Author: A. Αρβανιτόγεωργος

Title: Απο τις εξισώσεις του Maxwell στις εξισώσεις Yang-Mills

Abstract: Παρουσίαση των εξισώσεων Yang-Mills σε μια διανυσματική δέσμη. Αναφορά στη θεωρία συνοχών σε μια διανυσματική δέσμη. Γίνεται μια υπόθεση ότι ο αναγνώστης γνωρίζει βασικά στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας και ότι έχει ξανασυντήσει την έννοια της διανυσματικής δέσμης και στοιχεία εξωτερικής γραμμικής άλγεβρας.

Creator: HDML

Μαθηματική Επιθεώρηση τ. 49 – 50. Έτος 1998

Απο τις εξισωσεις Maxwell στις εξισωσεις Yang-Mills

Ανδρέας Αρβανιτογεώργος, Ph.D.

1. Εισαγωγή

Οι εξισώσεις των C. N. Yang και T. D. Mills διατυπώθηκαν από τους φυσικούς γύρω στο 1950 στα πλαίσια της θεωρίας στάθμης (gauge theory) και αποτελούν μια μη γραμμική επέκταση των εξισώσεων του Maxwell. Περί το 1970 ο M. Atiyah έκανε το θέμα γνωστό στη μαθηματική κοινότητα και από τότε αποτελεί ένα από τα πεδία έρευνας της σύγχρονης διαφορικής γεωμετρίας-μαθηματικής φυσικής. Τα ονομαζόμενα "instantons" (κρίσιμα σημεία του συναρτησοειδούς Yang-Mills) έχουν πρόσφατα αποτελέσει εξαιρετικά χρήσιμα εργαλεία για τη μελέτη των τετραδιάστατων πολλαπλοτήτων (βλ. **[Fr-Uh]**) και έχουν βοηθήσει στο να οριστούν καινούργιες αναλλοίωτες στις πολλαπλότητες αυτές. Να υπογραμμίσουμε εδώ ότι το ενδιαφέρον για κρίσιμα σημεία διαφόρων συναρτησοειδών δεν είναι σπάνιο φαινόμενο στη διαφορική γεωμετρία. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι οι μετρικές Einstein είναι κρίσιμα σημεία του συναρτησοειδούς της βαθμωτής καμπυλότητας και ότι οι αρμονικές συναρτήσεις είναι κρίσιμα σημεία του συναρτησοειδούς ολικής ενέργειας.

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζουμε τις εξισώσεις Yang-Mills σε μία διανυσματική δέσμη. Με την ευκαιρία αυτή αναφερόμαστε και στη θεωρία των συνοχών σε μια διανυσματική δέσμη. Αν και ο χώρος είναι περιορισμένος για μια εκτενή παρουσίαση του θέματος, προσπαθήσαμε να ελαχιστοποιήσουμε τις αναφορές στη βιβλιογραφία. Παρ' όλα αυτά υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης γνωρίζει βασικά στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας και ότι έχει ξανασυναντήσει την έννοια της διανυσματικής δέσμης και στοιχεία εξωτερικής γραμμικής άλγεβρας. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στις αναφορές **[At-Hi-Si]**, **[Bou-Law]**, **[Do-Kno]**, **[Law]**.

2. Οι εξισώσεις Maxwell

Εστω $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ το ηλεκτρικό πεδίο, $B = (B_1, B_2, B_3)$ το μαγνητικό πεδίο, ρ η πυκνότητα φορτίου και $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ η πυκνότητα ρεύματος. Οι εξισώσεις του Maxwell είναι το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{E} &= 4\pi\rho && (1)\\
\mathrm{curl}B - \frac{d}{dt}\vec{E} &= 4\pi\vec{J} && (2)\\
\mathrm{div}B &= 0 && (3)\\
\mathrm{curl}\vec{E} + \frac{d}{dt}B &= 0. && (4)
\end{aligned}$$

Ξαναγράφουμε τώρα τις εξισώσεις αυτές στο χωροχρόνο Minkowski $M^4 \cong \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας τη μετρική $g((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$. Το ηλεκτρο-μαγνητικό πεδίο εκφράζεται με την αντισυμμετρική 2-μορφή $\Omega^2(M^4) \ni F = \sum_{i,j} F_{ij}dx^i \wedge dx^j = E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$. Τότε οι εξισώσεις (3) και (4) ισοδυναμούν με την εξίσωση

$$dF = 0.$$

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση άστρο $* : \Omega^2(M^4) \to \Omega^2(M^4)$ που δίνεται ως $dx \wedge dt \mapsto dy \wedge dz$, $dy \wedge dt \mapsto dz \wedge dx$, $dz \wedge dt \mapsto dx \wedge dy$. Ορίζουμε

$$*F = -B_1 dx\wedge dt - B_2 dy\wedge dt - B_3 dz\wedge dt + E_1 dy\wedge dz + E_2 dz\wedge dx + E_3 dz\wedge dy \in \Omega^2(M^4$$

και

$$*J = \rho dx\wedge dy\wedge dz + J_1 dy\wedge dz\wedge dt + J_2 dz\wedge dt\wedge dx + J_3 dt\wedge dx\wedge dy \in \Omega^3(M^4).$$

Τότε οι εξισώσεις (1) και (2) ισοδυναμούν με την εξίσωση

$$d * F = *J$$

και όταν υπάρχει απουσία φορτίου αυτή παίρνει τη μορφή

$$d * F = 0.$$

Οι εξισώσεις λοιπόν του Maxwell στον τετραδιάστατο χώρο Minkowski με απουσία ηλεκτρικού φορτίου λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} dF &= 0 \\ d * F &= 0. \end{aligned}$$

Θέλουμε τώρα να γενικεύσουμε αυτές τις εξισώσεις για μια συμπαγή πολλαπλότητα Riemann, όπου τώρα η F θα είναι κάποια κατάλληλη k-μορφή.

3. Διανυσματικές δέσμες

Ορισμός 1 *Μια διανυσματική δέσμη τάξεως n αποτελείται από δύο λείες πολλαπλότητες τον ολικό χώρο E και τη βάση M και μια λεία απεικόνιση προβολής $\pi : E \to M$ με τις εξής ιδιότητες: Για κάθε $x \in M$ το "νήμα" $E_x \equiv \pi^{-1}(x)$ έχει τη δομή ενός (πραγματικού) διανυσματικού χώρου διάστασης n και για κάθε σημείο $x \in M$ υπάρχει μια περιοχή $U \ni x$ και μια αμφιδιαφόριση*

$$\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times R^n$$

με την ιδιότητα ότι για κάθε $y \in U$, η απεικόνιση

$$\phi_y \equiv \phi|_{E_y} : E_y \to \{y\} \times R^n$$

να είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Αναφερόμενοι στην τελευταία αυτή ιδιότητα, λέμε ότι η διανυσματική δέσμη είναι *τοπικά τετριμμένη*. Επίσης το ζεύγος (ϕ, U) ονομάζεται *(τοπικός) χάρτης της δέσμης*. Μια διανυσματική δέσμη τάξεως n για την οποία ο ολικός χώρος E είναι ισόμορφος με τον $M \times \mathbf{R}^n$, ονομάζεται *τετριμμένη*. Ετσι λοιπόν μία διανυσματική δέσμη μπορεί να θεωρηθεί ως μια οικογένεια διανυσματικών χώρων (όλοι ισόμορφοι με τον $\mathbf{R}^n$), η οποία παραμετρικοποιείται από μια πολλαπλότητα (με τρόπο τοπικά τετριμμένο).

Εστω (E, π, M) μια διανυσματική δέσμη τάξεως n, και $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ένα ανοικτό κάλυμμα της M με αντίστοιχες αμφιδιαφορίσεις $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbf{R}^n$. Τότε ορίζονται οι *απεικονίσεις μετάβασης*

$$\phi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$$

από τη σχέση

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x,v) = (x, \phi_{\beta\alpha}(x)v) \quad (x \in M, v \in \mathbf{R}^n)$$

όπου $\mathrm{Gl}(n,\mathbf{R})$ είναι η γενική γραμμική ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμικών απεικονίσεων του $\mathbf{R}^n$ στον εαυτό του.

Ορισμός 2 *Εστω G μια υποομάδα της $\mathrm{Gl}(n,R)$, για παράδειγμα η ορθογώνια O_n ή η ειδική ορθογώνια ομάδα SO_n. Η ομάδα G ονομάζεται δομική ομάδα (structure group) της διανυσματικής δέσμης εάν υπάρχει ένας άτλας από χάρτες της δέσμης, ώστε όλες οι απεικονίσεις μετάβασης να παίρνουν τιμές στη G.*

Ορισμός 3 *Εστω (E,π,M) μια διανυσματική δέσμη. Μια εγκάρσια τομή (cross section) της E είναι μια λεία απεικόνιση $s : M \to E$ με την ιδιότητα $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$.*

Θα συμβολίζουμε το σύνολο των εγκάρσιων τομών μιας διανυσματικής δέσμης E με $\Gamma(E)$.

Το πιο γνωστό παράδειγμα διανυσματικής δέσμης είναι η εφαπτόμενη δέσμη TM μιας λείας πολλαπλότητας M. Μια εγκάρσια τομή στην εφαπτόμενη δέσμη ονομάζεται *διανυσματικό πεδίο* της πολλαπλότητας M. Ενα άλλο παράδειγμα διανυσματικής δέσμης είναι η συνεφαπτόμενη δέσμη T^*M της πολλαπλότητας M και οι εγκάρσιες τομές αυτής της δέσμης ονομάζονται *1-μορφές*. Ανάλογα ορίζονται η *τανυστική δέσμη* $T^r_s(M)$ των τανυστών τύπου (r,s) στην πολλαπλότητα M, καθώς επίσης και η *εξωτερική δέσμη* $\Lambda^p(M)$. Αυτή είναι μια διανυσματική δέσμη με νήμα επί του $x \in M$ το σύνολο

$$\Lambda^p(T_x^*M) = T_x^*M \wedge \ldots \wedge T_x^*M \quad (p \text{ φορές}).$$

Το σύνολο των εγκάρσιων τομών της δέσμης $\Lambda^p(M)$ συμβολίζεται με $\Omega^p(M)$ και τα στοιχεία του ονομάζονται *(εξωτερικές) p-μορφές*.

4. Συνοχές σε διανυσματικές δέσμες

Ορισμός 4 *Εστω M μια λεία πολλαπλότητα και E μια διανυσματική δέσμη επί της M. Μια συνοχή στη δέσμη E είναι ένας τελεστής (συναλλοίωτη παράγωγος)*

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E) \otimes \Gamma(T^*M)$$

ο οποίος ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$$\begin{array}{ll}
(i) & \nabla_{V+W}s = \nabla_V s + \nabla_W s \quad \text{για κάθε} \quad V, W \in T_xM, s \in \Gamma(E) \\
(ii) & \nabla_{fX}s = f\nabla_X s \quad \text{για κάθε} \quad f \in C^\infty(M), X \in \Gamma(TM) \\
(iii) & \nabla_V(s+t) = \nabla_V s + \nabla_V t \quad \text{για κάθε} \quad V \in T_xM, s, t \in \Gamma(E) \\
(iv) & \nabla_V(fs) = V(f)\cdot s + f\nabla_V s \quad \text{για κάθε} \quad f \in C^\infty.
\end{array}$$

Λόγω των ιδιοτήτων (i) και (ii), ο τελεστής ∇ θεωρείται ως μια απεικόνιση από το σύνολο $\Gamma(TM)\otimes\Gamma(E)$ στο σύνολο $\Gamma(E)$ και συμβολίσαμε το $\nabla s(V)$ με $\nabla_V s$, $(s \in \Gamma(E), V \in T_xM)$.

Η συνοχή σε μια διανυσματική δέσμη γενικεύει την έννοια της κατευθυνόμενης παραγώγου (directional derivative) ενός διανυσματικού πεδίου του $\mathbb{R}^n$ σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, κατά τη δεύθυνση ενός διανύσματος V με αρχή το σημείο x_0.

Εστω τώρα $x_0 \in M$ και U μια ανοικτή περιοχή του x_0 η οποία να ορίζει έναν τοπικό χάρτη στην M και στη δέσμη E και έστω $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^d}$ $(d = \dim M)$ τοπικά διανυσματικά πεδία. Χρησιμοποιώντας την ταύτιση $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ καθώς και μια βάση του $\mathbb{R}^n$, λαμβάνουμε μια βάση $\mu_1, \ldots, \mu_n$ από εγκάρσιες τομές της δέσμης $E|_U$. Ετσι λοιπόν για μία συνοχή ∇ έχουμε ότι

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mu_j = \Gamma^k_{ij}\mu_k \text{ [1]}$$

και οι αριθμοί Γ^k_{ij} $(j, k = 1, \ldots, n, i = 1, \ldots, d)$ ονομάζονται *σύμβολα Christoffel* [2]. Επίσης, αν $\mu \in \Gamma(E)$, τότε στην περιοχή U ισχύει ότι $\mu = a^k\mu_k$. Αποδεικνύεται με εκτενείς υπολογισμούς (βλ. [**Ko-No**, I σελ. 124 πρότ. 10.9]), ότι μία συνοχή ∇ δίνεται από τη σχέση

$$\nabla = d + A,$$

όπου d είναι ο γνωστός τελεστής εξωτερικής παραγώγισης και A μια 1-μορφή επί του U με τιμές στο σύνολο $\boldsymbol{gl}(n, \mathbb{R})$ των $(n \times n)$ πραγματικών πινάκων. Ετσι λοιπόν $A \in \Gamma(\boldsymbol{gl}(n, \mathbb{R}) \otimes T^*M|_U)$, και ο A μπορεί να

[1] Εχουμε χρησιμοποιήσει τον γνωστό αθροιστικό συμβολισμό του Einstein, όπου οι "πάνω-κάτω" δείκτες συμβολίζουν άθροισμα.

[2] Αποτελούν γενίκευση των γνωστών συμβόλων Christoffel σε μια πολλαπλότητα.

θεωρηθεί ως ένας $(n \times n)$ πίνακας με στοιχεία από τη συνεφαπτόμενη δέσμη T^*M.

Εστω E και F δύο διανυσματικές δέσμες επί της πολλαπλότητας M με συνοχές ∇^E και ∇^F αντίστοιχα. Τότε ορίζονται συνοχές σε δέσμες που προκύπτουν από τις E και F. Εάν $(\cdot,\cdot) : E \otimes E^* \to \mathbb{R}$ είναι η διγραμμική απεικόνιση $(v, f) \mapsto f(v)$, τότε η συνοχή ∇^* στην E^* ορίζεται από τη σχέση $(s, \nabla^* t^*) = -(\nabla^E s, t^*) + d(s, t^*)$ $(s \in \Gamma(E), t^* \in \Gamma(E^*))$. Προκύπτει ότι εάν $D = d + A$ στην περιοχή U, τότε $A^* = -A^t$.

Στη δέσμη $E \otimes F$ ορίζεται η συνοχή ∇ από τη σχέση $\nabla(s \otimes t) = \nabla^E s \otimes t + s \otimes \nabla^F t$. Ειδικότερα ορίζεται μία συνοχή, την οποία και πάλι τη συμβολίζουμε με ∇, στη δέσμη $\mathrm{End}(E) = E \otimes E^*$. Εστω $\mu_1^*, \ldots, \mu_n^*$ μία βάση στη δέσμη E^*, η οποία είναι δυϊκή της βάσης $\mu_1, \ldots, \mu_n$ στη δέσμη E. Τότε εάν $s = s^i_j \mu_i \otimes \mu^*_j \in \Gamma(\mathrm{End}(E))$, προκύπτει ότι

$$Ds = ds + [A, s]. \tag{5}$$

Θα επεκτείνουμε τώρα τον τελεστή ∇ από το σύνολο $\Gamma(E)$ στο σύνολο $\Gamma(E) \otimes \Omega^p(M)$ $(0 \leq p \leq d = \dim M)$. Εστω $s \in \Gamma(E), \omega \in \Omega^p(M)$. Ορίζουμε

$$\nabla(s \otimes \omega) = \nabla s \wedge \omega + s \otimes d\omega.$$

Θέτουμε $\Omega^p(E) \equiv \Gamma(E) \otimes \Omega^p(M)$ και $\Omega^p \equiv \Omega^p(M)$. Εχουμε λοιπόν ορίσει μια ακολουθία τελεστών

$$\nabla : \Omega^p(E) \to \Omega^{p+1}(E), \quad (0 \leq p \leq d).$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο τελεστής εξωτερικής παραγώγισης $d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$ ικανοποιεί τη σχέση $d \circ d = 0$. Μια παρόμοια σχέση δεν ισχύει για τον τελεστή ∇.

Ορισμός 5 *Η καμπυλότητα μιας συνοχής ∇ είναι ο τελεστής*

$$F = \nabla \circ \nabla : \Omega^0(E) \to \Omega^2(E).$$

Μια συνοχή ονομάζεται επίπεδη (flat) εάν $F = 0$.

Εάν $s \in \Gamma(E)$, τότε χρησιμοποιώντας την έκφραση $\nabla = d + A$ υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} F(s) &= (d + A) \circ (d + A)s = (d + A)(ds + As) \\ &= (dA)s - Ads + Ads + A \wedge As, \end{aligned}$$

συνεπώς λαμβάνουμε ότι

$$F = dA + A \wedge A. \tag{6}$$

Από τον ορισμό της καμπυλότητας προκύπτει ότι $F \in \Omega^2(E) \otimes (\Omega^0(E))^* = \Omega^2(\mathrm{End}E)$, συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί ως μία 2-μορφή με τιμές στο σύνολο $\mathrm{End}E$. Ισχύει το εξής:

Θεώρημα 1 *(Δεύτερη ταυτότητα του Bianchi). Η καμπυλότητα F μιας συνοχής ∇ ικανοποιεί τη σχέση $\nabla F = 0$*

Απόδειξη. Εστω $\nabla = d + A$ και $A = A_j dx^j$. Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (5), (6) και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\nabla F &= dF + [A, F] = dA \wedge A - A \wedge dA + [A, dA + A \wedge A] \\
&= dA \wedge A - A \wedge dA + A \wedge dA - dA \wedge A + [A, A \wedge A] \\
&= [A, A \wedge A] = [A_i dx^i, A_j dx^j \wedge A_k dx^k] \\
&= A_i A_j A_k (dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k - dx^j \wedge dx^k \wedge dx^i) = 0.
\end{aligned}$$

Εάν συμβολίσουμε τον τελεστή καμπυλότητας F ως στοιχείο του συνόλου $\Omega^2(\mathrm{End}E)$ με R, δηλ. έχουμε ότι $F : \Omega^0(E) \to \Omega^2(E)$ με $s \mapsto R(\cdot,\cdot)s$, τότε με απευθείας υπολογισμό προκύπτει το εξής:

Πρόταση 1 $R(X,Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s$ *για κάθε* $X, Y \in \Gamma(TM)$, $s \in \Gamma(E)$

Στην περίπτωση που $E = TM$ και η συνοχή ∇ είναι η συνοχή Levi-Cività, το στοιχείο R είναι ο κλασικός τανυστής καμπυλότητας της πολλαπλότητας Riemann M.

Εστω ∇ μια συνοχή σε μια δέσμη (E, π, M) και g μια μετρική Riemann στην E (αυτό σημαίνει ότι ορίζεται μια οικογένεια εσωτερικών γινομένων σε κάθε νήμα E_x, η οποία εξαρτάται από το x κατά λείο τρόπο).

Ορισμός 6 *Η συνοχή ∇ ονομάζεται συμβατή με τη μετρική g εάν ισχύει η σχέση $Xg(s,t) = g(\nabla_X s, t) + g(s, \nabla_X t)$, για κάθε $X \in \Gamma(TM)$, $s, t \in \Gamma(E)$. Μια τέτοια συνοχή ονομάζεται και συνοχή Riemann ή μετρική συνοχή.*

Εάν ∇ είναι μια συνοχή Riemann με τοπική έκφραση $\nabla = d + A$, τότε αποδεικνύεται ότι ([**Ko-No**, τόμ. I]) για κάθε $X \in TM$ ο πίνακας $A(X)$ είναι αντισυμμετρικός, δηλ. $A(X) \in o_n$ (=η άλγεβρα Lie της O_n). Ετσι λοιπόν εάν θέσουμε $\mathrm{Ad}E = \{L \in \mathrm{End}(E) : L^t = -L\}$ [3], τότε το σύνολο $\Omega^p(\mathrm{Ad}E)$ που απετελείται από εκείνα τα στοιχεία στο $\Omega^p(\mathrm{End}E)$ για τα οποία ο ενδομορφισμός κάθε νήματος είναι αντισυμμετρικός, δεν είναι κενό. Ετσι λοιπόν αν $\nabla = d+A$, τότε $A \in \Omega^1(\mathrm{Ad}E)$ και επιπλέον $F \in \Omega^2(\mathrm{Ad}E)$.

5. Οι εξισώσεις Yang-Mills

Υποθέτουμε τώρα ότι η πολλαπλότητα M είναι συμπαγής και προσανατολισμένη. Εστω $E \to M$ μια διανυσματική δέσμη με συνοχή Riemann ∇ και καμπυλότητα $F^\nabla \in \Omega^2(\mathrm{Ad}E)$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}(E)$ το σύνολο των συνοχών στην E.

Ορισμός 7 *Το συναρτησοειδές Yang-Mills είναι η απεικόνιση* $\mathcal{L} : \mathcal{A}(E) \to R^+$ *με τύπο*

$$\mathcal{L}(\nabla) = \frac{1}{2}\int_M \langle F^\nabla, F^\nabla \rangle dv$$

Το εσωτερικό γινόμενο του ορισμού ορίζεται ως $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^t \circ B)$, $(A, B \in \mathrm{End}E)$.

Πριν διατυπώσουμε το κεντρικό θεώρημα σχετικά με τα κρίσιμα σημεία του συναρτησοειδούς Yang-Mills χρειαζόμαστε να ορίσουμε μια ακολουθία τελεστών

$$\nabla^* : \Omega^p(\mathrm{Ad}E) \to \Omega^{p-1}(\mathrm{Ad}E)$$

η οποία είναι δυϊκή της ακολουθίας

$$\nabla : \Omega^{p-1}(\mathrm{Ad}E) \to \Omega^p(\mathrm{Ad}E),$$

υπό την έννοια ότι $(\nabla^*\psi, \phi) = (\nabla\phi, \psi)$, για κάθε $\phi \in \Omega^{p-1}(\mathrm{Ad}E), \psi \in \Omega^p(\mathrm{Ad}E)$ (εδώ $(\phi, \psi) = \int_M \phi \wedge *\psi$).

Θεώρημα 2 *Η συνοχή ∇ είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς Yang-Mills εάν και μόνο εάν $\nabla^* F^\nabla = 0$.*

[3] Υπάρχει λόγος για την ύπαρξη του συμβολισμού Ad, αλλά δεν θα επεκταθούμε σε αυτό.

Απόδειξη. Η συνοχή ∇ είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς Yang-Mills εάν και μόνο εάν $\frac{d}{dt}\mathcal{L}(\nabla + tA)\Big|_{t=0} = 0$ για κάθε $A \in \Omega^1(\mathrm{Ad}E)$. Εάν $F^{\nabla'}$ είναι η καμπυλότητα της συνοχής $\nabla + tA$, τότε προκύπτει ότι $F^{\nabla'} = F^{\nabla} + t(\nabla A) + t^2(A \wedge A)$. (Πράγματι, έστω $s \in \Gamma(E) = \Omega^0(E)$ και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} F^{\nabla'}(s) &= (\nabla + tA) \circ (\nabla + tA)s = \nabla^2 s + t\nabla(As) + tA \wedge \nabla s + t^2(A \wedge A)s \\ &= (F^{\nabla} + t(\nabla A) + t^2(A \wedge A))s, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\nabla(As) = (\nabla A)s - A \wedge \nabla s$). Συνεπώς

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(\nabla + tA)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_M \langle F^{\nabla'}, F^{\nabla'}\rangle\Big|_{t=0)} = \int_M \langle \nabla A, F^{\nabla}\rangle = (A, \nabla^* F^{\nabla})$$

το οποίο ισούται με μηδέν εάν και μόνο εάν $\nabla^* F^{\nabla} = 0$.

Ορισμός 8 *Οι εξισώσεις Yang-Mills σε μία διανυσματική δέσμη E με συνοχή Riemann ∇ και καμπυλότητα F^{∇}, είναι οι εξισώσεις*

$$\nabla F^{\nabla} = 0, \quad \nabla^* F^{\nabla} = 0.$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης ως προς τη συνοχή ∇. Μια λύση του συστήματος αυτού ονομάζεται *συνοχή Yang-Mills.* Στην ειδική περίπτωση όπου $E = S^1 \times \mathbf{R}^4$=μιγαδική ευθειακή δέσμη (line bundle) επί του M^4, τα κρίσιμα σημεία του συναρτησοειδούς Yang-Mills αντιστοιχούν στις εξισώσεις Maxwell με απουσία φορτίου και πυκνότητα ρεύματος. Η συνοχή ∇ ονομάζεται *δυναμικό* και η καμπυλότητα F^{∇} ονομάζεται *πεδίο*.

6. Αυτοδυϊκότητα (selfduality)

Οι εξισώσεις Yang-Mills είναι αρκετά δύσκολο να λυθούν. Στην περίπτωση όμως όπου η πολλαπλότητα M είναι διάστασης 4, τότε παρουσιάζονται ενδιαφέροντα φαινόμενα. Το δύσκολο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης αντικαθίσταται με ένα (ευκολότερο) σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης! Κάτι ανάλογο στις δύο διαστάσεις είναι, για παράδειγμα, ότι η εξίσωση Laplace αντικαθίσταται από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann.

Θα χρειαστούμε κατ' αρχήν κάποια στοιχεία εξωτερικής γραμμικής άλγεβρας. Εστω $(V, \langle\ \rangle)$ ένας προσανατολισμένος πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, διάστασης 4.

Ο τελεστής Hodge-άστρο $* : \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$ ορίζεται ως εξής: Εστω $(e_1, \ldots, e_4)$ μια προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση του V. Ορίζουμε $*(e_i \wedge e_j) = e_k \wedge e_l$, όπου $(i,j,k,l) \in A_4$ (άρτιες μεταθέσεις του συνόλου $\{1,2,3,4\}$). Από τον ορισμό προκύπτει ότι $** = Id$.

Ορίζουμε επίσης $\phi \wedge *\psi = (\phi, \psi) e_1 \wedge \cdots \wedge e_4$, όπου το εσωτερικό γινόμενο είναι το επαγόμενο στον $\Lambda^2 V$.

Ο διανυσματικός χώρος $\Lambda^2 V$ αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ιδιοχώρων

$$\Lambda^2 V = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-,$$

όπου $\Lambda_\pm = \text{span}\{e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \pm e_4 \wedge e_2, e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3\}$. Ισχύει ότι για κάθε $\phi \in \Lambda^2 V$, $\phi = \lambda e_1 \wedge e_2 + \mu e_3 \wedge e_4$, ως προς κάποια προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση του V (αυτό είναι ανάλογο της διαγωνιοποίησης αντισυμμετρικών πινάκων). Τότε προκύπτει ότι

$$*\phi = \pm\phi \Leftrightarrow \lambda = \pm\mu.$$

Η μορφή ϕ ονομάζεται *αυτοδυϊκή* (selfdual) εάν $*\phi = \phi$ και *αντι-αυτοδυϊκή* (anti-selfdual) εάν $*\phi = -\phi$.

Τα παραπάνω παραμένουν σε ισχύ εάν θεωρήσουμε μορφές με τιμές σε ένα διανυσματικό χώρο E. Τότε για την επέκταση

$$\Lambda^2 V \otimes E \xrightarrow{*\otimes Id} \Lambda^2 V \otimes E$$

ισχύει ότι $(* \otimes Id)^2 = Id$, απ' όπου προκύπτει η ανάλυση

$$\Lambda^2 V \otimes E = (\Lambda_+ \otimes E) \oplus (\Lambda_- \otimes E).$$

Ερχόμαστε τώρα στην περίπτωση όπου έχουμε μια διανυσματική δέσμη $E \to M$ και θεωρούμε τον τελεστή άστρο στη συνεφαπτόμενη δέσμη $* : \Lambda^2 T^* M \to \Lambda^2 T^* M$.

Με επέκταση των παρατηρήσεων που κάναμε πιο πάνω, λαμβάνουμε την ανάλυση

$$\Lambda^2 T^* M \otimes \text{Ad}E = (\Lambda_+ \otimes \text{Ad}E) \oplus (\Lambda_- \otimes \text{Ad}E)$$

και τελικά ότι

$$\Omega^2(\mathrm{Ad}E) = \Omega^2_+(\mathrm{Ad}E) \oplus \Omega^2_-(\mathrm{Ad}E).$$

Ειδικότερα, ο τανυστής καμπυλότητας F^∇ αναλύεται ως

$$F^\nabla = F^\nabla_+ \oplus F^\nabla_-.$$

Ορισμός 9 *Η συνοχή ∇ ονομάζεται αυτοδυϊκή (selfdual) εάν $*F^\nabla = F^\nabla$ και αντι-αυτοδυϊκή (anti-selfdual) εάν $*F^\nabla = -F^\nabla$.*

Στη γλώσσα της φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων οι αυτοδυϊκές συνοχές ονομάζονται ***instantons*** και οι αντι-αυτοδυϊκές ***anti-instantons***.

Το παρακάτω θεώρημα είναι θεμελιώδες διότι δείχνει ότι σε μια διανυσματική δέσμη επί μιας τετραδιάστατης πολλαπλότητας, οι αυτοδυϊκές συνοχές είναι λύσεις των εξισώσεων Yang-Mills.

Θεώρημα 3 *Εαν η συνοχή ∇ είναι αυτοδυϊκή, τότε ικανοποιεί τις εξισώσεις Yang-Mills.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε κατ' αρχήν ότι $\nabla^* = - * \nabla *$ (εδώ $* : \Lambda^3 T^* M \to \Lambda^1 T^* M$). Πράγματι, έστω ϕ μια 2-μορφή και ψ μια 3-μορφή. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_M \langle \phi, \nabla^* \psi \rangle dv &= \int_M \langle \nabla\phi, \psi \rangle dv = \int_M \nabla\phi \wedge *\psi = -\int_M \phi \wedge \nabla * \psi \\ &= -\int_M \phi \wedge *(*\nabla * \psi) = -\int_M \langle \phi, *\nabla * \psi \rangle dv \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει το αποτέλεσμα. Επειδή η συνοχή ∇ είναι αυτοδυϊκή λαμβάνουμε ότι

$$\nabla^* F^\nabla = - * \nabla * F^\nabla = - * \nabla F^\nabla = 0,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει λόγω της ταυτότητας Bianchi.

Οι εξισώσεις του Maxwell είναι οι λύσεις των εξισώσεων Yang-Mills για την κύρια S^1-δέσμη $S^1 \times \mathbb{R}^4 \to M^4$ επί μιάς πολλαπλότητας Lorentz M^4 (αυτή ονομάζεται *αβελιανή* περίπτωση). Οι πρώτες λύσεις των εξισώσεων Yang-Mills για μη αβελιανή δομική ομάδα δόθηκαν από τον φυσικό t'Hooft (1977) ο οποίος βρήκε αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων αυτών για μια κύρια κβατερνιανή SU_2-δέσμη επί της σφαίρας S^4 (η περίπτωση αυτή ονομάζεται *μη αβελιανή*).

7. Συμπερασματικές παρατηρήσεις

Οπως αναφέραμε στην εισαγωγή του άρθρου αυτού, τα "instantons" πρωτοεισήχθησαν από τον S. Donaldson για τη μελέτη της διαφορικής τοπολογίας των τετραδιάστατων πολλαπλοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, εάν M είναι μια συμπαγής τετραδιάσταση πολλαπλότητα, τότε ορίζεται ένα φυσικό ζευγάρωμα $\Gamma : H^2(M) \times H^2(M) \to \mathbb{R}$ως $(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$. Η απεικόνιση Γ ονομάζεται *μορφή τομής* (intersection form) της πολλαπλότητας M. Ο Donaldson απέδειξε ότι έαν η πολλαπλότητα M είναι απλά συνεκτική και η Γ είναι μη ιδιάζουσα, τότε υπάρχει μια βάση στην $H^2(M)$ ώστε η Γ να παρίσταται ως $\pm I$ (I = ταυτοτικός πίνακας). Από την άλλη μεριά ο M. Freedman απέδειξε ότι υπάρχουν συμπαγείς, απλά συνεκτικές τετραδιάστατες πολλαπλότητες των οποίων η μορφή τομής δεν παρίσταται ως $\pm I$, άρα αυτές οι πολλαπλότητες δεν επιδέχονται λεία δομή.

Το βασικό συστατικό στην απόδειξη του Donaldson είναι η μελέτη του συνόλου $\mathcal{M}$ των "instantons" εφοδιασμένο με μια ειδική δομή (moduli space) επί μίας διανυσματικής δέσμης με δομική ομάδα SU_2 και με "τοπολογικό ηλεκτρικό φορτίο" (topological charge)

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{tr}(F \wedge F) = 1$$

για την καμπυλότητα F μιας SU_2-συνοχής. (Γεωμετρικά το τοπολογικό ηλεκτρικό πεδίο ισούται με μείον τη δεύτερη χαρακτηριστική κλάση της δέσμης).

Τα τελευταία χρόνια ο Donaldson προχώρησε περισσότερο στη μελέτη της τοπολογίας και της γεωμετρίας αυτών των χώρων "moduli" για τετραδιάστατες πολλαπλότητες, εισάγοντας νέες αναλλοίωτες ποσότητες γι' αυτούς, τα γνωστά *πολυώνυμα Donaldson*. Η όλη θεωρία αν και συναρπαστική, είναι αρκετά δύσκολη στην κατανόηση του τεχνικού μαθηματικού κομματιού της. Παρόλα αυτά το 1994 ο E. Witten ανακάλυψε μια πολύ πιο απλή προσέγγιση στη θεωρία αυτή (**[Wi]**, **[Kr-Mr]**).

Κλείνοντας θα ήταν ίσως σκόπιμο και ένα σχόλιο σχετικά μ' έναν από τους λόγους που ώθησαν τους μαθηματικούς να ασχοληθούν με τις αυτοδυϊκές συνοχές, το οποίο στηρίζεται στην αλληλοεξάρτηση μεταξύ μαθηματικών και φυσικής.

Η κλασική μηχανική (που βασίζεται στην αρχή της ελάχιστης δράσης) αιτιολογεί τη μελέτη θεμάτων της διαφορικής γεωμετρίας που σχετίζονται με τη θεωρία των γεωδαισιακών ή των ελαχίστων επιφανειών. Από την άλλη μεριά η γενική θεωρία της σχετικότητας δίνει το έναυσμα για τη μελέτη των μετρικών Einstein σε μια πολλαπλότητα Riemann. Ενα από τα ανοικτά προβλήματα της φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων είναι η πλήρης ενοποίηση των δυνάμεων της φύσης και ειδικότερα της βαρυντικής με τις υπόλοιπες (ηλεκτρομαγνητική, ισχυρή και ασθενής). Ο προβληματισμός λοιπόν που τίθεται, είναι μήπως η θεωρία των αυτοδυϊκών συνοχών και γενικότερα των συνοχών σε κατάλληλες δέσμες, μπορεί να συμβάλει στην απάντηση αυτού του προβλήματος.

Βιβλιογραφία

[Αρ] Α. Αρβανιτογεώργος: *Ομάδες Lie, Ομογενείς Χώροι και Διαφορική Γεωμετρία*, υπό έκδοση εκδ. Τροχαλία, Αθήνα.

[At-Hi-Si] M. Atiyah-N. Hitchin-I. Singer: *Self-duality in four dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London, A 362 (1978) 425–461.

[Bou-Law] J. P. Bourguignon - B. Lawson: *Stability and isolation phenomena for Yang-Mills theory*, Comm. Math. Phys. 79 (1982).

[Do-Kno] S. Donalson-P. Knonheimer: *The Geometry of Four Manifolds*, Oxford University Press, 1990.

[Fr-Uh] D. Freed-K. Uhlenbeck: *Instantons and Four Manifolds*, Springer, New York 1984.

[He] S. Helgason: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York 1987.

[Jo] J. Jost: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer-Verlag, New York 1995.

[Ko-No] S. Kobayashi-K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry*, Wiley (Interscience), New York, Vol. I 1963, Vol. II 1969.

[Kr-Mr] P.Kronheimer - T. Mrowka: *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Letters 1 (1994) 797–808.

[Μα] Α. Μάλλιος: *Μαθήματα Διαφορικής Γεωμετρίας*, Εκδ. Καρδαμήτσα, Αθήνα 1992.

[Law] B. Lawson: *The geometry of gauge fields in four dimensions*,

AMS CBMS Lectures 58 (1985).
[**War**] F. Warner: *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York 1983.
[**Wi**] E. Witten: *Monopoles and four manifolds*, Math. Res. Letters 1 (1994), 769–796.

ΒΡΕΤΑΝΙΚΟ ΣΥΜΒΟΥΛΙΟ ΑΘΗΝΑΣ & ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ESSEX - ΑΓΓΛΙΑ, ΠΛ. ΦΙΛΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ 17, 106 74 ΑΘΗΝΑ

email: taarv@hol.gr