Authors: Μ. Λάμπρου, Τζανάκης Ν.

Title: Πόσο είναι το ημίτονο μιας μοίρας;

Abstract: Κατά προσέγγιση το ημίτονο μιας μοίρας με όση ακρίβεια θέλουμε.

ΠΟΣΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΗΜΙΤΟΝΟ ΜΙΑΣ ΜΟΙΡΑΣ;

Μ. Λάμπρου — Ν. Τζανάκης

Ο σκοπός αυτού του άρθρου δεν είναι τόσο η εύρεση μιας αλγεβρικής παράστασης για το ημ1°, πράγμα όχι δύσκολο, αλλά η επισήμανση ενός «παραδόξου» που συνοδεύει την απάντηση και η ερμηνεία αυτού του «παραδόξου» με τη βοήθεια της στοιχειώδους Θεωρίας Σωμάτων.

α. Προσεγγιστική τιμή: Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να βρούμε κατά προσέγγιση το ημ1°. Θα αναφέρουμε μόνο την ακόλουθη, η οποία είναι ουσιαστικά η μέθοδος του αρχαίου Έλληνα μαθηματικού και αστρονόμου Πτολεμαίου:

Είναι γνωστό ότι η πλευρά κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 1 είναι $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\eta\mu 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \simeq 0.587785252$$

και

$$\sigma\upsilon\nu 36^\circ \simeq 0.809016994$$

Από τον τύπο $\sigma\upsilon\nu(\theta-\phi) = \sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\phi + \eta\mu\theta\cdot\eta\mu\phi$ με $\theta = 36^\circ$, $\phi = 30^\circ$ βρίσκουμε με προσέγγιση το συν6°. Από τους τύπους

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{1+2\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2},\ \eta\mu^2\theta = \frac{1-2\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}$$

με $\theta = 3^\circ, \frac{3^\circ}{2}$ και $\frac{3^\circ}{4}$, διαδοχικά, βρίσκουμε τα

$$\eta\mu 3^\circ,\ \eta\mu\frac{3^\circ}{2}\ \text{και}\ \eta\mu\frac{3^\circ}{4}.$$

Συγκεκριμένα, βρίσκουμε

$$ημ\frac{3°}{2} \simeq 0.026176948, \quad ημ\frac{3°}{4} \simeq 0.013089595.$$

Τέλος, αποδεικνύεται ότι (εδώ είναι η πραγματικά έξυπνη ιδέα του Πτολεμαίου).

$$\frac{ημθ}{ημφ} < \frac{θ}{φ} \quad (0 < φ < θ < 90°)$$

(Ο Πτολεμαίος απέδειξε αυτή την ανισότητα γεωμετρικά. Εμείς σήμερα, που ξέρουμε παραγώγους, μπορούμε εύκολα να την αποδείξουμε διαπιστώνοντας ότι η

$$f(x) = \frac{ημx}{x}\left(0 < x < \frac{π}{2}\right)$$

είναι γνησίως φθίνουσα).

Απ' την ανισότητα αυτή βρίσκουμε λοιπόν ότι είναι

$$\frac{ημ\frac{3°}{2}}{ημ1°} < \frac{\frac{3}{2}}{1} \quad \text{και} \quad \frac{ημ1°}{ημ\frac{3°}{4}} < \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

Άρα $\frac{2}{3}ημ\frac{3°}{2} < ημ1° < \frac{4}{3}ημ\frac{3°}{4}$

Βάζοντας τις τιμές των $ημ\frac{3°}{2}$ και $ημ\frac{3°}{4}$, που βρήκαμε προηγουμένως, βλέπουμε ότι ισχύει

$$0.017451298 < ημ1° < 0.017452794$$

Οι δύο όμως τιμές εκατέρωθεν του ημ1° είναι, όπως σκέφτηκε ο Πτολεμαίος, ίσες μέχρι και το πέμπτο δεκαδικό ψηφίο. Άρα, **με προσέγγιση 5 δεκαδικών ψηφίων** έχουμε

$$ημ1° \simeq 0.01745$$

Εννοείται ότι υπάρχουν μέθοδοι για να βρούμε το ημ1° με όση προσέγγιση θέλουμε. Δεν θα μπούμε όμως σε λεπτομέρειες και θα αφήσουμε το θέμα εδώ.

β. Ακριβής τιμή: Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι

$$ημ36° = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα, αλλά χωρίς να αντικαταστήσουμε την προσεγγιστική τιμή 0.5877... για το ημ36°, δηλαδή κρατώντας την ακριβή τιμή με τα ριζικά, βρίσκουμε μια παράσταση για το συν6°, απ' όπου, όπως πριν, καταλήγουμε στη σχέση

$$ημ3° = \frac{1}{16}\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\,\right] = α \quad (1)$$

Τώρα, απ' τον τύπο $ημ3θ = 3ημθ - 4ημ^3θ$, για $θ = 1°$ βλέπουμε ότι το $x = ημ1°$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$ημ3° = 3x - 4x^3,$$

δηλαδή

$$4x^3 - 3x + α = 0$$

Για τη λύση αυτής της εξίσωσης χρησιμοποιούμε τους γνωστούς τύπους του Cardano (βλ. π.χ. [1, Κεφ. 4, Παράγραφος 4], [3, Κεφ. V 16.3]), οπότε βρίσκουμε ότι το ημ1° έχει μια απ' τις επόμενες τρεις τιμές

$$\frac{ω^j}{2}\sqrt[3]{-α+βi} + \frac{ω^{2j}}{2}\sqrt[3]{-α-βi},\ j = 0, 1, 2 \quad (2)$$

όπου $ω = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ $(ω^3 = 1)$ και $β = \sqrt{1-α^2} = συν3°$

Εδώ το σύμβολο $\sqrt[3]{-α+βi}$ σημαίνει μια οποιαδήποτε απ' τις τρεις κυβικές ρίζες του $-α+βi$. Άπαξ όμως και εκλεγεί η τιμή του συμβόλου $\sqrt[3]{-α+βi}$, το $\sqrt[3]{-α-βi}$ θα είναι εκείνη η κυβική ρίζα του $-α-βi$, της οποίας το γινόμενο με την $\sqrt[3]{-α+βi}$ είναι 1.

Στην (2) μια απ' τις τρεις τιμές του j θα μας δώσει την προσεγγιστική τιμή

$$\frac{1}{2}(0.017452406 - i\, 0.999847695) +$$
$$+ \frac{1}{2}(0.017452406 + i \cdot 0.999847695) = 0.017452406$$

και αυτή είναι η κατά προσέγγιση τιμή του ημ1°, όπως βρήκαμε στην παράγραφο α. Γι' αυτή την τιμή του j, ο τύπος (2) μας δίνει μιαν αλγεβρική έκφραση του ημ1°, όπου το α δίνεται στην (1) και

$$β = \sqrt{1-α^2} = \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

Έτσι εκφράσαμε το ημ1° με ένα καθαρά αλγεβρικό τύπο, δηλαδή με ένα τύπο που «χτίζεται» αποκλειστικά με τη βοήθεια πεπερασμένου πλήθους (i) ακεραίων αριθμών, (ii) συμβόλων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, και (iii) ριζικών. (εννοείται ότι το i το βλέπουμε ως $\sqrt{-1}$).

Στο εξής, **λέγοντας «αλγεβρικό τύπο», θα εννοούμε ένα τύπο σαν κι αυτόν που μόλις περιγράψαμε.**

Γεννάται όμως το φυσιολογικό ερώτημα: Αφού το ημ1° είναι πραγματικός αριθμός, δεν θα μπορούσαμε άραγε να κάνουμε κάποιους μετασχηματισμούς στον αλγεβρικό τύπο του ημ1°, που βρήκαμε, ώστε να εξαφανιστεί το φανταστικό $i = \sqrt{-1}$;

Η απάντηση φαίνεται παράδοξη: Δεν είναι δυνατόν να εξαφανίσουμε το i. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 1.

Είναι αδύνατον να βρούμε ένα αλγεβρικό τύπο για το ημ1° στον οποίο να μην εμφανίζεται ο φανταστικός αριθμός i.

γ. Ερμηνεία του «παραδόξου» Θεωρήματος 1. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:

Θεώρημα 2.

Έστω η εξίσωση

$$x^3 + \rho x + q = 0 \qquad (3)$$

στην οποία οι $\rho, q \in \mathbb{R}$ εκφράζονται με αλγεβρικούς τύπους και έστω F το ελάχιστο υπόσωμα του $\mathbb{R}$ που περιέχει το Q και τους αριθμούς p, q (συμβολικά, $F = Q(p, q)$). Αν η (3) έχει τρεις πραγματικές ρίζες και το πολυώνυμο στο αριστερό μέλος της (3) είναι ανάγωγο πάνω απ' το F, τότε είναι αδύνατον για την οποιαδήποτε ρίζα της (3) να εκφραστεί με αλγεβρικό τύπο.

Το θεώρημα 2 σε μια κάπως γενικότερη μορφή αποδεικνύεται στο [2] (θεώρημα 22 του Κεφαλαίου XV. Δυστυχώς η ελληνική μετάφραση αυτού του βιβλίου απ' τις εκδόσεις Καραβία δεν περιλαμβάνει το κεφάλαιο XV), με τη βοήθεια της θεωρίας των Σωμάτων.

Για ν' αποδείξουμε λοιπόν το Θεώρημα 1, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 2 για την εξίσωση

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{\alpha}{4} = 0 \qquad (4)$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι η (4) έχει τρεις πραγματικές ρίζες διότι άκρα καθενός απ' τα διαστήματα $[-1, -0.8]$, $[-0.8, 0.5]$, $[0.5, 1]$ το $f(x)$ αλλάζει πρόσημο.

Για να δείξουμε στη συνέχεια ότι το $f(x)$ είναι ανάγωγο πάνω απ' το F, που στην περίπτωσή μας είναι το ελάχιστο σώμα που περιέχει το Q και το α (συμβολικά, $F = Q(\alpha)$), θα πρέπει να δείξουμε ότι το $f(x)$ δεν αναλύεται κατά μη τετριμμένο τρόπο σε γινόμενο πολυωνύμων με συντελεστές απ' το F.

Απόδειξη:

Αν αυτό δεν ίσχυε, τότε το $f(x)$ θα είχε ένα τουλάχιστον πρωτοβάθμιο παράγοντα με συντελεστές απ' το F, δηλαδή η εξίσωση (4) θα είχε μία τουλάχιστον λύση, έστω ρ_1, μέσα στο F. Τότε οι άλλες δύο λύσεις της (4), ας τις συμβολίσουμε με ρ_2, ρ_3, θα ήταν λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$g(x) = 0 \qquad (5)$$

όπου $f(x) = (x - \rho_1) \cdot g(x)$. Δηλαδή, οι λύσεις ρ_2, ρ_3 είναι λύσεις μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης με συντελεστές απ' το F. Τώρα, εύκολα μπορεί ν' αποδείξει κανείς ότι το ελάχιστο σώμα F, που περιέχει το Q και το α, αποτελείται απ' όλες τις πολυωνυμικές ως προς α παραστάσεις, με συντελεστές απ' το Q. (Βλ. π.χ. [1, Κεφ. 3, Προτ. 3.2.3] ή [3, Κεφ. V, θεώρ. 4.2]).

Έτσι, η τυπική μορφή των στοιχείων των F είναι

$$q_0 + q_1\alpha + \ldots + q_\nu\alpha^\nu,\ q_0, q_1, \ldots, q_\nu \in Q,\ \nu \in \mathbb{Z},\ \nu \geqq 0. \qquad (6)$$

Απ' την (1) βλέπουμε ότι το α κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη. Άρα, απ' την (6), το ίδιο θα ισχύει και για κάθε στοιχείο του F.

Έτσι, αν το ημ1°, που είναι μια απ' τις τρεις λύσεις της (4), είναι ίσο με το $\rho_1 \in F$, τότε θα κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη. Αν πάλι το ημ1° ισούται με μια απ' τις ρίζες ρ_2, ρ_3, τότε θα είναι ρίζα της (5), της οποίας οι συντελεστές είναι κατασκευάσιμοι με κανόνα και διαβήτη, οπότε (ας θυμηθούμε τη γεωμετρική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, που διδάσκει η στοιχειώδης Γεωμετρία!) θα είναι και σ' αυτή την περίπτωση κατασκευάσιμη (το ημ1°) με κανόνα και διαβήτη. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι σε κάθε περίπτωση το ημ1°, άρα και η γωνία 1°, κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη. Τότε όμως το ίδιο θα ίσχυε και για όλες τις γωνίες οι οποίες έχουν ως μέτρο ακέραιο αριθμό μοιρών και, ειδικώτερα, για τη γωνία 20°. Μ' άλλα λόγια, η τριχοτόμηση της γωνίας των 60° θα ήταν δυνατή στη Στοιχειώδη Ευκλείδιο Γεωμετρία. Στη θεωρία των Σωμάτων, όμως, αποδεικνύεται ότι μια τέτοια γεωμετρική κατασκευή είναι αδύνατη (βλ. π.χ. [1, Κεφ. 3, σελ. 81], [3, Κεφ. V, Παράδειγμα 17.3], [4, σελ. 13 και εξής]).

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το f(x) στην (4) είναι ανάγωγο πολυώνυμο πάνω απ' το F, οπότε οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του θεωρήματος 2 πληρούνται και το Θεώρημα 1 προκύπτει τώρα ως άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 2.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σ. Ανδρεαδάκης, «Μαθήματα επί της Θεωρίας Galois», Αθήναι 1982
2. Birkhoff and MacLane, «A survey of Modern Algebra», The Macmillan Company, New York 1965
3. Κ. Λάκκης, «Άλγεβρα», Θεσσαλονίκη 1980
4. Ν. Τζανάκης, «Θέματα απ' τη βασική θεωρία των αλγεβρικών δομών και εφαρμογές τους στις γεωμετρικές κατασκευές», Σ.Ε.Λ.Μ.Ε. Ηρακλείου, Φθινόπωρο του 1984.

Υπεύθυνος Κρίσης: Σ. Παπασταυρίδης