h_d)$ μικρό διάνυσμα. Η έδρα F_i του P ορίζεται από ένα διάνυσμα $\vec{u_i}$ κάθετο στην έδρα και με φορά "προς τα έξω":

$$F_i = P \cap \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N | <\vec{u_i}, \vec{x}> = \lambda_i\},\ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ και } P = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N | <\vec{u_i}, \vec{x}> \leqslant \lambda_i\ \forall\, i\}.$$

Για μικρό h το $P(h) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N | <\vec{u_i}, \vec{x}> \leqslant \lambda_i + h_i\ \forall\, i\}$ είναι κυρτό πολύτοπο (μια "διόγκωση" του P) και ενδιαφέρει η μελέτη της συνάρτησης $h \to \mathrm{Vol}(P(h))$ από το $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$\mathrm{Todd}(x_1, x_2, \ldots, x_d) := \prod_{\kappa=1}^{d} \frac{x_\kappa}{1 - e^{-x_\kappa}}$$.Τότε έχουμε το

Θεώρημα (Kantor – Khovanskii (1994)):

$$\#P \cap \mathbb{Z}^N = \mathrm{Todd}\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_d}\right) \mathrm{Vol}(P(h))\Big|_{h=0}$$

Γενικότερα, αν f είναι πολυωνυμική συνάρτηση του $\mathbb{R}^N$ και $I(f)(h) := \int_{P(h)} f(x)dx$, τότε για μικρά h η $I(\varphi)(h)$ είναι πολυώνυμο του h και

$$\sum_{r \in P \cap \mathbb{Z}^N} f(r) = \mathrm{Todd}\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_d}\right) I(f)(h)\Big|_{h=0}$$

Τέλος οι συντελεστές του πολυωνύμου $i(P, n)$ προκύπτουν ως εξής: αν γράψουμε τον τελεστή

$$\mathrm{Todd}\left(\frac{\partial}{\partial h}\right) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} A_\kappa\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)$$

όπου $A_\kappa(h)$ ομογενές πολυώνυμο του h βαθμού κ, τότε ο συντελεστής $\alpha_{N-\kappa}$ του πολυωνύμου Ehrhart δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_{N-\kappa} = A_\kappa\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_d}\right) \mathrm{Vol}(P(h))\Big|_{h=0}$$

Όλα όσα είπαμε στην ομιλία αυτή είναι ειδικές περιπτώσεις αυτών των αποτελεσμάτων. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην πρόσφατη εργασία των Brion και Vergne [4], όπου υπάρχουν και περαιτέρω πηγές για το θέμα μας.

Βιβλιογραφία

[1] Ireland – Rosen: "A classical introduction to algebraic number theory" Springer – Verlag GTM

[2] J. Pommersheim: "Toric Varieties, I attice points and Dedekind sums", Math. Ann. 295, 1 – 24 (1993)

[3] Kantor – Khovanskii: "Une application du thιorθme de Riemann – Roch combinatoire au polynτme d' Ehrhart des polytopes entiers de $\mathbb{R}^d$", C – R. Acad. Sci. Paris Sιrie I, 317, (1993), 501 – 507.

[4] Brion – Vergne: "Lattice points in simple polytopes". Journal of the Amer. Math. Society, 10, (1997), 371 – 392.

[5] D. Varberg: "Pick' s theorem revisited", American Math. Monthly, October 1985, p. 584 – 587.

[6] Diaz – Robins: "The Erhrart polynomials of a lattice polytope", Annals of Math. 145 (1997), 503 – 518.