

Author: Τουμάσης Μπάμπης

Title: Μία ανασκόπηση του Παγκοσμίου Σκηνικού της Δευτεροβάθμιας Μαθηματικής Εκπαίδευσης τα τελευταία 200 χρόνια.

Abstract: Η Μαθηματική εκπαίδευση τον 19ο και 20ο αιώνα. Μεταρρυθμίσεις. Αλλαγές στις διδακτικές μεθόδους.

Creator: HDML

ΜΙΑ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΟΥ ΠΑΓΚΟΣΜΙΟΥ ΣΚΗΝΙΚΟΥ ΤΗΣ ΔΕΥΤ/ΘΜΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ, ΤΑ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ 200 ΧΡΟΝΙΑ*

Μ. Τουμάσης

1. Η μαθηματική εκπαίδευση του 19ου αιώνα

Τον 18ο αιώνα τα περισσότερα σχολεία στη Δ. Ευρώπη και τις Η.Π.Α. ελέγχονταν από την εκκλησία και εξυπηρετούσαν τα συμφέροντα της. Τα μαθηματικά που δίδασκαν σ' αυτά ήταν στοιχειώδη και περιορίζονταν στη μελέτη των διαφόρων αριθμών και σχημάτων, καθώς και βασικών αρχών της αστρονομίας που βοηθούσαν στον καθορισμό των ημερομηνιών των κινητών εορτών, όπως π.χ. του Πάσχα (G. Howson et al, 1982, P. 17).

Με την είσοδο όμως του 19ου αιώνα εσήμανε η αρχή της βιομηχανικής περιόδου για πολλές χώρες και οι ανάγκες της νέας βιομηχανικής κοινωνίας δημιουργούσε τις προϋποθέσεις για ένα νέο προσανατολισμό της εκπαίδευσης, στην οποία το μάθημα των μαθηματικών θα έπαιζε ένα όλο και πιο σημαντικό ρόλο. (D' Ambrosio U., 1979).

Έτσι άρχισαν να δημιουργούνται σιγά-σιγά τα κρατικά σχολεία, πρωτοβάθμιας στην αρχή εκπαίδευσης για τα παιδιά της εργατικής τάξης, και δευτεροβάθμιας αργότερα για τα παιδιά κυρίως της νέας ανερχόμενης αστικής τάξης. (H. Griffithly & G. Howson, 1974, P. 13).

Στη πρωτοβάθμια εκπαίδευση διδάσκονταν μόνο στοιχειώδης αριθμητική με σκοπό την καλλιέργεια κάποιων υπολογιστικών δεξιοτήτων στους μαθητές, που θα χρησίμευαν αργότερα στη ζωή τους. Το πρόγραμμα στη δευτ/θμια εκπαίδευση περιλάμβανε εκτός απ' την αριθμητική, στοιχεία άλγεβρας, στοιχεία Ευκλείδειας γεωμετρίας και τριγωνομετρίας. (L. Rogers, 1981).

* Η εργασία αυτή βασίζεται σε μη ολοκληρωμένη ακόμη έρευνα του συγγραφέα, γύρω απ' τα χαρακτηριστικά και τις τάσεις των σχολικών μαθηματικών στη νεώτερη Ελλάδα. Η Ελληνική περίπτωση θα δημοσιευτεί προσεχώς.

Όπως βλέπουμε, η αυξανόμενη βελτίωση της θέσης των μαθηματικών, στα σχολικά προγράμματα δεν συνοδεύτηκε με την παρουσίαση σ' αυτά των νέων ιδεών, που εμφανίστηκαν την εποχή αυτή στη μαθηματική επιστήμη⁽¹⁾. Οι κύριοι λόγοι που απομάκρυναν τα προγράμματα απ' τα ενδιαφέροντα των καθαρών μαθηματικών ήταν αφ' ενός μεν η έλλειψη θεσμοθετημένων διασυνδέσεων που θα μπορούσαν να μεταβιβάσουν τις νέες ιδέες στα σχολεία και αφ' ετέρου η μη οργάνωση των μαθηματικών σε μια ανεξάρτητη αυτοτελή επιστήμη.

Η έμφαση όμως στα σχολικά μαθηματικά σαν ένα ανεξάρτητο μάθημα κατά τον 19ο αιώνα, συνοδεύτηκε όπως ήταν επόμενο και από ένα αντίστοιχο ενδιαφέρον πάνω στη παιδαγωγία του μαθήματος. Στις αρχές του 19ου αιώνα η καθιερωμένη μέθοδος διδασκαλίας του μαθήματος ήταν «να αναφέρουμε έναν κανόνα, να δίνουμε παραδείγματα και να προσφέρουμε προβλήματα για λύση» (Jones & Coxford, 1970, P. 21). Αργότερα προς το μέσο του αιώνα η παιδαγωγία των μαθηματικών άρχισε σιγά-σιγά να ενσωματώνει τις αντιλήψεις και αρχές της θεωρίας των χωριστών διανοητικών λειτουργιών (Faculty Psychology)⁽²⁾, της κυρίαρχης ψυχολογικής θεωρίας της εποχής, που δίδασκε ότι οι διανοητικές ικανότητες είναι δυνατόν να βελτιωθούν με τη συνεχή εξάσκηση και καλλιέργεια που προσφέραν κάποια μαθήματα, ειδικά για κάθε μια απ' αυτές (G. Stanic, 1986).

«Η πιο δραματική επίδραση της ψυχολογίας... ήρθε με την εμφάνιση της θεωρίας των χωριστών διανοητικών λειτουργιών και το αποτέλεσμα ήταν αφ' ενός μεν το δύσκολο υπολογιστικό περιεχόμενο και αφ' ετέρου μια βαθιά εμπιστοσύνη στη θεωρητική αριθμητική». (De Vault & Weaver, 1970, P 102).

Η δικαιολογία για τη λατρεία της αριθμητικής βασιζονταν στο επιχείρημα πως την επιστήμη αυτή διαπερνούσε το πνεύμα της λογικής. Παρουσιάζοντάς την λοιπόν, βασικά σαν μια παραγωγική επιστήμη, παρόμοια με τη γεωμετρία με αξιώματα, θεωρήματα και αποδείξεις, έλπιζαν να δείξουν ότι η «θεωρητική αριθμητική ακονίζει και διευρύνει τις ικανότητες της σκέψης και είναι ένα σύστημα διανοητικής γυμναστικής» (Brooks. E. 1883/1970, P. 87). Έτσι η αριθμητική διδάσκονταν όχι τόσο επειδή αποτελούσε ένα μέρος των μαθηματικών, αλλά μάλλον επειδή γύμναζε τους μαθητές και σε άλλες γενικότερες δεξιότητες.

Προς το τέλος του 19ου αιώνα άρχισαν να εμφανίζονται στους εκπαιδευτικούς, κύκλους οι πρώτες αναζητήσεις για στενότερη σχέση και διασύνδεση μεταξύ μαθηματικής επιστήμης και σχολικού προγράμματος. Στην Ιταλία π.χ. κάτω από την επίδραση του Peano αναπτύχθηκε μια αξιωματική προσέγγιση στα σχολικά μαθηματικά. Στη Γερμανία ο Felix Klein ζητούσε τη μεταρρύθμιση των σχολικών μαθηματικών το 1893 ως προς το περιεχόμενο και ως προς τη μεθοδολογία τους. (Το βιβλίο του «Στοιχειώδη μαθηματικά από ανώτερη σκοπιά» μεταφράστηκε αργότερα σε πολλές γλώσσες). Θεωρούσε πως το μαθηματικό πρόγραμμα τις δευτεροβάθμιες εκπαίδευσης έπρεπε να αντανακλά πιο άμεσα τη σύγχρονη αντίληψη που είχαν για τα μαθηματικά οι επαγγελματίες μαθηματικοί. Απαιτούσε λοιπόν μεγαλύτερη αυστηρότητα στα βιβλία και πρότεινε την ενοποίηση της άλγεβρας και γεωμετρίας με τη βοήθεια της έννοιας τις συνάρτησης.

Στη Βρετανία επικρατούσε η ωφελιμιστική αντίληψη του John Perry⁽³⁾ για το περιεχόμενο και την αξία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τα μαθηματικά έπρεπε να καλλιεργούν χρήσιμες δεξιότητες για τη ζωή και μ' αυτό το κριτήριο έπρεπε να καθορίζεται το μαθηματικό περιεχόμενο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Κατά τη γνώμη του τα μαθηματικά δεν έπρεπε ν' αναπτύσσονται αυστηρά στα σχολεία· η αυστηρότητα θα 'ρχόταν αργότερα σε κείνους που θα έδειχναν ενδιαφέρον γι' αυτήν. Ο Perry επίσης τόνιζε τη σημασία των διάφορων διασυνδέσεων μεταξύ μαθηματικών και άλλων επιστημών, μέσα από τη διδασκαλία συγκεκριμένων παραδειγμάτων. (J. Perry, 1902/1970, P. 235).

Στην Αμερική πάλι ο μεγάλος μαθηματικός της εποχής E. Moore απέρριπτε την πλήρη αξιωματική προσέγγιση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση χαρακτηρίζοντάς την απαράδεκτη, ενώ έπαιρνε την τακτική που ακολουθούσαν τα σχολεία της Ιταλίας που επηρεάστηκαν από την εργασία του Peano (Moore E, 1903/1970, P. 246-235).

Προς το τέλος του αιώνα οι μαθηματικοί άρχισαν να δημιουργούν διάφορες επιστημονικές και επαγγελματικές ενώσεις, όπως την Αμερικάνικη μαθηματική κοινωνία το 1894 (Jones & Coxford, 1970, P. 30) και τη μαθηματική εταιρεία στην Αγγλία το 1897 (G. Howson, 1978). Αυτές ακριβώς οι ενώσεις έμελλε να εξελιχθούν στους πιο σπουδαίους πράκτορες για τη διάδοση και εξάπλωση των νέων ιδεών στη μαθηματική εκπαίδευση, μέχρι και τη σημερινή εποχή που θεω-

ρούνται από τους πιο δυναμικούς παράγοντες μετασχηματισμού και αλλαγής (Janos Suranyi, 1985).

2. Η μαθηματική εκπαίδευση τον 20ο αιώνα

2.1. Η μαθηματική εκπαίδευση μέχρι το 1950

Από τις αρχές του 20ου αιώνα τα μαθηματικά προγράμματα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης άρχισαν σιγά-σιγά να αλλάζουν σε αξιοσημείωτη έκταση, για να απαντήσουν στις αυξανόμενες απαιτήσεις της κοινωνίας, στην έκρηξη του μαθητικού πληθυσμού και στις νέες αντιλήψεις γύρω από τη φύση των μαθηματικών και της λειτουργίας τους στην εκπαίδευση γενικότερα. Ενώ κατά, τον 19ο αιώνα, ο σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ήταν, κυρίως η προετοιμασία των μελλοντικών μαθηματικών, τώρα ο σκοπός τους αρχίζει να γίνεται η εκπαίδευση ικανών-μορφωμένων πολιτών.

Με την ανυποληψία της θεωρίας των χωριστών διανοητικών λειτουργιών και την αντικατάστασή της από τη ψυχολογία της συμπεριφοράς και της θεωρίας των δεσμών του Thorndike⁽⁴⁾, δεν υπήρχε λόγος πια οι παιδαγωγοί να βλέπουν τα μαθηματικά πρωταρχικά σαν μια καλλιέργεια του νου, ή να πιστεύουν πως είναι μια σκληρή δοκιμασία για τους λίγους. Ήσαν πια ελεύθεροι να τα θεωρούν σαν ένα μάθημα που πρόσφερε χρήσιμη γνώση.

Πολλές από τις αλλαγές στα προγράμματα οφείλονταν στις συστάσεις αρμόδιων επιτροπών που αντανάκλυσαν ακριβώς αυτές τις νέες κοινωνικές ανάγκες και απαιτήσεις⁽⁵⁾. Για παράδειγμα η έκθεση της εθνικής επιτροπής για τη μαθηματική εκπαίδευση στις Η.Π.Α. το 1923, εντόπισε πολλές ελλείψεις στο περιεχόμενό και τη μέθοδο διδασκαλίας στο πρόγραμμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η έκθεση συμπεραίνει πως η «διανοητική καλλιέργεια» ήταν ένας μύθος και ότι πολύ μικρή «γενική εκπαίδευση» μπορούσε να πάρει κάποιος από την εντατική μελέτη, για παράδειγμα, των λατινικών ή της άλγεβρας, διακηρύσσοντας πως η πολιτιστική αξία ενός μαθήματος εξαρτάται από το βαθμό σύνδεσής του με την πραγματική ζωή. Παραπέρα συνιστούσε τη διδασκαλία για την κράτηση οικογενειακών λογαριασμών, λογιστικών βιβλίων, φόρων, διδασκαλία εμπορικών μαθημάτων και άλλων πρακτικών θεμάτων. Παρ' όλα αυτά όμως ανέφερε ότι: «Ο πρωταρχικός

σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών θα έπρεπε να είναι η ανάπτυξη των δυνάμεων για κατανόηση... που είναι αναγκαίες για την κατανόηση και έλεγχο του περιβάλλοντός μας και η ανάπτυξη τέτοιων χαρακτηριστικών της σκέψης και δράσης, τα οποία θα κάνουν αυτές τις δυνάμεις αποτελεσματικές για τη ζωή του ατόμου» (J. Bidwell & R. Clason, 1970, P. 395).

Η επιτροπή παρατήρησε επίσης πως η τρομακτική πρόοδος στην ποιοτική ανάπτυξη των μαθηματικών, που οφείλονται κυρίως στις εργασίες των Peano, Klein, Hilbert και Poincaré, είχε καταδείξει σοβαρές ελλείψεις στα σχολικά μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και είχε δώσει ώθηση σε μια απαίτηση για μεγαλύτερη αυστηρότητα. Έτσι λοιπόν οι βασικοί σκοποί της διδασκαλίας των μαθηματικών αναθεωρήθηκαν και διαμορφώθηκαν στις παρακάτω τρεις βασικές κατηγορίες:

α) Πρακτικοί σκοποί: Ικανότητα στις θεμελιώδεις τεχνικές της αριθμητικής, κατανόηση της αλγεβρικής γλώσσας και ικανότητα στην ερμηνεία γραφικών παραστάσεων.

β) Ειδολογικοί σκοποί: Ικανότητα για 1) καθαρή σκέψη, 2) απόκτηση των διανοητικών χαρακτηριστικών της ποσοτικής σκέψης, 3) ανάλυση πολύπλοκων καταστάσεων σε απλούστερες και 4) διάφορες γενικεύσεις.

γ) Πολιτιστικοί σκοποί: Εκτίμηση της ομορφιάς των γεωμετρικών μορφών και της δύναμης των μαθηματικών γενικότερα, καθώς και του ιδανικού της τελειότητας και του ρόλου της στην αφηρημένη σκέψη. (J. Bidwell & Clason, 1970, P. 390-394).

Η Επιτροπή τελικά αναφέρθηκε και στη μέθοδο της διδασκαλίας, συμβουλεύοντας τους καθηγητές να μη χρησιμοποιούν «μια μέθοδο η οποία θα ευθαρρύνει ή ακόμα να επιτρέπει την αποστήθηση ή την μηχανική εργασία», κάνοντας τις εξής γενικές συστάσεις:

- 1) Να διδάσκουν μια διαδικασία βήμα προς βήμα
- 2) Να ελέγχουν τους μαθητές συχνά
- 3) Να εκπαιδεύουν τους μαθητές στην μετάφραση και μεταφορά εκφράσεων στην καθημερινή γλώσσα.
- 4) Να διδάσκουν με σαφήνεια και καθαρότητα.
- 5) Να καλλιεργούν την ανεξάρτητη σκέψη.
- 6) Να δίνουν έμφαση στην ενότητα των μαθηματικών με τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης.

7) Να τονίζουν τη συσχέτιση και αλληλεξάρτηση των διαφόρων μαθηματικών περιοχών.

Ο δεύτερος παγκόσμιος πόλεμος δεν επέτρεψε να αλλάξει η παραπάνω εικόνα για τη μαθηματική εκπαίδευση μέχρι το 1950. Έτσι συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε πως αν και υπήρχε μια αυξανόμενη δυσαρέσκεια για τα μαθηματικά που διδάσκονταν στα σχολεία το πρώτο μισό του αιώνα μας, δεν εμφανίστηκε μια ισχυρή μεταρρυθμιστική κίνηση για την αναδιοργάνωση της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ενώ γίνονταν κάποιες προσπάθειες να μπολιάσουν το περιεχόμενο με γενικές ενοποιητικές έννοιες που αντλούσαν από τα ανώτερα μαθηματικά (όπως η έννοια της συνάρτησης), στην πραγματικότητα έδιναν έμφαση στο πρακτικό και συγκεκριμένο και πολύ λίγες αλλαγές πραγματοποιήθηκαν στο περιεχόμενο.

Η αριθμητική παρέμενε ακόμα ο πυρήνας του προγράμματος στις μικρότερες τάξεις, ενώ η γεωμετρία, τριγωνομετρία και βασική άλγεβρα (αλγεβρικές παραστάσεις, εξισώσεις, λογάριθμοι). Αποτελούσαν κυρίως το περιεχόμενο για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το περιεχόμενο δηλαδή των σύγχρονων μαθηματικών δεν είχε αντανάκλαση στα μαθηματικά σχολικά προγράμματα της εποχής.

Το υπόβαθρο για την ανάπτυξη των επαναστατικών θα λέγαμε μεταρρυθμίσεων που έκαναν την εμφάνισή τους στη μαθηματική εκπαίδευση παγκόσμια μετά το 1950, διαμορφώθηκε από ένα πλήθος βαθιών κοινωνικοοικονομικών και θεσμικών αλλαγών που πραγματοποιήθηκαν μετά το δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο.

Πριν τον πόλεμο οι λιγοστοί μαθητές που τέλειωναν τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ή επάνδρωναν τον διοικητικό μηχανισμό ή ακολουθούσαν τα παραδοσιακά επαγγέλματα, αφού ίσως παρακολουθούσαν μερικοί και την τριτοβάθμια εκπαίδευση. Μετά όμως τον πόλεμο, η τρομακτική πρόοδος των επιστημών και της τεχνολογίας δημιούργησε μια ανάγκη για τεχνολογικά στελέχη υψηλής-ανώτατης μόρφωσης και ειδίκευσης. Η φύση των περισσότερων παραδοσιακών επαγγελμάτων άλλαξε και μια σειρά ποιοτικά νέων εμφανίστηκαν στο προσκήνιο. Αυτό, είχε σαν αποτέλεσμα, η τριτοβάθμια εκπαίδευση να σημαίνει κυρίως, πανεπιστημιακή εκπαίδευση μια και μόνο αυτή ήταν σε θέση να ικανοποιήσει τις εκρηκτικές ανάγκες της αγοράς εργασίας.

Τα μαθηματικά έπαιξαν ένα σπουδαιότατο ρόλο στην πραγ-

ματοποίηση όλων αυτών των τεχνολογικών επιτευγμάτων. Με τον ερχομό της ατομικής εποχής, για παράδειγμα, νέα πεδία ακαδημαϊκής και βιομηχανικής έρευνας δημιουργήθηκαν (θεωρητική φυσική, ατομική φυσική, ηλεκτρονική κ.λ.π.), για τα οποία η υψηλού επιπέδου μαθηματική εκπαίδευση ήταν απαραίτητη προϋπόθεση (Louis de Broglie, 1971).

Στις αρχές επίσης της δεκαετίας του 1950, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές άρχισαν να κάνουν την εμφάνισή τους μαζικά στην αγορά και να σφραγίζουν την καινούρια εποχή της επιστήμης και της τεχνολογίας. Οι υπολογιστές άρχισαν να γίνονται απαραίτητοι στη βιομηχανία και όπως ήταν επόμενο νέες επαγγελματικές ευκαιρίες δημιουργήθηκαν, οι περισσότερες των οποίων απαιτούσαν υψηλή μαθηματική κατάρτιση.

Τα μαθηματικά όμως που διδάσκονται στα σχολεία μέχρι το 1950 ήταν κατά γενική ομολογία εντελώς ανεπαρκή και απηρχαιωμένα. «Οι ζωντανές, μοντέρνες εξελίξεις της μαθηματικής επιστήμης δεν επηρέασαν καθόλου το περιεχόμενο ή την παρουσίαση των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η άλγεβρα και η γεωμετρία, όπως καλύπτονται στα σχολεία, αποτελούνται αποκλειστικά από ιδέες ήδη εδώ και 200 χρόνια γνωστές... Πολλές απ' αυτές εδώ και 2.000 χρόνια». (Mac Lane, 1956, P. 66).

Έτσι οι νέες εξελίξεις και πρόοδοι που πραγματοποιήθηκαν στη μαθηματική επιστήμη, καθώς επίσης και οι νέες κοινωνικοοικονομικές ανάγκες που εμφανίσθηκαν, επηρέασαν όπως ήταν επόμενο τις νέες κατευθύνσεις των προγραμμάτων που υιοθετήθηκαν μετά το 1950 στην προπανεπιστημιακή μαθηματική εκπαίδευση.

2.2. Η μαθηματική εκπαίδευση μετά το 1950

Η μαθηματική εκπαίδευση μετά το 1950 μέχρι και σήμερα δέχτηκε τέτοιες μεταρρυθμίσεις και αλλαγές, σε παγκόσμιο πάντα επίπεδο, που όμοιές της δεν είχε γνωρίσει ποτέ στο παρελθόν. «Βεβαίως λίγοι θα είναι αυτοί που θ' αρνηθούν ότι ο ρυθμός και η έκταση των αλλαγών της τελευταίας 20-ετίας, σε σύγκριση με οποιαδήποτε άλλη περίοδο στην ιστορία της μαθηματικής εκπαίδευσης, είναι επαναστατικές» (Osborne & Grosswhite, 1970, P. 235).

Οι μεταρρυθμίσεις όμως αυτές δεν έγιναν ταυτόχρονα σ' όλες τις χώρες ούτε είχαν και απόλυτα τα ίδια χαρακτηριστι-

κά και γνωρίσματα. Κάθε χώρα προχώρησε στις αλλαγές αυτές με τους δικούς της ρυθμούς, σύμφωνα με τις δικές της παραδόσεις και ιδιαιτερότητες. Όλες όμως ακολούθησαν κάποιες γενικές αρχές και τάσεις, όπως θα αναφέρουμε παρακάτω, όπου θα προσπαθήσουμε επίσης να κάνουμε μια σύντομη ανασκόπηση των παραγόντων, Οικονομικών — κοινωνικών — ιδεολογικών, που διαμόρφωσαν αυτές τις κατευθύνσεις στο σχηματισμό των σχολικών μαθηματικών προγραμμάτων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

2.2.1. Το πρώτο κύμα της μεταρρύθμισης:

Το πρώτο κύμα της μεταρρύθμισης εκδηλώθηκε στις Η.Π.Α στις αρχές της δεκαετίας του 1950 και ήταν αποτέλεσμα κυρίως του ενδιαφέροντος των πανεπιστημιακών καθηγητών να συμπεριλάβουν στα πανεπιστημιακά και σχολικά προγράμματα, μερικές από τις νέες ιδέες που ριζοσπαστικοποίησαν τη μαθηματική επιστήμη τα προηγούμενα 100 χρόνια. (M. Suydam & A. Osborne, 1977, P. 13).

Την αλλαγή των σχολικών μαθηματικών προγραμμάτων σχεδίασε μια επιτροπή από πανεπιστημιακούς με πρόεδρο τον καθηγητή του Princeton A. Tucker.

Τα νέα προγράμματα όμως ήταν κατάλληλα, μόνο για ταλαντούχους μαθητές, για μαθητές γενικά που θα ακολουθούσαν ακαδημαϊκές σπουδές στα κολλέγια με ενισχυμένα μαθηματικά προγράμματα. (N.C.T.M., 1979, P.I). Η προετοιμασία επίσης των βιβλίων δεν βασίστηκε καθόλου στις θεωρίες μάθησης και στην εκπαιδευτική έρευνα γενικότερα. «Τα βιβλία παρουσίαζαν στην ουσία ότι οι συγγραφείς θεωρούσαν προσωπικά πια ότι ήταν καλύτερο, ανάλογα με τις γνώσεις τους για τα μαθηματικά και τις εμπειρίες τους» (Carl Allendoerfer, 1965/1971).

Η μεταρρύθμιση αυτή τελικά στάθηκε ανίκανη ν' αγγίξει τις πλατιές μάζες των μαθητών και είχε πολύ μικρή, σχεδόν μηδαμινή αποτελεσματικότητα. Στην ουσία δεν έγινε καμιά ουσιαστική αλλαγή στα σχολικά μαθηματικά. «Βέβαια αυτά έγιναν πιο υποφερτά απ' ό,τι συνηθίζονταν να είναι, αλλά δεν έπαυσαν να στοχεύουν στην εξυπηρέτηση των ανώτερων κοινωνικών τάξεων». (Carl Allendoerfer, 1965/1971).

2.2.2. Το δεύτερο κύμα των μεταρρυθμίσεων

Στις δεκαετίες 1960, 1970 συντελέστηκαν, οι μεγαλύτερες και ποιοτικά βαθύτερες αλλαγές και μεταρρυθμίσεις στα σχολικά μαθηματικά της δευτεροβάθμιας, αλλά και πρωτοβάθμιας, εκπαίδευσης στις περισσότερες χώρες του κόσμου. Τα μαθηματικά που διαμορφώθηκαν σαν αποτέλεσμα αυτών των προσπαθειών επικράτησε να λέγονται «νέα» ή «μοντέρνα» μαθηματικά. Μέσα σε σχετικά μικρό χρονικό διάστημα το παλιό κύμα των «νέων» μαθηματικών σάρωσε κυριολεκτικά όλο τον κόσμο. Δεν εκδηλώθηκε όμως, ούτε εξελίχθηκε ταυτόχρονα παντού.

Σε μερικές χώρες το κύμα αυτό βρίσκεται στο αρχικό του στάδιο (Ουγγαρία, Φιλιππίνες)⁽⁶⁾, σ' άλλες βρίσκεται σε πλήρη εξέλιξη (Ιαπωνία, Κίνα, Νιγηρία)⁽⁷⁾, σε άλλες έχει φθάσει στο ζενίθ του (Γαλλία, Βέλγιο)⁽⁸⁾, σε άλλες υποχώρησε (Αραβικές χώρες, Τανζανία, Σουηδία)⁽⁹⁾, ενώ σε άλλες έχει ήδη υποχωρήσει και ξαναρχίζει ένα καινούριο (Η.Π.Α.)⁽¹⁰⁾.

Σε ορισμένες πάλι χώρες, όπως Σοβιετική Ένωση⁽¹¹⁾, Πολωνία⁽¹²⁾, η μεταρρύθμιση έγινε με πιο συγκρατημένο τρόπο, σε μια προσπάθεια να ενσωματωθούν σ' αυτήν πρόσφατα πορίσματα της εκπαιδευτικής έρευνας.

Τα αίτια των αλλαγών

Παρακάτω θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε τα κύρια αίτια των μεταρρυθμίσεων που συγκλόνισαν, τη μαθηματική εκπαίδευση τη δεκαετία κυρίως του 1960, χωρίς όμως και να προσπαθήσουμε να τα ταξινομήσουμε κατά αξιολογική σειρά μια και κάτι τέτοιο θα ξέφευγε πια από το πλαίσιο και τους σκοπούς της παρούσας εργασίας.⁽¹³⁾

Από μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας εντοπίσαμε τους παρακάτω λόγους που αναφέρονται σαν τα βασικότερα αίτια.

1) Οι μεγάλοι πρόοδοι που συντελέστηκαν στη μαθηματική επιστήμη τα τελευταία 100 χρόνια (Marshal Stone, 1961)

2) Η ριζική αλλαγή των αντιλήψεων γύρω από τη φύση των μαθηματικών (H. Fehr, 1968). Όπως ήταν φυσικό η ανάπτυξη των μαθηματικών τα τελευταία κυρίως 150 χρόνια, συνοδεύτηκε και από μια αλλαγή της σκοπιάς με την οποία οι μαθηματικοί έβλεπαν την επιστήμη τους. Οι εργασίες των διαφόρων σχολείων (λογικιστών, φορμαλιστών, ενορατιστών)⁽¹⁴⁾. Πάνω στα θεμέλια των μαθηματικών, έδωσε το ερέθισμα για

τη δημιουργία ενός ζητηρού ενδιαφέροντος στην αναζήτηση της ακρίβειας των ορισμών, της έκφρασης και προσεκτικής χρήσης της γλώσσας γενικότερα. Η αξιωματική επίσης προσέγγιση στην παρουσίαση των μαθηματικών, την οποία και τα τρία αυτά σχολεία συμμερίστηκαν παρά τις διαφορές τους, έγινε ο κοινός παρανομαστής των πιο πολλών μαθηματικών επιτευγμάτων.

Η νέα κατάσταση της παραγωγικής αυστηρότητας σαν ένα Standard για τη μαθηματική εργασία διατυπώνεται ξεκάθαρα και πολύ χαρακτηριστικά από τον μεγάλο γάλλο μαθηματικό Jean Dieudonné (1971): «Επομένως είναι απόλυτη ανάγκη από δω και στο εξής ο κάθε μαθηματικός που ενδιαφέρεται για τη διανοητική του εντιμότητα, να παρουσιάζει τους συλλογισμούς του με αξιωματική μορφή, δηλαδή σε μια μορφή όπου οι προτάσεις εξάγονται από τους κανόνες της λογικής μόνο, ενώ εσκεμμένα αγνοείται όλη η διαισθητική μαρτυρία η οποία μπορεί να υποδείξει στο νου διάφορες σκέψεις».

3) Η ανάδυση της συνολοθεωρίας σαν ενοποιητικής έννοιας, πρωταρχικά μέσα από την εργασία των Bourbaki (F. Van. der Bliz et. al., 1981).

Η ομάδα των Bourbaki άσκησε μεγάλη επίδραση στη μαθηματική έρευνα παγκόσμια. Η έμφαση της ομάδας αυτής, εκτός από την προσοχή της στα νεώτερα μαθηματικά, δίνονταν πάνω σ' αυτό που επικρατεί να λέγεται «Μπουρμπακική προσέγγιση», δηλαδή μια τυπική, αφηρημένη και αυστηρή προσέγγιση που τονίζει τους ακριβείς ορισμούς και την αξιωματική μέθοδο οργάνωσης κάθε μαθηματικού κλάδου.

Ο Dieudonné έγραψε π.χ. κάτω από το ψευδώνυμο των Bourbaki ότι «η αξιωματική μέθοδος διδάσκει κάποιον... να βρίσκει τις κοινές ιδέες που είναι κρυμμένες κάτω από εξωτερικά εξαρτήματα λεπτομερειών και προσαρτημένες σε κάθε μια από τις εξεταζόμενες θεωρίες, να τις απομονώνει και να τις εκθέτει» (Bourbaki, 1971).

Ο Dieudonné ήταν επίσης από τα πιο δραστήρια μέλη του διεθνούς σεμιναρίου πάνω στη μαθηματική εκπαίδευση, που έγινε το 1959 στο Royanmont της Γαλλίας και που χάραξε τις κατευθύνσεις των μεταρρυθμίσεων της δεκαετίας του 1960, στις χώρες μέλη του ΟΕΕC (αργότερα Ο.Ο.Σ.Α.), μεταξύ των οποίων ήταν και η Ελλάδα (ΟΕΕC, 1961^ο).

4) Η εισαγωγή νέων μαθηματικών στα πανεπιστημιακά προ-

γράμματα πιο αφηρημένων στο περιεχόμενο και πιο αυστηρών στην παρουσίαση.

Μέχρι τις αρχές του 20ου αιώνα τα Αμερικανικά π.χ. πανεπιστήμια πρόσφεραν ένα μαθηματικό πρόγραμμα που περιοριζονταν στο μαθηματικό λογισμό, αναλυτική γεωμετρία και λίγη άλγεβρα. Μέχρι το 1950 όμως κατάφεραν να φέρουν τη διδασκαλία των πανεπιστημιακών μαθηματικών σ' ένα επίπεδο συνεπές με την πραγματική κατάσταση της μοντέρνας μαθηματικής έρευνας.

Οι νέες εξελίξεις στην ανάλυση, η μοντέρνα άλγεβρα, η τοπολογία, η θεωρία των χώρων Hilbert, ο ταυυστικός λογισμός, η μαθηματική λογική κ.λ.π. ενσωματώθηκαν στα πανεπιστημιακά προγράμματα (Stone. M. 1961, J. Dieudoneé 1961).

Το ίδιο συνέβη όμως και στα περισσότερα Ευρωπαϊκά και Ασιατικά πανεπιστήμια, όπου «η αυξανόμενη αφαίρεση και η αδιάκοπα εντεινόμενη έμφαση στην αυστηρότητα ήταν μια τάση σχεδόν γενική» (Van Lint, 1979).

Σ' αυτά τα πανεπιστήμια επίσης, ο παραδοσιακός μαθηματικός λογισμός και η γεωμετρία αντικαταστάθηκαν από πιο αφηρημένα μαθήματα πάνω στη γενική τοπολογία, μετρικούς χώρους, αλγεβρικές δομές, μαθηματική λογική κ.α.

Το αποτέλεσμα ήταν να δημιουργηθεί ένα μεγάλο χάσμα μεταξύ του μαθηματικού προγράμματος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και εκείνο των πανεπιστημίων και οι μαθητές που εισέρχονταν στο πανεπιστήμιο να καταβάλλουν τρομερές προσπάθειες για να το γεφυρώσουν. Τα πανεπιστήμια εξάλλου έδειξαν απρόθυμα να προετοιμάσουν τους εισαγόμενους σπουδαστές και εξελίχθηκαν στους πιο δραστήριους παράγοντες της μεταρρύθμισης, που θα έφερνε σε αρμονία τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας και πανεπιστημιακής εκπαίδευσης (H. Fehr, 1965).

5) Η μετά τον β' παγκόσμιο πόλεμο τεχνολογική έκρηξη που λειτούργησε σαν μια πρωτοφανής δύναμη για πρόοδο και ανάπτυξη.

Αυτή ακριβώς η συνεχής ανάπτυξη δημιούργησε με τη σειρά της την ανάγκη για περισσότερους τεχνολόγους υψηλής ειδίκευσης, τόσο τις αναπτυγμένες όσο και στις ανεξάρτητα αναπτυσσόμενες χώρες, που είδαν στην τεχνολογία το κλειδί για την ανάπτυξή τους. «Η μοντέρνα οικονομία απαιτεί μια επιστημονική εκπαίδευση πιο αναπτυγμένη και προορισμένη για ένα μεγαλύτερο αριθμό ατόμων... Και γι' αυτή την εκπαί-

δευση αυτό που χρειάζεται περισσότερο είναι τα μαθηματικά... Τα σύγχρονα μαθηματικά είναι χρήσιμα σε πολλές περιοχές: θεωρητική, φυσική, ηλεκτρ. υπολογιστές, επιχειρησιακή έρευνα, διοίκηση επιχειρήσεων, κοινωνιολογία, γλωσσολογία, Ιατρική (καθορισμός διαγνωστικής διαδικασίας), φαρμακευτική...» (H. Fehr, 1969).

Οι πολιτικοί αρχηγοί πολλών κρατών παγκόσμια συνειδητοποίησαν τελικά την ανάγκη για ευρύτερη εκπαίδευση στην τεχνολογία, που θα αντιμετώπιζε τις ελλείψεις από την ταχύτατη ανάπτυξη των νέων κλάδων της βιομηχανίας. Μια εκδήλωση αυτού του ενδιαφέροντος ήταν η πραγματοποίηση μιας σειράς διεθνών συνεδρίων υπό την αιγίδα του Ο.Ο.Σ.Α. (Royumont 1959, Dubronic 1960, Paris 1961, Αθήνα 1963 κ.α.)⁽¹⁵⁾. Τελικά, όπως πολύ χαρακτηριστικά αναφέρει ο F. Van Blij (1981), λειτούργησε με πολύ επιτυχία το «σύνδρομο του τρένου». Μόλις δηλαδή η κίνηση για αλλαγή στη μαθηματική εκπαίδευση άρχισε να πραγματοποιείται σε κάποιες πολιτιστικά ηγέτιδες χώρες, ανέπτυξε φυσιολογικά στις υπόλοιπες μια ανησυχία μήπως και μείνουν πίσω σχετικά μ' αυτό που θεωρήθηκε ότι αποτελούσε μια γενική επανάσταση. Αυτό ακριβώς δημιούργησε επίσης μια ισχυρή πίεση για μεταρρύθμιση στη δεκαετία του 1960.

Θα πρέπει επίσης να αναφέρουμε ότι το κύριο, καθοριστικό ερέθισμα (όχι βέβαια αίτιο) για να εκδηλωθεί αυτή η μεταρρύθμιση στις Η.Π.Α. και αργότερα φυσικά παγκόσμια, ήταν η εκτόξευση από τους Σοβιετικούς του δορυφόρου Sputnik I το Νοέμβριο του 1957. Το γεγονός αυτό τάρραξε κυριολεκτικά την μακαριότητα των Αμερικάνων που πίστευαν μέχρι εκείνη τη στιγμή ότι είχαν το προβάδισμα και την υπεροχή στην τεχνολογία. Αμέσως άρχισαν να ξοδεύονται εκατομμύρια δολάρια από τον κρατικό προϋπολογισμό για τη βελτίωση της εκπαίδευσης και κυρίως για τον καταρτισμό μαθηματικών προγραμμάτων⁽¹⁶⁾ που θα απευθύνονταν στους ταλαντούχους μαθητές, στα μελλοντικά τεχνολογικά στελέχη (H. Griffiths & G. Howson, 1974, P. 138, A. Coxford 1985).

Τα χαρακτηριστικά των μεταρρυθμίσεων

α) Αλλαγές στο περιεχόμενο

Οι αλλαγές στο περιεχόμενο των μεταρρυθμίσεων της δεκαετίας του 1960 καθορίστηκαν βασικά στο συνέδριο του

Rouanmont και όπως ισχυρίζεται ένας από τους βασικούς του συντελεστές και πρωταγωνιστές: «Τα αποτελέσματα του Rouanmont αποτέλεσαν τη βάση για όλη τη μεταρρύθμιση». (H. Fehr, 1965).

Στις παραγράφους 387 και 388 των πρακτικών του συνεδρίου (OECE 1961^a) αναφέρεται πως από το παραδοσιακό πρόγραμμα της άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση πρέπει να αφαιρεθούν: Ο χειρισμός πολύπλοκων και εγκεφαλικών αλγεβρικών παραστάσεων, παραγοντοποίηση πολύπλοκων πολυωνύμων, ειδικές μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων, μεγάλο μέρος από τον λογαριθμικό λογισμό, η χωριστή μελέτη των οριζουσών, δευτεροβάθμιες παραμετρικές εξισώσεις, το μεγαλύτερο της θεωρίας πολυωνυμικών εξισώσεων και η επίλυση μη αναγκαίων πολύπλοκων προβλημάτων.

Στις παραγράφους 399 και 400 γίνεται η εκτίμηση πως «η τριγωνομετρία πρέπει να εξαφανιστεί από το πρόγραμμα σαν ένας απομονωμένος κλάδος. Περισσότερο είναι ένα μέρος της γεωμετρίας και αργότερα, σε σύνδεση με τη μελέτη των συναρτήσεων της, ένα μέρος της ανάλυσης». Η εφαρμογή επίσης της τριγωνομετρίας στην επίλυση τριγώνων θα έπρεπε να περιοριστεί στο νόμο των ημιτόνων και συνημιτόνων και οι υπολογισμοί να αναφέρονται σε απλές περιπτώσεις. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις σαν ένα μέρος της ανάλυσης θα έπρεπε να δουλεύονται με τη χρήση των πραγματικών αριθμών. «Μ' αυτή την παρουσίαση, η τριγωνομετρία γίνεται ένα μέρος των ενοποιημένων μαθηματικών και όχι ένας χωριστός κλάδος. Ορθογώνιες και πολικές συντεταγμένες, διανύσματα, γωνίες και αναλυτική γεωμετρία συμμετέχουν εξίσου στην ανάπτυξή τους».

Το περιεχόμενο της γεωμετρίας προκάλεσε τις μεγαλύτερες φιλονικίες και αντιπαραθέσεις⁽¹⁷⁾, μετά μάλιστα την ομιλία του Jean Dieudonné, ο οποίος μέσα σ' ένα παραλήρημα αντιευκλείδειου κατηγορήσε και επέκρινε τον τρόπο που διδάσκονταν η Ευκλείδεια γεωμετρία, αφού κατά τη γνώμη του δεν υπήρχε αυστηρότητα έκφρασης και ήταν γεμάτη από ψευτο-αποδείξεις. «Και εάν ολόκληρο το πρόγραμμα που έχω στο μυαλό μου μπορούσε να συνοψιστεί σ' ένα σλόγκαν, αυτό θα ήταν: Κάτω ο Ευκλείδης». (J. Dieudonné, 1961).

Τελικά (παραγρ. 358, 359, 360) συμφωνήθηκε πως η Ευκλείδεια γεωμετρία θα έπρεπε να τροποποιηθεί σοβαρά. Οι βασικές έννοιες θα έπρεπε να διδαχτούν διαισθητικά στις ηλι-

κίες 11-14 «και μετά λίγοι μήνες μελέτη θα ήταν αρκετοί για να παρουσιαστεί το σύστημα των αξιωμάτων, κάποιες ωφέλιμες συνέπειες και λίγες ενδιαφέρουσες ασκήσεις».

Από το πρόγραμμα προτάθηκε ν' αφαιρεθούν «πάρα πολλά γύρω από τα τρίγωνα, και διάφορα θέματα όπως αντιστροφή, συστήματα κύκλων κ.λ.π. Όλα αυτά μπορεί να αντικατασταθούν από ένα πρόγραμμα στοιχειωδών μαθηματικών, στο οποίο η θεωρητική γεωμετρία αναπτύσσεται με τη χρήση των διανυσμάτων ή πραγματικών αριθμών και αργότερα αναμειγνύεται με την άλγεβρα, μέσα απ' τη μελέτη των πινάκων, οριζουσών, γραφικών παραστάσεων, μιγαδικών αριθμών και πολικών συντεταγμένων».

Στη στερεομετρία επίσης προτάθηκε (§ 569) να μην δίνεται έμφαση στις τυπικές αποδείξεις και επισημάνθηκε η εμφανιζόμενη τάση για μείωση της ύλης της τυπικής στερεομετρίας στο σχολικό πρόγραμμα.

Η νέα ύλη που εμφανίστηκε στα προγράμματα των περισσότερων χωρών στη μεταρρυθμιστική αυτή περίοδο είναι η παρακάτω:

1) Στοιχειώδης συνολοθεωρία. «Τα σύνολα αποτελούν τη βάση για την κατανόηση των μαθηματικών. Γι' αυτό το λόγο και μόνο, οι μαθητές θα πρέπει να εισαχθούν σ' αυτά όσο νωρίτερα είναι δυνατόν». Αυτά έλεγε στο συνέδριο του Royaumont ο μεγάλος Βέλγος μαθηματικός Q. Servais, που δείχνουν καθαρά την επίδραση του «λογικισμού» στη σκέψη του. (Ο.Ε.Ε.Σ. 1961^α, § 229).

Η γλώσσα των συνόλων, οι βασικές τους έννοιες και τα παράγωγά τους (τομή, ένωση, καρτεσιανό γινόμενο, διαμέριση, κλάσης κ.λ.π.) κυριάρχησαν στα μαθηματικά προγράμματα και αποτέλεσαν το υπόβαθρο και σημείο αναφοράς για την ανάπτυξή τους.

2) Εισαγωγικές έννοιες από τη μαθηματική λογική. «Η έμφαση που δίνεται σήμερα στη δομή (αξιωματική) για όλους τους κλάδους των μαθηματικών, συνεπάγεται μια λογική βάση και επομένως η μαθηματική λογική γίνεται φυσικό επακόλουθο της εισαγωγής των συνόλων» (H. Fehr, 1965).

Το μάθημα της λογικής αποτελούνταν κυρίως από στοιχεία προτασιακού λογισμού (προτάσεις, λογικές προτάσεις, προτασιακές παραστάσεις και η άλγεβρα τους, αληθοπίνακες κ.λ.π.)

3) Θέματα από τη μοντέρνα άλγεβρα. «Τελικά η ανάπτυξη

της άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση θα ακολουθήσει το παραγωγικό πρότυπο της γεωμετρίας θα αρχίσει με διαισθητικές ιδέες, έπειτα θα κάνει χρήση, παραγωγικών συλλογισμών, βασισμένων σε προηγούμενες αποδεκτές έννοιες και θα ολοκληρώσει με μια εισαγωγή αξιωματικής παρουσίασης κάποιων αλγεβρικών δομών» (ΟΟΕC, 1961^α, § 386).

Εισήχθησαν κυρίως αλγεβρικές δομές (ομάδα, δακτύλιος, ακέραια περιοχή, σώμα), ομοιομορφισμοί, πίνακες, γραμμικά συστήματα, γραμμικοί μετασχηματισμοί κ.λ.π.

4) Στοιχεία ανάλυσης. Πολλά θέματα από την ανάλυση υπήρχαν στα παραδοσιακά προγράμματα, όπως ακολουθίες, όρια, συνέχεια, παράγωγος, ολοκλήρωμα. Ο τρόπος όμως που διδάσκονταν ήταν απηρχαιωμένος αφήνοντας πολλά εννοιολογικά κενά στους μαθητές. Με τις οδηγίες του Ο.Ο.Σ.Α. προτάθηκε κυρίως η βελτίωση και ο εκσυγχρονισμός της διδασκαλίας της ανάλυσης «έτσι ώστε να συμβάλλει στην κατανόηση των βασικών εννοιών του ορίου, διαφορισμότητας, ολοκλήρωσης και συνάρτησης» (Ο.Ε.Ε.С, 1961^α, § 312).

Προτείνεται ένα μάθημα ανάλυσης (§ 404) να αρχίζει με μια εντατική μελέτη των συναρτήσεων (ακέραιες, ρητές αλγεβρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, τριγωνομετρικές, υπερβολικές) και να συνεχίζεται με τη μελέτη ακολουθιών, ορίων, σειρών, συνέχειας, διαφορισμότητας, θεωρήματα Rolle και μέσης τιμής, ολοκληρωμάτων κ.λ.π.

5) Πιθανότητες και στατιστική. Τα μαθήματα αυτά ήταν εντελώς νέα για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι πιθανότητες βέβαια υπήρχαν σε κάποια προγράμματα και παλιότερα σαν κλασική πιθανοθεωρία με αποδείξεις κάποιων στοιχειωδών θεωρημάτων, κατανομές, στοιχεία περιγραφικής στατιστικής, έλεγχος υποθέσεων (κατανομή τύπου Bernoulli, μηδενική υπόθεση, επίπεδο σημαντικότητας, δειγματικός χώρος, κρίσιμη περιοχή, διαστήματα εμπιστοσύνης, τεστ προσήμου) (Ο.Ε.Ε.С 1961^α, § 320, 408, 409).

6) Θέματα απ' τη μοντέρνα γεωμετρία. Εδώ όπως αναφέρθηκε και παραπάνω δεν επιτεύχθηκε συμφωνία στο συνέδριο του Rouaumont. Υπήρξε βέβαια ομοφωνία για τη δραστική περικοπή του χρόνου διδασκαλίας των στοιχείων του Ευκλείδη (§ 295), όμως δεν κατάληξαν στο τι ακριβώς θα αντικαθιστούσε το μάθημα αυτό. Αυτό που συμφωνήθηκε πάντως ήταν η παρουσίαση της γεωμετρίας με τις δυναμικές προσεγγίσεις που προσφέρουν οι αλγεβρικές και διανυσματικές μέ-

θοδοι, σε αντικατάσταση των στατικών μεθόδων που χρησιμοποιούσε η παραδοσιακή διδασκαλία.

Προτάθηκαν διάφορες μέθοδοι ανάπτυξης όπως α) Γεωμετρία μετασχηματισμού που έχει τη βασική της αρχή στις ιδέες του F. Klein όπως τις ανέπτυξε στο πρόγραμμα Erlangen. β) Μια αυστηρή προσέγγιση κατά Hilbert στην αξιωματική γεωμετρία, με κάποιο τροποποιημένο σύστημα αξιωμάτων βασισμένων στους πραγματικούς αριθμούς. γ) Αξιωματικά συστήματα βασισμένα, πάνω στους πραγματικούς αριθμούς και συντεταγμένες. Ο καθηγητής Choquet π.χ. πρότεινε ένα τέτοιο σύστημα βασισμένο σε 5 αξιώματα (O.E.E.C. 1961^α, P. 73).

Γενικά μπορούμε να πούμε πως η κυρίαρχη αντίληψη των μεταρρυθμίσεων για τη γεωμετρία ήταν ότι η αλγεβρική διαισθηματική προσέγγιση «ενοποιεί την άλγεβρα και τη γεωμετρία, δίνοντας ενότητα και δύναμη σ' ένα μαθητικό πρόγραμμα» (O.E.E.C, 1961^α, § 398).

Συμπερασματικά τέλος πρέπει να παρατηρήσουμε πως το μαθηματικό πρόγραμμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έγινε πολύ πιο αυστηρό, με έμφαση στην ακριβή διατύπωση των μαθηματικών εννοιών και στη δομή σαν ένα παραγωγικό σύστημα. «Η τυπική αυστηρή προσέγγιση των νέων μαθηματικών δεν εκδηλώθηκε μόνο στη γεωμετρία αλλά σε κάθε τι περιλαμβανομένου και του μαθηματικού λογισμού... έτειναν επίσης να γίνουν εντελώς αφηρημένα με κύριο ενδιαφέρον την παραγωγική ανάπτυξη. Αυτή η τάση ήταν καθαρά μαθηματική στην καθαρότερη τους μορφή». (F. Van der Bliz et al, 1981).

β) Αλλαγές στις διδακτικές μεθόδους

Ο σπουδαιότερος ίσως σκοπός της μεταρρυθμιστικής αυτής κίνησης ήταν η προσπάθεια της να καταδείξει στο μαθητή ότι η παραγωγική λογική χρησιμοποιείται παντού στα μαθηματικά. 'Οτι κάθε μαθηματικό σύστημα πρέπει να βασίζεται πάνω σε αναπόδεικτες υποθέσεις, πρωταρχικές έννοιες και ορισμούς.

Συνοψίζοντας τους γενικούς σκοπούς του συνεδρίου στο Royaumept, ο πρόεδρος του καθηγητής M. Stone είπε χαρακτηριστικά: «Για τον μαθητή τα μαθηματικά θα πρέπει να είναι μάλλον μια γενική αποδεικτική επιστήμη παρά μια συλλογή ωφέλιμων κανόνων και τύπων». (OEEC, 1961^α, § 43).

'Ενας άλλος εξίσου βασικός σκοπός της μεταρρύθμισης στις περισσότερες χώρες εκφράζεται πολύ καθαρά στα πρα-

κτικά του συνεδρίου του (Cambridge, που καθόρισε τους σκοπούς των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Αμερική τη δεκαετία του 1960: «Ο μαθητής που έχει περάσει τον κύκλο της 13χρονης εκπαίδευσης (νηπιαγωγείο — πρωτοβάθμια — δευτεροβάθμια) πρέπει να έχει στα μαθηματικά ένα επίπεδο που να συγκρίνεται με τα τρία χρόνια της πανεπιστημιακής εκπαίδευσης σήμερα. Δηλαδή θα περιμέναμε απ' αυτόν να έχει αποκτήσει το ισοδύναμο δυο χρόνων μαθηματικού λογισμού, ενός εξαμήνου μοντέρνας άλγεβρας και ενός πιθανοθεωρίας». (D. Alhele & Reys. R, 1971, P. 34).

Κάτι τέτοιο όμως παρουσίαζε δυσκολίες από παιδαγωγικές πλευράς και χρειαζόνταν να στηριχθεί σε νέες ψυχοπαιδαγωγικές θεωρίες για τη μάθηση και τη διανοητική ανάπτυξη του παιδιού, οι οποίες ανέτρεπαν τις παραδοσιακές θεωρίες που στηρίζονταν στις αντιδραστικές αντιλήψεις για το δείκτη νοημοσύνης (Irving Adler, 1966/1971).

Μετά το β' παγκόσμιο πόλεμο η ψυχολογία της μάθησης μπήκε σε μια ποιοτική φάση προβληματικής, μεθοδολογίας και έρευνας. Μεγάλη προσοχή δόθηκε στην ανάλυση της φύσης των εννοιών και του τρόπου που αυτές σχηματίζονται στα κεφάλαια των παιδιών. Οι εργασίες του J. Piaget και της σχολής του στη Geneva, άρχισαν να επηρεάζουν τις εκπαιδευτικές διαδικασίες παγκόσμια. Αργότερα ο J. Bruner και η σχολή του επεξεργάστηκαν παραπέρα ορισμένες πλευρές της ανάπτυξης της σκέψης και της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων στο παιδί.

Αυτή η ψυχολογική έρευνα αναμόρφωσε την παιδαγωγία προσανατολίζοντάς την σε δραστηριότητες όπως η ανακάλυψη, επινόηση, δημιουργικότητα και ενεργητική συμμετοχή του μαθητή στη διαδικασία της μάθησης. (L. Shulman, 1968/1971). Αναγνωρίστηκε πως οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα και ικανότητα να διαμορφώσουν σκέψεις σ' ένα διανοητικό επίπεδο υψηλότερο απ' αυτό που προϋπόθετε το παραδοσιακό μαθητικό πρόγραμμα.

«Η ψυχοπαιδαγωγική στήριξη της μεταρρύθμισης ήρθε επίσημα το 1960 με το έργο του Bruner: Η διαδικασία της παιδείας», (N.C.T.M., 1979, P. 3). Στο έργο αυτό, γίνεται μια διαπεραστική ανάλυση των ψυχολογικών προβλημάτων της διδασκαλίας των επιστημών με έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών μεθόδων και στις ενοποιητικές δομές αυτών. «Το να καταλάβει κάποιος τι είναι δομή σημαί-

νει στην ουσία να μάθει πως σχετίζονται τα πράγματα». Για να βοηθάει κάθε μαθητής να «εκπληρώσει την ανώτερη διανοητική του ανάπτυξη». Ο Bruner ισχυρίζεται ότι η διδασκαλία που δίνει έμφαση στη δομή ενός αντικειμένου, η καλή διδασκαλία «έχει μεγαλύτερη αξία για το μέσο μαθητή παρά για τον προικισμένο μαθητή, αφού είναι ο πρώτος και όχι ο δεύτερος που υποφέρει από την κακή διδασκαλία» (Bruner J., 1960, σελ. 24).

Οι αντιλήψεις που παρουσιάζουν σ' αυτό το βιβλίο, που αποτελούσε μια ανασκόπηση της διάσκεψης του Γουντς Χωλ το 1953 για τη βελτίωση της διδασκαλίας των θετικών επιστημών στα σχολεία πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, έγιναν τελικά τι συνθήματα και οι καθοδηγητικές αρχές για τη διδασκαλία των «νέων» μαθηματικών.

Σαν κύρια μέθοδος διδασκαλίας προπαγανδίστηκε η επανάληψη (Bruner J. 1960/1971). Η διδασκαλία θα είχε σαν σκοπό την κατανόηση και όχι τη μηχανική απομνημόνευση κάποιων κανόνων. Η πρώτη προσέγγιση σε κάθε θέμα θα έπρεπε να είναι διαισθητική και η τελική κατανόηση να επιτυγχάνονται με τη συνεχή επιστροφή στο θέμα αυτό, σε υψηλότερο διανοητικό επίπεδο κάθε φορά και με διαφορετική προσέγγιση, κάτι που θα εξασφάλιζε το σπειρωτό πρόγραμμα. Πολλές επίσης σημαντικές μαθηματικές έννοιες, κυρίως στις μικρές τάξεις, θα ήταν καλό να προσεγγίζονται μέσα από διασκεδαστικά παιχνίδια, τρικ ή παράδοξα (Irving Adler 1966/1971).

Η τολμηρή υπόθεση του Bruner (1960, σελ. 46) ότι «όλα τα θέματα είναι δυνατόν να διδαχθούν αποτελεσματικά και με τρόπο πνευματικά έντιμο σ' όλους τους μαθητές και σ' όλα τα στάδια, της σπουδής τους», χρησιμοποιήθηκε σαν άλλοθι για να περάσουν τελικά τα πιο απίθανα και σκληρά μαθηματικά, στις πιο απίθανες σχολικές βαθμίδες.

γ) Επικρίσεις της μεταρρύθμισης

Οι αλλαγές αυτές του β' κύματος, όπως εξάλλου είναι φυσικό με κάθε αλλαγή που επιχειρεί να διαταράξει το status quo, ξεσήκωναν αντιδράσεις και επικρίσεις. Στην περίπτωση μας όμως μπορούμε να πούμε πως ήταν θεελώδεις και κλόνησαν σοβαρά τη φιλοσοφία και λογική της μεταρρύθμισης.

Από μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας εκτοπίσαμε τους παρακάτω βασικούς λόγους και αιτίες που διαμορφώνουν και

συνθέτουν τη διαφωνία στη μεταρρύθμιση της δεκαετίας του 1960.

1) Το μαθηματικό πρόγραμμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης το σχεδίασαν επαγγελματίες πανεπιστημιακά μαθηματικοί και όπως ήταν φυσικό αντανακλούσε τα δικά τους ενδιαφέροντα. Τα 1962 στο Αμερικάνικο περιοδικό *Mathematical Monthly*, εμφανίστηκε ένα μνημόνιο (*Memorandum*) που το υπέγραψαν 75 διακεκριμένοι μαθηματικοί (μεταξύ των οποίων οι Birkhoff, Courant (Coxeter, κ.α.), στο οποίο έκφραζαν τη διαφωνία τους για την κατεύθυνση της μεταρρύθμισης και την άλλωση της μαθηματικής εκπαίδευσης από πανεπιστημιακούς μαθηματικούς, οι οποίοι «μπορεί ασυνείδητα να υποθέτουν ότι όλοι οι νέοι άνθρωποι αγαπούν αυτό που οι σημερινοί μαθηματικοί αγαπούν ή ότι οι μόνοι μαθητές που θ' άξιζαν πνευματικής καλλιέργειας είναι αυτοί που θα μπορούσαν να γίνουν επαγγελματίες μαθηματικοί (*The Amer. Math Monthly*, LXIX, March, 1962).

2) Υπερβολική έμφαση στη δομή, αυστηρότητα, και φορμαλισμό του περιεχομένου. Οι ενοποιητικές αρχές, αντίληψης και φιλοσοφίες της ομάδας Βουρβακί για τη φύση των μαθηματικών, διαπέρασαν τα σχολικά προγράμματα, παραβλέποντας το γεγονός πως ένας μαθητής δεν μπορεί να εκτιμήσει τις ενοποιητικές δομές των μαθηματικών πριν καλά καλά γνωρίσει τα μαθηματικά αυτά (*H. Fremont*, 1967).

Τα «νέα μαθηματικά» κατηγορήθηκαν α) για φετιχισμό του συνολοθεωρητικού τρόπου σκέψης, β) για τις υψηλές αφαιρέσεις που δεν δικαιολογούνται με εφαρμογές, γ) για τη ψευδολογία γλώσσα, την παραφορτωμένη με σύμβολα και ορολογία, δ) για φετιχισμό της αξιωματικής μεθόδου ε) για φετιχισμό της αυστηρότητας, η οποία στη διδακτική πράξη γίνεται άχρηστη σχολαστικότητα (*A. Krygowska*, 1979).

«Οι μεταρρυθμιστές σκοπεύουν με τις φιλοσοφικές τους προκαταλήψεις, από τη μια να εγκαταλείψουν αυτή την περιοχή που αποτελεί εξαιρετική μαθητεία στην εξερεύνηση, αυτήν την ανεξάντλητη πηγή προβλημάτων, την Ευκλείδεια γεωμετρία, και από την άλλη να την αντικαταστήσουν, με τις γενικότμητες των συνόλων και της λογικής, δηλαδή μ' ένα υλικό που είναι τόσο φτωχό, κενό και αποθαρρυντικό για τη διαίσθηση». (*René Thom*, 1973).

Ο Morris Kline, θεώρησε πολύ ανούσιο και φτωχό το νέο περιεχόμενο της συνολοθεωρίας και της μαθηματικής λογικής

και πολύ χαρακτηριστικά το επέκρινε λέγοντας ότι: «κανένας μαθηματικός πλην του σπесиαλίστα στα προβλήματα της μαθηματικής λογικής δεν χρησιμοποιεί συμβολική λογική. Πρώτ' απ' όλα κάθε μαθηματικός σκέφτεται, διαισθητικά και μετά παρουσιάζει τα επιχειρήματά του σε μια παραγωγική μορφή, χρησιμοποιώντας λέξεις, οικεία μαθηματικά σύμβολα και κοινή λογική. Αυτό είναι αληθινό για το 99,9% των μαθηματικών που έχουν παραχθεί. Μόνο οι σπесиαλίστες στα προβλήματα των θεμελίων, που ενδιαφέρονται για τις ασάφειες και ανακρίσεις της συνηθισμένης γλώσσας καταφεύγουν στη συμβολική λογική. Ακόμη όμως και αυτοί οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται ότι θέλουν να πουν διαισθητικά και μετά εκφράζουν τις σκέψεις τους με ειδικά σύμβολα» (Morris Kline, 1958/1971).

«Ο πρόωρος φορμαλισμός οδηγεί σε στειρότητα. Οι μαθητές θα έπρεπε να έχουν μια ικανοποιητική εμπειρία με τους εισαγωγικούς, αναλογικούς συλλογισμούς και άλλους μη τυπικούς τρόπους σκέψης, πριν επιχειρήσουν αυστηρούς παραγωγικούς συλλογισμούς. Η γενετική⁽¹⁸⁾ αρχή, ότι ο μαθητής πρέπει να ανατρέξει τα στάδια της διανοητικής ανάπτυξης της φυλής, θα έπρεπε μάλλον να παρακινεί τη διδασκαλία παρά η καθαρά τυπική προσέγγιση στα μαθηματικά». (The Amer. Math. Monthly, LXIX, March, 1962). Τα «νέα» μαθηματικά θεωρήθηκαν τελικά υπεύθυνα γιατί ο «Γιαννάκης δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση» (M. Kline, 1973), ενώ έχει μάθει μόνο να παπαγαλίζει κάποιους ορισμούς και να χρησιμοποιεί κάποια ορολογία χωρίς να μπορεί να εφαρμόσει τις γνώσεις του αυτές στην επίλυση προβλημάτων. «Το βαθύ πνεύμα και η ουσία των μαθηματικών κρύφτηκαν πίσω από ένα σύννεφο ορολογίας, ορισμών και αξιωμάτων. Τα πραγματικά μαθηματικά εξαφανίστηκαν» (F. Van der Bliz et al, 1981).

3) Απομόνωση των μαθηματικών από άλλες περιοχές της γνώσης και τις φυσικές επιστήμες που υπήρξαν οι πηγές δημιουργίας τους.

Τα νέα βιβλία της μεταρρύθμισης έδιναν έμφαση στις θεωρητικές πλευρές μόνο και παράλειπαν τις πρακτικές εφαρμογές και τις διασυνδέσεις των μαθηματικών με τη ζωή και τις άλλες επιστήμες. «Η διδασκαλία των μαθηματικών όμως θα έπρεπε να τονίσει τη σχέση τους με το φυσικό κόσμο και όχι να τα παρουσιάζει σαν ένα παιχνίδι με αυθαίρετους κανόνες». (The Amer. Math. Monthly, LXIX, March 1962).

Οι ασκήσεις επίσης που περιλάμβαναν τα νέα βιβλία ήταν

περισσότερο εγκεφαλικά κατασκευάσματα και κατά κανόνα δεν πήγαζαν από τη φυσική πραγματικότητα, ενώ δεν είχαν καμιά σχέση με τα ενδιαφέροντα του μαθητή (J.J. Hirstein et al, 1980).

Ακόμη όμως και οι δυο καινούργιοι κλάδοι των πιθανοτήτων και στατιστικής που αντιπροσώπευαν κατ' εξοχή τα εφαρμοσμένα μαθηματικά στα νέα προγράμματα, σπάνια διδάσκονταν όπως προκύπτει από τη διδακτική έρευνα. (Usiskin Z, 1985).

4) Τα προγράμματα των «νέων» μαθηματικών προορίζονταν για τους ταλαντούχους μαθητές που θ' ακολουθούσαν ακαδημαϊκές σπουδές.

Οι αφηρημένες έννοιες και ο αυστηρός φορμαλιστικός τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονταν στα προγράμματα των «νέων» μαθηματικών, αποδείχτησαν πολύ πάνω από τις διανοητικές ικανότητες του μέσου μαθητή, κάτι που έπρεπε να αναμένονταν, αφού σε επίπεδο προσθέσεων τουλάχιστον τα μαθηματικά αυτά προορίζονταν περισσότερο για να δημιουργήσουν ένα ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο σ' αυτούς που θα συνέχιζαν πανεπιστημιακή μόρφωση και προορίζονταν να επανδρώσουν τις ελλείψεις στο επιστημονικό-τεχνολογικό δυναμικό, τους μελλοντικούς δηλαδή τεχνοκράτες.

Στην ανάλυση της μεταρρύθμισης των «νέων» μαθηματικών της δεκαετίας του 1960 η Αμερικάνικη εθνική συμβουλευτική επιτροπή για τη μαθηματική εκπαίδευση (NACOME) ήταν κατηγορηματική πάνω σ' αυτό: «Οι βελτιώσεις των μαθηματικών προγραμμάτων των «νέων» μαθηματικών της δεκαετίας του 1960 παρακινήθηκαν και σχεδιάστηκαν πρωταρχικά για να προσφέρουν μαθηματικά υψηλής ποιότητας στους ικανούς μαθητές που θα συνέχιζαν στο πανεπιστήμιο, ειδικά σ' αυτούς που προορίζονταν για τεχνική-επαγγελματική καριέρα. Η καθοδήγηση για την ανάπτυξη των προγραμμάτων προήλθε κυρίως από μαθηματικούς των πανεπιστημίων και της βιομηχανίας και το μοντέλο για τη δομή του προγράμματος ήταν η λογική δομή των μαθηματικών» (N.C.T.M., 1979, P. 23).

Αλλά και οι σκοποί του Ο.Ο.Σ.Α δεν ήταν καλύτεροι. Ο πρόεδρος του συνεδρίου στο Royaumont, Marshall Stone εκθέτοντας τους σκοπούς του συνεδρίου λέγει: «Υπάρχουν δυο βασικοί παράγοντες που μας επιβάλλουν να μελετήσουμε με καθαρά μάτια τα μαθηματικά που προτείνουμε να διδαχτούν στους νέους ανθρώπους της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ο

ένας είναι η τρομακτική ανάπτυξη των καθαρών μαθηματικών στους νέους καιρούς. Ο άλλος είναι η αυξανόμενη εξάρτηση της επιστημονικής σκέψης από τις μαθηματικές μεθόδους, που συμπίπτουν χρονικά με μια όλο και περισσότερο πειστική κοινωνική απαίτηση για τις υπηρεσίες των επιστημόνων κάθε είδους... Μια τέτοια τροποποίηση [των αναλυτικών προγραμμάτων] είναι απαραίτητη εάν θέλουμε να προετοιμάσουμε μελλοντικούς πανεπιστημιακούς σπουδαστές καθ' όλα ικανούς για το είδος της μαθηματικής σκέψης που θα περιμένουμε απ' αυτούς μετά την εγγραφή τους» (Marshall Stone, 1961^a, & 18, 23). Τελικά τα «νέα» μαθηματικά αποτέλεσαν (και σε μερικές περιπτώσεις και σήμερα αποτελούν) το πρόγραμμα μαθηματικής εκπαίδευσης για τους ταλαντούχους μαθητές. «Έγινε φανερό μάλλον γρήγορα ότι οι μαθητές που ωφελήθηκαν περισσότερο από το νέο πρόγραμμα των μαθηματικών ήσαν οι καλύτεροι μαθητές». (Usiskin Z, 1985).

Πολλές κριτικές επικεντρώθηκαν σ' αυτό ακριβώς το σημείο της παραγωγής-αναπαραγωγής και όξυνσης των κοινωνικών ανισοτήτων που προκάλεσε η εισαγωγή των «νέων» μαθηματικών, αφού εξακολούθησαν και μάλιστα πιο έντονα να αποτελούν «μέσα επιλογής, τα οποία ευνοούν μαθητές περισσότερο διανοητικά αναπτυγμένους λόγω του οικογενειακού τους υποβάθρου» (A. Krygowska, 1979)¹⁹⁾

Οι υπόλοιποι μαθητές παραμελήθηκαν και αγνοήθηκαν στην ουσία από τη μεταρρύθμιση, μολονότι διατυμπανίστηκε στις αρχές πως τα «νέα» μαθηματικά προορίζονταν για τη μεγάλη μάζα των μαθητών. «Μέσα σ' αυτά παραμελημένα παιδιά περιλαμβάνονται οι πολιτιστικά αποστερημένοι και εκείνοι που πιθανόν να είναι οι φτωχοί της επόμενης γενιάς» (Carl Allendoerfer, 1965/1971).

5) Δεν εφαρμόστηκαν οι νέες παιδαγωγικές αρχές που διακηρύχθηκαν. Όπως αναφέραμε παραπάνω, οι μεταρρυθμιστές διακήρυξαν πως η δεύτερη πλευρά της επανάστασης των «νέων» μαθηματικών θα ήταν η εφαρμογή των σύγχρονων αρχών της ψυχοπαιδαγωγικής και της διδασκαλίας, των ενεργητικών μεθόδων που θέλουν το παιδί συμμετοχο στη διαδικασία της μάθησης. Δυστυχώς όμως όλος αυτός ο θόρυβος αποδείχτηκε ότι λειτούργησε πιο πολύ σαν προπαγάνδα υπέρ των «νέων» μαθηματικών και λιγότερο για τη βελτίωση της διδακτικής πράξης.

Όπως πολύ σωστή παρατηρεί ο Carl Allendoerfer (1965/

1971), οι υπεύθυνοι στις επιτροπές για την αλλαγή των σχολικών μαθηματικών δεν έδειξαν ότι είχαν παιδαγωγικές γνώσεις, αφού στα τελικά ντοκουμέντα έδωσαν βάρος μονόπλευρα στο περιεχόμενο. Στα ντοκουμέντα π.χ. του Royaumeont δεν δίνονται καθόλου παιδαγωγικές κατευθύνσεις (O.E.E.C, 1961^α). Η στάση και νοοτροπία των μεγάλων μαθηματικών πανεπιστημιακών δασκάλων και ερευνητών της εποχής αυτής που διαμόρφωσαν στην ουσία, τα νέα αναλυτικά προγράμματα μπορεί να περιγραφεί αρκετά πιστά από το παρακάτω απόσπασμα ενός διαλόγου μεταξύ ενός σπουδαίου παιδαγωγού της μαθηματικής εκπαίδευσης και του μαθηματικού που επηρέασε περισσότερο από κάθε άλλον τη διαμόρφωση αυτών των προγραμμάτων στη δεκαετία του 1960. Ο διάλογος αναπτύχθηκε σε μια συνάντηση μαθηματικών το καλοκαίρι του 1960 στο μαθηματικό ινστιτούτο του πανεπιστημίου του Aarhus, τη δεύτερη μεγαλύτερη πόλη της Δανίας (Else & Jeans Hyrup, 1973, P. 130).

J. Dieudonné: «Αυτό που προέχει είναι να διδάξουμε στους μαθητές κάποια καλά μαθηματικά. Οι ψυχολογικές πλευρές δεν μ' ενδιαφέρουν καθόλου (La Psychologie, Je m'en fiche)».

H. Freudenthal: «θα μπορούσαμε να διδάξουμε οτιδήποτε, να οδηγήσουμε τα παιδιά σε οποιαδήποτε κατεύθυνση. Υπάρχουν όμως κι άλλα πράγματα στο σχολείο. Πρέπει να δούμε το όλο πράγμα σφαιρικά».

J. Dieudonné: «Όχι. Εμείς μιλάμε για μαθηματικά. Για τα υπόλοιπα σκοτίστηκα. (Le reste je m'en fou)».

Οι μαρτυρίες εξάλλου από τη διδακτική πράξη μέσα στην τάξη δείχνουν ότι η περίφημη αρχή της επαναανακάλυψης σπάνια εφαρμόστηκε και γενικά πολύ μικρή βελτίωση παρατηρήθηκε στις μεθόδους διδασκαλίας. «Το πιο συνηθισμένο πρότυπο διδασκαλίας αποτελεί μια καθημερινή ρουτίνα κατά την οποία δίνονται απαντήσεις στην εργασία που δόθηκε απ' το προηγούμενο μάθημα, τα πιο δύσκολα προβλήματα λύνονται στον πίνακα, νέα ύλη παραδίδεται γρήγορα, δίνεται εργασία για το σπίτι και το υπόλοιπο του χρόνου διατίθεται για ατομική εργασία ή την εργασία, που δόθηκε για το σπίτι». (Mark Driscoll, 1983, P. 10).

Όπως πολύ, πετυχημένα λένε οι G. Rising και S. Brown στην κριτική τους: «παρά τις καλές προθέσεις, πολύ συχνά η διαδικασία της ανακάλυψης μέσα στην τάξη περιορίστηκε στο ν' ανακαλύψει ο μαθητής τι έκρυβαν τα λόγια και οι σκέψεις του καθηγητή του». (G. Rising & S. Brown, 1983).

6) Έλλειψη σωστής προετοιμασίας των δασκάλων. Τα προγράμματα των «νέων» μαθηματικών περιλάμβαναν πλήθος μοντέρνων εννοιών, που η πλειοψηφία των δασκάλων στα σχολεία δεν τις είχαν διδαχτεί ούτε καν στα πανεπιστήμια. Άμεσο και επιτακτικό καθήκον λοιπόν για την επιτυχία της μεταρρύθμισης έμπαινε η επιμόρφωση των δασκάλων ως προς το νέο περιεχόμενο και τις μοντέρνες μεθόδους διδασκαλίας του. Μολονότι οργανώθηκαν στις διάφορες χώρες κάποια σεμινάρια γι' αυτό το σκοπό, το πρόβλημα δεν αντιμετωπίστηκε ανάλογα με τη σοβαρότητά του.

Σε ορισμένες χώρες όπως οι Η.Π.Α. το πρόγραμμα της επιμόρφωσης μπήκε σε εθελοντική βάση με αποτέλεσμα ένα μικρό μόνο ποσοστό δασκάλων να επιμορφωθεί (Peggy House, 1982, P. 11)

Στην Αγγλία επίσης, παρατηρήθηκε το ίδιο φαινόμενο όπως μας πληροφορεί η έκθεση του 1982 της επιτροπής που διερεύνησε τη διδασκαλία των μαθηματικών: «Δεν κατείχαν όλοι οι δάσκαλοι ένα ικανοποιητικό υπόβαθρο που θα τους επέτρεπε να εκτιμήσουν τις προθέσεις που αποτελούσαν τη βάση των νέων μαθηματικών που δίδασκαν. Κατά συνέπεια το υλικό που συμπεριλήφθηκε στα «μοντέρνα» μαθηματικά συχνά δεν παρουσιάζονταν σαν ένα μέρος, μιας ενοποιημένης δομής, αλλά σαν συλλογή ασύνδετων θεμάτων των οποίων η ουσία σαν ένα όλο δεν γινόταν φανερή στους μαθητές». (D. A. Quadling, 1985).

Στη Δ. Γερμανία πάλι, όμως και σε άλλες χώρες που είχαν συγκεντρωτικό εκπαιδευτικό σύστημα, οι μεταρρυθμίσεις επιβλήθηκαν στην κυριολεξία από πάνω με μια γραφειοκρατική τακτική που αγνόησε την οποιαδήποτε δυνατότητα προσαφοράς των δασκάλων.

«Τα νέα προγράμματα εφαρμόστηκαν χωρίς καμία επιμορφωτική εκπαίδευση και χωρίς καμιά σοβαρή προσπάθεια να περιληφθούν και οι δάσκαλοι στη μεταρρυθμιστική διαδικασία. Η συνολοθεωρία έγινε το σήμα κατατεθέν των νέων προγραμμάτων τα οποία δεν καταλάβαιναν ούτε οι μαθητές, ούτε οι γονείς, ούτε ακόμη πολλοί απ' τους δασκάλους, οι οποίοι έπρεπε να μάθουν τις νέες έννοιες από τα βιβλία των μαθητών τους. Σαν συνέπεια ακολούθησαν οι περιπλοκές και η αποτυχία» (Howson. Getal 1982, P. 244).

Στις αναπτυσσόμενες χώρες, όπως Τανζανία και Αραβικές χώρες, οι μεταρρυθμίσεις έγιναν με βεβιασμένο τρόπο ακο-

λουθώντας άκριτα τα δυτικά κυρίως πρότυπα, κάτι που είχε σαν αποτέλεσμα την αποτυχία τους (Ken Clements, 1984). Ένας από τους σοβαρότερους λόγους της αποτυχίας αυτής εκτιμήθηκε ότι ήταν η ανεπαρκής και εντελώς πρόχειρη προετοιμασία του δάσκαλου των μαθηματικών (G. Muari, 1980, M. Jurdak et al 1981).

Βλέπουμε λοιπόν πως παρά τις κάποιες προσπάθειες που μπορεί να έγιναν για την προετοιμασία των δασκάλων (σε ορισμένες περιπτώσεις σοβαρές, όπως π.χ. Γαλλία⁽²⁰⁾), το αποτέλεσμα σε γενικές γραμμές ήταν αποτυχημένο, γιατί ακριβώς αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα ευκαιριακά, περιστασιακά και επιφανειακά. «Οι περισσότεροι δάσκαλοι γύρισαν στα σχολεία τους και απλά επαναλάμβαναν αυτά που μόλις έμαθαν, σαν τους μαθητές του σχολείου που έχουν καλά απομνημονεύσει διάφορες ημερομηνίες από το μάθημα της Ιστορίας και τις επαναλαμβάνουν στην τάξη». (G. Rising και St. Brown, 1983).

Συνοψίζοντας αναφέρουμε την εκτίμηση του G. Howson (1979), ότι δηλαδή «το σημαντικότερο γεγονός που αναδύθηκε από τη ξέφρενη ανάπτυξη των μαθηματικών προγραμμάτων της εικοσαετίας, είναι η συνειδητοποίηση του κρίσιμου ρόλου του δασκάλου. Αδιάφορο πόσο εξαιρετική είναι η ομάδα που θα σχεδιάσει το πρόγραμμα ή τα υλικά, η επιτυχία της εργασίας της θα εξαρτηθεί τελικά από τη δεκτικότητα και προσαρμοστικότητα του δασκάλου».

2.2.3. Το τρίτο κύμα των μεταρρυθμίσεων — η κίνηση «Back to the basics».

Η μεταρρύθμιση των «νέων» μαθηματικών για όλους αυτούς τους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω προκάλεσε και μια ανησυχία άρχισε να εμφανίζεται σιγά-σιγά αλλά σταθερά μεταξύ των εκπαιδευτικών, γονιών, αλλά και γενικότερα της κοινής γνώμης. Ένας θόρυβος ξεσηκώθηκε που τελικά πήρε πρωτοφανής διαστάσεις με συνέπειες απρόβλεπτες για τους σχεδιαστές των μεταρρυθμίσεων. Ένα αντιμεταρρυθμιστικό κύμα άρχισε να εμφανίζεται, πρώτα στις Η.Π.Α. (Usiskin, 1985) που μετά εξαπλώθηκε και στις περισσότερες χώρες που υιοθέτησαν τη μεταρρύθμιση, σε διαφορετικά βέβαια χρονικά διαστήματα, όπως Γαλλία (A. Revuz, 1978/1981), Ιαπωνία (T. Kawaguchi, 1980), Αραβικές χώρες (M. Jurbak et al,

1981), ενώ στη Σοβιετική Ένωση όλα δείχνουν ότι βρίσκονται σε μια περίοδο έντονου προβληματισμού και κριτικής των «νέων» προγραμμάτων⁽²¹⁾.

Τα «νέα» μαθηματικά σε μερικές χώρες θεωρήθηκαν υπεύθυνα για την πτώση των επιδόσεων στα τεστ και σε εθνικούς και παγκόσμιους διαγωνισμούς (A. Anderson, 1967/1871). Άρχισε λοιπόν να εκδηλώνεται μια τάση απομάκρυνσης από τα «νέα» προγράμματα της δεκαετίας του 1960 που στις Η.Π.Α. καθιερώθηκε σαν κίνηση «back to the Basics».

Τα κύρια χαρακτηριστικά της κίνησης αυτής, όπου εκδηλώθηκε, ήταν:

α) Εγκατάλειψη της συνολοθεωρητικής γλώσσας στο μεγαλύτερο μέρος της παρουσίασης των εννοιών.

β) Μεγαλύτερη έμφαση (από πρώτα) στις υπολογιστικές δεξιότητες και τεχνικές, αφού θεωρήθηκε ότι είχαν εγκαταληφθεί με τον υπερτονισμό της κατανόησης στα «νέα» μαθηματικά.

γ) Στροφή στους μωχεβιοριστικούς στόχους της ανακαλυπτικής διαδικασίας (Usiskin Z. 1985).

δ) Στροφή στις μεγάλες μάζες των μαθητών που είχαν παραμεληθεί με τις προηγούμενες μεταρρυθμίσεις.

Έτσι τα βιβλία άρχισαν να αναθεωρούνται. Δεν δίνεται έμφαση πια στην παραγωγική προσέγγιση και οι κανόνες της άλγεβρας π.χ. δίνονται με αριθμητικά παραδείγματα ή μέσα από φυσικά μοντέλα χωρίς καμιά αξιωματική-παραγωγική παρουσίαση. Η γεωμετρία επίσης έγινε λιγότερο αυστηρή.

Η κίνηση αυτή βέβαια ενώ σε μερικές περιπτώσεις έδωσε θετικά στοιχεία ή πήγαζε από σωστές προθέσεις τουλάχιστο, ορισμένες φορές εκδηλώθηκε σαν μια υστερία ενάντια στα «νέα» μαθηματικά με αποτέλεσμα να αποτελέσει το άλλο άκρο, λειτουργώντας σαν ο αντίποδας των «νέων» μαθηματικών. στην περίπτωση αυτή επικρίθηκε σαν «αποπροσανατολιστική και επικίνδυνη» μια και υποδείκνυε μια επιστροφή στη μηχανική, τυποποιημένη εξάσκηση στις υπολογιστικές δεξιότητες «και συνεπάγονταν μια μετακίνηση του εκπαιδευτικού εκκρεμούς στο περιεχόμενο και τις μεθόδους μιας ξεπερασμένης εποχής». (Peggy House, 1982, P. 25).

Το πιο ανησυχητικό όμως φαινόμενο ήταν η δημιουργία μιας επικίνδυνης πόλωσης και αντίθεσης μεταξύ «μοντέρνων» και «παραδοσιακών» μαθηματικών που εκφράστηκε επίσης

και μέσα από τα διχοτομικά σχήματα, κατανόηση ή δεξιότητες, αφηρημένο ή συγκεκριμένο, παραγωγή ή επαγωγή, φορμαλισμός ή διαίσθηση, κατανόηση των δομών ή πρακτική εξάσκηση στις εφαρμογές κ.λ.π.

Μέσ' απ' αυτό το πολωτικό σχήμα έγιναν προσπάθειες να ερμηνευθούν οι ελλείψεις, οι αδυναμίες και τα αδιέξοδα των μεταρρυθμίσεων, αφήνοντας στο απυρόβλητο τους κοινωνικοπολιτικούς — ταξικούς παράγοντες στα πλαίσια των οποίων γεννήθηκαν και εξελίχθηκαν οι μεταρρυθμιστικές αυτές κινήσεις και προσπάθειες.

Δεν είναι τυχαίο κατά τη γνώμη μας που μέχρι σήμερα δεν έχουν εμφανιστεί εργασίες που να αναλύουν τις μεταρρυθμίσεις και αλλαγές των τελευταίων 30 χρόνων, μέσα απ' την πολύπλευρη εξέταση των διάφορων μορφών αλληλεπίδρασης όλων των παραγόντων που συμβάλλουν στη διαμόρφωση μιας οποιασδήποτε εκπαιδευτικής αλλαγής.

Η εφεύρεση της αντιπαραθεσης — μονομαχίας μεταξύ «μοντέρνων» — «παραδοσιακών» μαθηματικών με όλες τις παραπάνω προεκτάσεις της, όταν τα προβλήματα και φαινόμενα δεν αντιμετωπίζονται σφαιρικά μέσα στο κατάλληλο ιστορικό-κοινωνικό πλαίσιο και σε συνάρτηση με συγκεκριμένες κοινωνικοοικονομικές μεταβλητές, έχει σαν σκοπό την υποβάθμιση του προβλήματος των πραγματικών αιτίων αποτυχίας της μαθηματικής εκπαίδευσης σε συγκεκριμένα κράτη.

(Ένας από τους σκοπούς μελλοντικής μας εργασίας θα είναι και το να αναλύσει μέσα από μια τέτοια, όσο γίνεται πιο σφαιρική σκοπιά, τα αντίστοιχα φαινόμενα στην Ελλάδα).

2.2.4. Το τέταρτο κόμα των μεταρρυθμίσεων

Η τελευταία αυτή μεταρρυθμιστική προσπάθεια εκδηλώνεται αυτή τη δεκαετία (1980) στις Η.Π.Α. και την αναφέρουμε γιατί η ιστορική πείρα δείχνει πως το πιθανότερο είναι, με κάποια καθυστέρηση φάσης, να μεταφερθεί σε αρκετές δυτικές χώρες ανάμεσα στις οποίες μπορεί να είναι και η Ελλάδα.

Παρ' όλους τους διορθωτικούς χειρισμούς που έγιναν με την κίνηση «back to the basics» και παρ' όλες τις διακηρύξεις για μαθηματική εκπαίδευση που θα απευθύνονταν στις ευρύτερες μάζες, οι διάφορες εκθέσεις και αναφορές που αφορούσαν την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά συνέχιζαν να είναι απογοητευτικές τόσο σε εθνικό (J. Saxon, 1983,

1984^α, 1984^β) όσο και σε παγκόσμιο επίπεδο (C. Mc. Knight et al, 1985).

Στην επιμονή τους οι ειδικοί να αρνούνται να μελετήσουν το πρόβλημα πολύπλευρα, λαμβάνοντας υπόψη τους όλους τους παράγοντες που επιδρούν στη μαθηματική εκπαίδευση, απέδωσαν την αποτυχία στη μεταρρυθμιστική κίνηση «back to the basics» κατηγορώντας την με επιχειρήματα σαν κι αυτά: «Τώρα τα μαθηματικά μας πρόγραμματα... παρουσιάζουν άλγεβρα χωρίς δομή, γεωμετρία χωρίς απόδειξη και το χειρότερο διδασκαλία τέτοια που να δημιουργεί την εντύπωση πως δεν συγκροτείται από ένα σύνολο κοινών αποδεκτών σκοπών... Δεν ακούμε πλέον για δομή, λογική, απόδειξη ή τις πολιτιστικές αξίες που πηγάζουν από τη μελέτη των σχολικών μαθηματικών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το πρόγραμμα της διδασκαλίας μας να μην είναι ισορροπημένο, όπως ένας άνθρωπος που κουτσαίνει από το ένα πόδι». (F. Allen, 1984).

Στο τέλος της δεκαετίας 1970 η δευτεροβάθμια μαθηματική εκπαίδευση στις Η.Π.Α έδειχνε απογοητευτική εικόνα σ' όλα τα επίπεδα της (M. Zelinka, 1980). Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να ευαισθητοποιήσει τους υπεύθυνους και να αρχίσει να δημιουργείται μια καινούργια κίνηση για αναθεώρηση των σχολικών προγραμμάτων πάνω σε νέες βάσεις και με νέους στόχους.

Δεν φαίνεται όμως να πάρθηκαν υπόψη οι αδυναμίες, ελλείψεις, ατέλειες των προηγούμενων μεταρρυθμίσεων και η πείρα που αποκομίσθηκε απ' την εφαρμογή τους. Έτσι διαφαίνεται η τάση να επαναληφθούν τα ίδια σφάλματα που οδηγούν φυσικά και στα ίδια αδιέξοδα.

«Αυτή τη φορά η βασική παρακίνηση [για τη μεταρρύθμιση] είναι οικονομική αν και υπάρχουν επιστημονικές και τεχνολογικές πλευρές επίσης. Το κυρίαρχο επιχείρημα είναι ότι κινδυνεύουμε να χάσουμε την υπεροχή μας στη διεθνή αγορά από τους Δυτικοευρωπαίους και τους Ιαπωνέζους. Για να τους συναγωνιστούμε πρέπει το έθνος μας να αποκτήσει τεχνολογική μόρφωση, έτσι ώστε να παράγει εργάτες που να μπορούν να χρησιμοποιούν την τεχνολογία για να γίνουν πιο παραγωγικοί» (Ar. Coxford, 1985).

Οι βασικές κατευθύνσεις της νέας μεταρρύθμισης φαίνονται στις συστάσεις που κάνει η εθνική ένωση μαθηματικών δασκάλων της Αμερικής (N.C.T.M.) για τα σχολικά μαθηματικά στη δεκαετία του 1980, μεταξύ των οποίων είναι:

α) Η επίλυση προβλημάτων πρέπει να αποτελέσει το επίκεντρο των σχολικών μαθηματικών για τη δεκαετία του 1980.

β) Πρέπει να καθοριστούν βασικοί στόχοι ικανοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών που να συμπεριλάβουν περισσότερα πράγματα, πέραν της υπολογιστικής ευχέρειας.

γ) Τα μαθηματικά προγράμματα πρέπει να λάβουν πλήρως υπόψη τις δυνατότητες των υπολογιστών και computers σε όλες τις σχολικές βαθμίδες.

δ) Περισσότερη μαθηματική μελέτη πρέπει να απαιτηθεί απ' όλους τους μαθητές και ένα ευλύγιστο πρόγραμμα με μεγαλύτερη έκταση επιλογών πρέπει να σχεδιαστεί για να εκπληρώσει τις διαφορετικές ανάγκες του μαθηματικού πληθυσμού (N.C.T.M, 1980, P. 1).

Παρατηρούμε δηλαδή μια στροφή στις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων και στην αξιοποίηση της τεχνολογίας του ηλεκτρονικού υπολογιστή για τη διδακτική πράξη.

Στο επίπεδο των προθέσεων βέβαια πάντα, η επιδίωξη για υλοποίηση αυτών των στόχων είναι σωστή, κατά τη γνώμη μας πάντα, γιατί αφ' ενός μεν η μαθηματική δραστηριότητα και δημιουργία βασίζεται στις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων (Halpern P, 1980) και αφ' ετέρου επειδή το σχολείο και κατά συνέπεια η μαθηματική εκπαίδευση θα είναι ασυγχώρητες να μην ανοίξουν τις πόρτες τους στους computers που επαναστατικοποίησαν την κοινωνία μας.

Η ένσταση και γι' αυτή την προσπάθεια θα μπορούσε να απευθύνονταν στη μεθόδευση υλοποίησης που θα υιοθετούσαν στην πράξη και που θα συσχετιζονταν άμεσα με τις προθέσεις να αναλυθούν και ληφθούν υπόψη όλες οι συνιστώσες του προβλήματος. Όσο νωρίς βέβαια κι αν είναι για να επιχειρηθεί μια αξιολόγηση και αυτής της τελευταίας μεταρρυθμιστικής κίνησης, η τάση που διαφαίνεται να θεωρηθούν αυτή τη φορά τα προβλήματα και οι computers σαν σωτηρία και πανάκεια για τη μαθηματική εκπαίδευση, πρέπει να καταγραφεί σαν κακός οϊωνός.

2.3. Συμπέρασμα

Είναι αυτονόητο πιστεύουμε πως μια προσπάθεια για κριτική ανάλυση και θεώρηση των μεταρρυθμίσεων που πραγματοποιήθηκαν στη μαθηματική εκπαίδευση τα τελευταία 30 χρόνια σε παγκόσμια κλίμακα είναι πολύ πέρα από τις δυνατότη-

τές μας. Χρειάζεται να προηγηθούν πρώτα άλλες συγκεκριμένες εργασίες για κάθε περίπτωση, που θα μελετούν τα αντίστοιχα φαινόμενα στις δικές τους ιδιαιτερότητες, και ιδιομορφίες για να επιχειρηθεί κατόπιν η τελική σύνθεση και κριτική ανασυγκρότηση της συσσωρευμένης πείρας σ' ένα όλο⁽²²⁾.

Ωστόσο η παραπάνω παρουσίαση και ανάλυση κάποιων σημαντικών πλευρών των μεταρρυθμιστικών αυτών προσπαθειών, με τα στοιχεία που αντλήσαμε από τη διεθνή βιβλιογραφία, μας επιτρέπει νομίζουμε να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις και να βγάλουμε ένα σημαντικό συμπέρασμα.

Η παρακίνηση κάθε φορά για τις αλλαγές αυτές στα σχολικά μαθηματικά προήλθε από δυο βασικές φυσιολογικές κατά τη γνώμη μας κατευθύνσεις. Από τις διεργασίες και εξελίξεις στη μαθηματική επιστήμη αυτή καθ' εαυτή και από τις κοινωνικές απαιτήσεις για οικονομική και τεχνολογική ανάπτυξη, στην προσπάθεια των διαφόρων κρατών για συμμετοχή στο παγκόσμιο καταμερισμό του κεφαλαίου.

Η μαθηματική εκπαίδευση όμως δεν είναι απλώς ένας κλάδος της μαθηματικής επιστήμης, ούτε βέβαια παράρτημα του διεθνούς οικονομικού «management». Είναι περισσότερο μια πρακτική δραστηριότητα και οπωσδήποτε όχι απλώς μόνο μια θεωρητική μελέτη «επί χάρτου».

«Η μετάδοση της μαθηματικής γνώσης, όπως και κάθε άλλης γνώσης είναι μια κοινωνική διαδικασία που η επιτυχία της εξαρτάται από τη συνεργασία και σωστό συντονισμό όλων των παραγόντων που την επηρεάζουν» (Alan Schonfeld, 1983). Και αυτοί οι παράγοντες είναι η μαθηματική επιστήμη, η ψυχοπαιδαγωγική, η φύση της κοινωνίας, η φύση του παιδιού και η φύση των δασκάλων.

Εάν κάποιοι προσπαθήσουν να φτιάξουν ένα σχολικό μαθηματικό πρόγραμμα αγνοώντας έστω και έναν απ' αυτούς ή υπερτιμώντας κάποιους άλλους σε βάρος των υπολοίπων, «τότε το πιθανότερο είναι να δημιουργήσουν κάτι ανισόρροπο, ξεκάρφωτο, ή αδύνατο να πραγματοποιηθεί» (H. Griffiths & G. Howson, 1974, P. 1).

Κάτι τέτοιο έγινε σε γενικές γραμμές και με τις μεταρρυθμίσεις των τελευταίων 30 χρόνων, σε διαφορετικό βαθμό βέβαια και με ξεχωριστό τρόπο σε κάθε περίπτωση. Στη λαχτάρα για γρήγορη οικονομική και τεχνολογική ανάπτυξη μέσω της μαθηματικής επιστήμης, η μαθηματική εκπαίδευση χρησιμοποιήθηκε σαν κοινωνικό εφελτήριο, όπως αποδείχτηκε, για

τους ήδη κοινωνικά ευνοημένους μαθητές, με ταυτόχρονη παραγνώριση των άλλων συστατικών της, κάτι που είχε σαν άμεση φυσιολογική συνέπεια την παραμέληση των πλατιών μαζών, στις οποίες περιλαμβάνονταν τα πολιτιστικά αποστερημένα παιδιά.

Εάν θα πρέπει να μείνει κάτι απ' όλη αυτή την ιστορία, αυτό κατά τη γνώμη μας πρέπει να είναι η αναγνώριση και συνειδητοποίηση των πολύπλοκων αλληλεπιδράσεων και αλληλοσυσχετίσεων στα βασικά συστατικά που προσδιορίζουν και συνθέτουν μια εκπαιδευτική μεταρρύθμιση στο μάθημα των μαθηματικών και η κατανόηση του καθοριστικού και αποφασιστικού ρόλου που αυτές ακριβώς μπορεί να παίξουν για την τελική της επιτυχία.

Το παρήγορο βέβαια απ' όλες αυτές τις προσπάθειες των τελευταίων 30 χρόνων για αλλαγή και μεταρρύθμιση είναι το ότι ανατάραξαν τα λιμνάζοντα νερά στη μαθηματική εκπαίδευση παγκόσμια, ταρακουνώντας την από το μακάριο λήθαργο του προηγούμενου αιώνα, που έρχονταν σε κατάφορη αντίθεση με τις δραματικές εξελίξεις που συντελούνταν γοργά σ' όλα τα επίπεδα της οικονομικής βάσης και του κοινωνικού της επικοδομήματος.

Σ' όλες σχεδόν τις χώρες δημιουργήθηκε ένας πυρήνας μαθηματικών παιδαγωγών, με προοπτική να παίξουν ολοένα αυξανόμενο ρόλο στη βελτίωση της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών.

Ο προβληματισμός γύρω από την υπολοποίηση των στόχων για την προσαρμογή της μαθηματικής εκπαίδευσης στις απαιτήσεις και ανάγκες της κοινωνίας, έφερε πιο κοντά στους πανεπιστημιακούς θεωρητικούς ερευνητές και παιδαγωγούς με τους μαχόμενους εκπαιδευτικούς δασκάλους των μαθηματικών.

Αυτές οι ζυμώσεις αναμφισβήτητα λειτούργησαν και επηρέασαν καθοριστικά την παρατηρούμενη δειλή στροφή στον προσανατολισμό του ενδιαφέροντος των δασκάλων για συνειδητοποίηση και μελέτη των συσχετίσεων μεταξύ αυτών που διδάσκουν, του πώς το διδάσκουν και του τι μαθαίνει ο μαθητής. Αυτό σίγουρα είναι μια πρόοδος με ελπιδοφόρες συνέπειες και προοπτικές.

«Στο διεθνές επίπεδο, σαν ένα αποτέλεσμα των διαφόρων προγραμμάτων, συνεδρίων, συζητήσεων και συσκέψεων, έχει δημιουργηθεί ένα δραστήριο δίκτυο μαθηματικών παιδαγωγών

οι οποίοι διακατέχονται από ένα κοινό ενδιαφέρον για τα προγράμματα των σχολικών μαθηματικών και τις διδακτικές τους μεθόδους... Η εγκάρσια γονιμοποίηση των ιδεών μέσα σ' αυτή την κοινότητα των μαθηματικών και μαθηματικών παιδαγωγών, θα συνεχίσει οπωσδήποτε να αποβαίνει εξαιρετικά ωφέλιμη για όλα τα παιδιά του κόσμου» (Fr. Van der Bliz et al, 1981).

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1) Για τις νέες αυτές μαθηματικές ιδέες που εμφανίστηκαν το δεύτερο ήμισυ του 19ου και αρχές του 20ου αιώνα και που επαναστατικοποίησαν τη μαθηματική επιστήμη βλέπε L.A. Steen (1980), H. Eves (1983).

2) Η θεωρία των χωριστών διανοητικών λειτουργιών οφείλεται στον Christian Wolff (1679-1754), ένα Γερμανό φιλόσοφο και μαθηματικό. Η θεωρία του που δημοσιεύτηκε το 1734 με τον τίτλο «Psychologia Rationalis», περιγράφει το μυαλό αποτελούμενο από πολλές διακεκριμένες λειτουργίες. Φαντασία, μνήμη, αντίληψη, κρίση, διαίσθηση, θέληση, αφαίρεση κ.λ.π. (E. Brooks, 1883/1970, P. 78). Κάθε μια απ' αυτές θεωρούνταν κατά κάποιο τρόπο ανάλογη σε λειτουργία με κάποιον απ' τους μυς, που θα μπορούσε να εκπαιδευτεί με κατάλληλη εξάσκηση και με τη μελέτη κατάλληλων μαθημάτων. Η θέληση π.χ. μπορούσε να καλλιεργηθεί εάν ο μαθητής αναλάμβανε να εκπληρώνει όλο και πιο δύσκολα και οδυνηρά καθήκοντα. Η διδασκαλία της αριθμητικής θεωρούνταν ιδιαίτερα κατάλληλη για την ανάπτυξη της ανθρώπινης σκέψης, λογικής και κρίσης. Αυτή ακριβώς η σχολή (Faculty Psychology) συνέβαλε τα μέγιστα στην πλατιά αποδοχής λαϊκής αντίληψης, ότι τα μαθηματικά διδάσκονται για να δυναμώσουν το μυαλό (N.C.T.M., 1970, P. 99).

Η θεωρία βέβαια αυτή αναθεωρήθηκε και σήμερα θεωρείται από επιστημονικής άποψης «το πιο μεγάλο σφάλμα στην ανθρώπινη σκέψη» (R. Strom, 1969, P. 147). Γιατί όπως έχει διαπιστωθεί, κάθε τομέας μάθησης είναι και μια «πειθαρχία» (discipline) με δικό της σύστημα οργάνωσης της γνώσης και δική της μεθοδολογία, που εξασκεί μια ορισμένη επίδραση στον ανθρώπινο νου. Δεν υπάρχουν ανώτερα μαθήματα που ασκούν υπέρτερη επίδραση και που είναι καταλληλότερα άλλων για να «ακουίζου» το μυαλό. Δεν υπάρχει δηλαδή βασιλική οδός που να οδηγεί στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης, της κρίσης και του ανθρώπινου νου.

Μολονότι όμως η θεωρία αυτή βρίσκεται σε επιστημονική δυσμέ-
νεια, σήμερα «εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος παρατηρώντας
τη δουλειά στις τάξεις ότι εξακολουθεί ακόμη να είναι πολύ ζωντανή
στον καθορισμό της παιδαγωγικής μεθόδου» (R. Strom, 1969, P.
148).

Ειδικά για το ρόλο που έπαιξε η θεωρία αυτή στην ιστορία της
μαθηματικής εκπαίδευσης βλέπε το άρθρο του George Stanic (1986).

3) Για την προσφορά και τις αντιλήψεις του John Perry εκείνη την
εποχή, καθώς επίσης και για τα 8 διαφορετικά είδη χρησιμότητας
των μαθηματικών που ο ίδιος διατύπωσε, βλέπε: H. Griffiths & A.
Howson (1974, P. 17).

4) Ο E. L. Thorndike (1874-1949) θεωρείται από πολλούς σαν ο
μεγαλύτερος θεωρητικός της μάθησης. Θεωρούσε τη σχέση μεταξύ
εξωτερικού ερεθίσματος και αντίδρασης σαν ένα νευρικό δεσμό, μια
σύνδεση και προσπαθούσε να ανακαλύψει τι είναι εκείνο το οποίο
συνδέει το ερέθισμα με την αντίδραση. Γι' αυτό και η θεωρία του
ονομάζεται «συνδετική θεωρία» (R. Strom 1969 P. 167, E. Δημητρό-
πουλος 1981 σελ. 56).

Το βασικό γνώρισμα της θεωρίας αυτής είναι η απόκτηση δεσμών
μόνιμων με την επαναληπτική εξάσκηση. Αυτό που ενδιαφέρει κυρί-
ως είναι η εκμάθηση ορισμένων πραγμάτων και η αυτόματη, ταχεία
ανταπόκριση σε αντίστοιχες καταστάσεις με έναν αυτόματο τρόπο.
«Έτσι εις την διέγερσιν $\Delta = \alpha^2 - \beta^2$ αντιστοιχεί η ανταπόκρισις
 $A = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$. Ο δεσμός μεταξύ $\alpha^2 - \beta^2$ και $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
καθίσταται μόνιμος, αν εις το σχήμα τούτο γίνει εξάσκησις δι' επι-
μόνου επαναλήψεως τούτου και άλλων παρομοίων καταστάσεων. Το
αυτό συμβαίνει και δια το σχήμα $\left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\right) \rightarrow \left(\frac{2 \times 4}{3 \times 5}\right)$ » (X.
Γκλαβάς, 1960, σελ. 5).

5) Για τις εξελίξεις στην Αμερική και Αγγλία την περίοδο αυτή
βλέπε: J. Bidwell & R. Clason (1970), H. Griffiths & G. Howson
(1974) αντίστοιχα.

6) Στην Ουγγαρία η μεταρρύθμιση άρχισε σε πειραματική φάση
πρώτα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση όπου ολοκληρώθηκε και γενι-
κεύτηκε το 1974. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση άρχισε το σχολ.
έτος 1979-80. Για τα χαρακτηριστικά αυτών των μεταρρυθμίσεων βλέ-
πε: Ferenc Genzwun et al (1980).

Στις Φιλιππίνες τα νέα προγράμματα άρχισαν να εφαρμόζονται το
1890, μετά από το πρώτο Νότιο-Ασιατικό συνέδριο για τη μαθημα-
τική εκπαίδευση, που πραγματοποιήθηκε στη Μανίλα τις 29/3/1978.
Για τα χαρακτηριστικά αυτών των μεταρρυθμίσεων βλέπε: B. Nebres
& J. Marasigan (1980).

7) Στην Ιαπωνία η προσπάθεια για μεταρρύθμιση άρχισε το 1977
και μπήκε σε εφαρμογή το 1982. Για τα χαρακτηριστικά της βλέπε:

Tadsu Kawawuchi (1980). Για μια σύγκριση με το παραδοσιακό της πρόγραμμα του μαθήματος των μαθηματικών, βλέπε: Howard Fehr (1966).

Στην Κίνα τα νέα μαθηματικά προγράμματα για την πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση μπήκαν σε πειραματική δοκιμασία το 1978 και βρίσκονται σε εξέλιξη. Για όλες τις πλευρές των μεταρρυθμίσεων αυτών βλέπε: Ciangming Mei et al (1985).

8) Οι αλλαγές που έχουν γίνει στη Γαλλία τα τελευταία 30 χρόνια καθώς και οι λόγοι που τις επέβαλαν, περιγράφονται με λεπτομέρεια στο: Andre Magnier (1980). Η μεταρρύθμιση στο Βέλγιο άρχισε στις αρχές της δεκαετίας του 1960 και τα καινούργια προγράμματα για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση θεωρήθηκαν από τα πιο σκληρά και αυστηρά. Βλέπε π.χ.: W. Servais & T. Varga (1971, P. 183).

9) Στις Αραβικές χώρες και την Ταϊζανία η υπερβολική αυστηρότητα των μεταρρυθμίσεων του πρώτου κύματος αποδείχτηκε ανώτερη των αντιληπτικών ικανοτήτων των μαθητών και γι' αυτό γύρω στα 1976 αποφασίστηκε η αναθεώρηση τους (M. Jurdak & E. Jacobsen, 1981, G. Muari 1980).

10) Στις Η.Π.Α. η μεταρρύθμιση εξελίχθηκε σε τέσσερις φάσεις, ανά μία στις δεκαετίες 1950, 1960, 1970, 1980. Η τελευταία φάση της δεκαετίας του 1980 χαρακτηρίζεται από την έμφαση που δίνεται στην επίλυση προβλημάτων (Problem Solving) και στην αξιοποίηση των υπολογιστών για τη διδασκαλία των μαθηματικών (N.C.T.M. 1980, N.C.T.M. 1981).

11) Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι προβληματισμοί γύρω από τη διδασκαλία της γεωμετρίας και οι έρευνες γύρω από τα επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκόνης κατά Van Hiele, που τα συμπεράσματα της ενσωματώθηκαν τελικά στο σχολικό πρόγραμμα (Izaak Wirszup, 1976). Για μια γενική εικόνα της μαθηματικής εκπαίδευσης και των μεταρρυθμιστικών προσπαθειών στη Σοβιετική Ένωση, βλέπε: Harry Shabanowitz (1978), Yu. M. Kolyagin et al (1980).

12) Στην Πολωνία η μεταρρύθμιση άρχισε το 1960, αλλά χάρι στη μεγάλη παιδαγωγό Anna Zofia Krygowska, που έλαβε ενεργό μέρος σ' αυτήν (και σε παγκόσμιο επίπεδο επίσης), «ευτυχώς έγινε δυνατόν να αποφευχθεί μια εντατική μετατόπιση προς τα μοντέρνα μαθηματικά» (Stefan Turnau, 1983).

13) Εδώ υπονοούμε τη σχέση και αλληλεπίδραση μεταξύ κοινωνικοοικονομικών παραγόντων και φαινομένων που παρουσιάζονται στη σφαίρα του κοινωνικού επικοδομήματος. Τι επέδρασε π.χ. πο αποφασιστικά και έδωσε μεγαλύτερη ώθηση στη μεταρρύθμιση της δεκαετίας του 1960 στη μαθηματική εκπαίδευση: Οι αλλαγές και διαφοροποιήσεις στην οικονομική-τεχνολογική σφαίρα, που διαφοροποίησαν στη συνέχεια τις παραγωγικές δυνάμεις και παραγωγικές σχέσεις, ή οι επαναστατικές — ποιοτικές διεργασίες και εξελίξεις στη

μαθηματική επιστήμη που άρχισαν να συντελούνται από τα μέσα του 19ου αιώνα; Τέτοια σοβαρά ερωτήματα, εάν φυσικά επιθυμούμε να ξεφύγουμε από τη σφαίρα της ιδεολογικής προπαγάνδας, χρειάζονται επίσης σοβαρές μελέτες και έρευνες για να απαντηθούν και εν πάσει περιπτώσει σήμερα κάτι τέτοιο φαίνεται πολύ δύσκολο, μια και η κοινωνική ιστορία των μαθηματικών σαν επιστήμη βρίσκεται σε εμβρυακή κατάσταση, αντιμετωπίζοντας μια σειρά από δύσκολα επιστημολογικά και μεθοδολογικά προβλήματα (Herbert Mehtens, 1981).

14) Ο λογικισμός θεωρεί τα μαθηματικά ένα μέρος της λογικής. Ο σκοπός επομένως των λογικιστών είναι να παράγουν τις έννοιες και τα θεωρήματα των μαθηματικών από τους κανόνες απόδειξης ενός αξιωματικού συστήματος, που βασίζεται μόνο πάνω στις έννοιες και τα αξιώματα της λογικής. Οι κυριότεροι εκπρόσωποι της σχολής αυτής ήταν οι Frege, Russel και Whitehead. Ο Frege για παράδειγμα ισχυρίστηκε πως η αριθμητική είναι ένας κλάδος της λογικής και επομένως δεν χρειάζεται να δανειστεί τίποτα απ' την εμπειρία ή τη διαίσθηση.

Οι λογικιστές έλπιζαν τελικά να δείξουν πως τα μαθηματικά, αφού στηρίζονται πάνω στη λογική δεν έχουν φυσικό περιεχόμενο. Ο Russel ανέφερε ότι τα καθαρά μαθηματικά αποτελούνται από ισχυρισμούς για τους οποίους, δεν μπορούμε να πούμε εάν είναι πραγματικά αληθείς ή ψευδείς: «Τα μαθηματικά μπορεί να καθοριστούν σαν το αντικείμενο στα πλαίσια του οποίου ουδέποτε γνωρίζουμε τι είναι αυτό για το οποίο μιλάμε, ούτε αν αυτό που λέγεται είναι αληθινό».

Στο έργο των Russel-Whitehead «Principia Mathematica» γίνεται πια φανερό πως τα μαθηματικά είναι ένα ιδεώδες σύστημα προτάσεων είναι, η τυποποίηση αυτών των προτάσεων μέσα σε θεωρίες και πως η ουσία τους πρέπει να αναζητηθεί στις τέλειες θεωρίες που διατυπώνουν οι μαθηματικοί. Στο έργο αυτό μπορεί να δει κανείς πως μπόρεσαν οι συγγραφείς να ανάγουν όλα τα μαθηματικά σε λογικές αρχές και στην έννοια του συνόλου.

Η θέση των λογικιστών συνεπάγεται ότι τα μαθηματικά, όπως εξάλλου η λογική της οποίας αποτελούν ένα μέρος, συνίσταται από ταυτολογίες, δηλαδή προτάσεις οι οποίες είναι αληθείς, εάν τα συστατικά τους είναι αληθή και επομένως τα μαθηματικά δεν κάνουν ισχυρισμούς γύρω από το φυσικό κόσμο (Ph. Davis & R. Hersh, 1981, P. 332).

Αν και η εργασία των λογικιστών προηγήθηκε και επηρέασε τους φορμαλιστές, ο λογικισμός μπορεί να θεωρηθεί από την άποψη της μεθοδολογίας του σαν ένα ειδικό παράδειγμα της αντίληψης που αργότερα έγινε γνωστό σαν φορμαλιστική προσέγγιση στη μελέτη των μαθηματικών θεμελίων. Στο «Principia Mathematica» η απόδειξη προχωρεί, όπως και στον φορμαλισμό, μέσα από μια αλυσίδα παρα-

γωγικών συλλογισμών ενταγμένων μέσα σ' ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα, χωρίς καμιά αναφορά στη σημασία των συμβόλων που χρησιμοποιούνται. Αυτή η τυπική μέθοδος αναπτύχθηκε παραπέρα και τελειοποιήθηκε αργότερα από τον Hilbert και τους μαθητές του και αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό της θέσης των φορμαλιστών, για το ότι τα μαθηματικά είναι η επιστήμη των τυπικών συστημάτων, δηλαδή ότι τα μαθηματικά ασχολούνται με την επεξεργασία μιας αλυσίδας από σύμβολα στα οποία δεν χρειάζεται να αποδοθεί καμιά σημασία.

Ο Hilbert ήταν πεπεισμένος πως οι αντιφάσεις στη συνολοθεωρία οφείλονταν στην έλλειψη ακρίβειας, στον ορισμό των βασικών εννοιών των μαθηματικών και στην έλλειψη αυστηρότητας των παραγωγικών τους αποδείξεων. Ο σκοπός λοιπόν του προγράμματος του ήταν να δείξει ότι η συνολοθεωρία και προφανώς κάθε κλάδος των μαθηματικών, μέσα από αυστηρές μεθόδους μπορούσε να οικοδομηθεί στη μορφή ενός συνεπούς και πλήρους αξιωματικού συστήματος. Ο Hilbert έλπιζε πως θα επιτύχει το σκοπό του χρησιμοποιώντας μόνο εκείνες τις μεθόδους απόδειξης που αποδέχονταν οι ενορατιστές δηλαδή τις κατασκευαστικές.

Ο σκοπός του Hilbert δεν ήταν να εξάγει τα μαθηματικά από λογικές έννοιες και αξιώματα, όπως ο Russell. Απεναντίας οι φορμαλιστές όπως και οι ενορατιστές αποδέχτηκαν τις βασικές έννοιες των μαθηματικών, όπως την έννοια π.χ. του αριθμού, σαν διαισθητικά προφανείς και δεν θεώρησαν απαραίτητο να τις καθορίσουν με όρους της λογικής θεωρίας συνόλων.

Για τους φορμαλιστές, ο φορμαλισμός ήταν μια τεχνική που υπόσχονταν μέσα από την απόλυτη εξάλειψη της ασάφειας να διαβεβαιώσει τη συνέπεια και πληρότητα των μαθηματικών. Τελικά όπως αναφέραμε και στο α' μέρος, οι ανακαλύψεις του Gödel έδειξαν τη ματαιότητα του φορμαλιστικού προγράμματος. Ο Gödel έδειξε ότι ο φορμαλισμός μιας θεωρίας δεν μπορεί να εξασφαλίσει ούτε τη συνέπεια ούτε την πληρότητά της (M. Kline, 1982, P. 263). Για Hilbert και την επίδραση του έργου του στη σημερινή εποχή βλέπε: J. Dieudonné (1971).

Οι ενορατιστές ή ιντουισιονιστές (Intuitionists) πίστευαν πως τα μαθηματικά και η μαθηματική γλώσσα είναι δυο χωριστές οντότητες, ενώ τα μαθηματικά στην ουσία είναι μια μη γλωσσική δραστηριότητα του νου. Η μόνη πηγή της γνήσιας μαθηματικής σκέψης είναι η διαίσθηση, χάρις στην οποία μπορούμε να αναγνωρίσουμε βασικές έννοιες και προτάσεις σαν απολύτως αυτοπροφανείς και η οποία προηγείται κάθε λογικής.

Για τους ενορατιστές η λογική είναι ένα σύνολο από ταυτολογίες, ενώ τα μαθηματικά είναι πραγματική γνώση που δεν μπορεί να συστηματοποιηθεί πλήρως. Κανένα σύστημα δεν μπορεί να περιλάβει

όλα τα μαθηματικά, γιατί τα ίδια είναι συνέπεια μιας δημιουργικής δραστηριότητας. Νέες βασικές ιδέες και αλήθειες μπορεί να βρεθούν πάντα, οι οποίες δεν μπορούν να εξαχθούν από τις υποθέσεις ενός συστήματος. Αυτή η άποψη του θεμελιωτή της ενορατικής σχολής Ολλανδού μαθηματικού L. Brouwer, που έρχεται σε βασική αντίθεση με αυτές του Frege, Russel, Whitehead και Hilbert, διακηρύχθηκε πριν ακόμη ο Gödel δείξει το αδύνατο της πραγματοποίησης του φORMALιστικού προγράμματος.

Η κατασκευαστική άποψη είναι μια άλλη σπουδαία πλευρά της ενορατικής προσέγγισης στα μαθηματικά και γι' αυτό το σχολείο αυτό αναφέρεται και σαν κονστρακτιβισμός (Constructivism). Για τους ενορατιστές, η απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης είναι ισοδύναμη με την απόδειξη της ύπαρξης μιας κατασκευής που θα αποτελείται από πεπερασμένα βήματα και η οποία θα παράγει την πρόταση. Επομένως απορρίπτουν τις διαδικασίες μέσω των οποίων αποδεικνύονται οι γνωστές υπαρξιακές προτάσεις και αποδέχονται μόνο τις αποδείξεις οι οποίες προσφέρουν μια κατασκευαστική μέθοδο.

Οι μεγαλύτερες κριτικές κατά των ενορατιστών πηγάζουν απ' αυτήν ακριβώς την περιορισμένη αντίληψη τους για τη φύση της απόδειξης, που πολύ παραστατικά εκφράζεται από τον Hilbert: «Μ' αυτά που κάνουν οι Weyl και Brouwer μοιάζουν ν' ακολουθούν τ' αγνάρια του Kronecker! Ζητούν να σώσουν τα μαθηματικά εγκαταλείποντας όλα όσα απ' αυτά είναι ενοχλητικά... Αυτοί θα πετοκόψουν και θα ακρωτηριάσουν την επιστήμη. Εάν ακολουθήσουμε μια τέτοια μεταρρύθμιση, όπως την υποστηρίζουν, θα ρισκάρουμε να χάσουμε ένα μεγάλο μέρος του πιο πολύτιμου θησαυρού μας» (Ph. Davis & R. Hersh, 1981, R. 335).

Για περισσότερες λεπτομέρειες γύρω από τα τρία αυτά σχολεία της μαθηματικής σκέψης και την εργασία τους βλέπε: Διον. Αναπολιτάνος (1985, Κεφ. 3), Μαθηματική Επιθεώρηση (1981, τευχ. 24, σελ. 3-31).

15) Τα πρακτικά αυτών των συνεδρίων εκδόθησαν από τον Ο.Ο.Σ.Α. στα Αγγλικά και Γαλλικά. Βλέπε: OECD (1961^α), OECD (1961^β), H. Fehr (1963).

16) Για μια συζήτηση γύρω από την εξέλιξη αυτών των Projects και των κύριων χαρακτηριστικών που τα διακρίνουν σε παγκόσμιο επίπεδο βλέπε: G. Howson (1978), H. Griffiths & G. Howson (1974, P. 139), F. Van der Bliz et al (1981), G. Howson et al (1982).

Στην Ελληνική βιβλιογραφία βλέπε το άρθρο μας (Μπ. Τουμάσης, 1984) όπου γίνεται προσπάθεια ταξινόμησης των διαφόρων προσεγγίσεων που υιοθετούνται από τα προγράμματα αυτά.

17) Και σήμερα μετά από 30 και πάνω χρόνια «το πρόβλημα της γεωμετρίας και η θέση της στο πρόγραμμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης συνεχίζει να προκαλεί επίμαχες συζητήσεις» (Craine Timo-

thy, 1985). Για τους διάφορους προβληματισμούς και προσεγγίσεις που προτείνονται βλέπε Chr. Hirsch (1985) και το ειδικό αφιέρωμα στο *Mathematics Teacher* (Vol 78(6), N.C.T.M. 1985).

18) Για τη γενετική αρχή ή βιογενετικό νόμο και τις επιπτώσεις του στη διδασκαλία των μαθηματικών βλέπε: Κ.Α. Δρόσος (1985).

19) Το γεγονός αυτό έγινε τελικά αντικείμενο συζήτησης και έρευνας από κοινωνιολογικής σκοπιάς και αρκετοί σύγχρονοι κοινωνιολόγοι της εκπαίδευσης προσπάθησαν να το διερευνήσουν και αναλύσουν αποκαλύπτοντας τις κοινωνιολογικές του διαστάσεις (R. P. Williams, 1978).

20) Στη Γαλλία έγινε ίσως η σοβαρότερη προσπάθεια να τεθεί σε σωστές, γερές και μόνιμες βάσεις η προετοιμασία και επιμόρφωση του δασκάλου των μαθηματικών. Σ' όλη τη Γαλλία δημιουργήθηκαν γι' αυτό το σκοπό τα ινστιτούτα έρευνας για τη διδακτική των μαθηματικών (IREMS), που σήμερα αριθμούν 25. Βλέπε σχετικά και το άρθρο του Guy Brousseau (1984).

21) Όπως μας πληροφορεί ο L. Pontrsgin σε άρθρο του στο Σοβιετικό περιοδικό, «Kommunist» (No 14, P. 99-112): «Οι συγγραφείς των σημερινών σχολικών βιβλίων έχουν ακολουθήσει μια προσέγγιση μέσα από τη συνολοθεωρία, η οποία διακρίνεται για το υψηλό επίπεδο αφάιρεσης και η οποία υποθέτει ένα κάποιο επίπεδο μαθηματικής κουλτούρας, που ο μαθητής δεν κατέχει και δεν μπορεί να το κατέχει. Ακόμα και η πλειοψηφία των δασκάλων δεν κατέχει αυτό το επίπεδο. Έτσι ποιο ήταν το αποτέλεσμα; Η τεχνική περιπλοκή του υλικού και ο υπερβολικός φόρτος δουλειάς του μαθητή, η εισαγωγή του φορμαλισμού στη διδασκαλία και η απομάκρυνση αυτής από την πραγματική ζωή και πρακτική» (Douglas Quadling, 1985).

22) Τέτοιες ολοκληρωμένες εργασίες δεν έχουν εμφανιστεί ακόμη. Στις Η.Π.Α. π.χ. που έγινε κάποια αξιολόγηση, η έρευνα αποκάλυψε πως «οι σκοποί που τέθηκαν με τις μεταρρυθμίσεις προγραμμάτων και μεθοδολογίες των δεκαετιών 1960 και 1970 δεν εκπληρώθηκαν και η μαθηματική εκπαίδευση άλλαξε πολύ λίγο από το 1955 μέχρι το 1975» (Peggy House & th. Post, 1984). Στο άρθρο αυτό αναφέρονται και τα σπουδαιότερα ευρήματα από τις έρευνες αυτές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Allendoerfer Carl: «The second revolution in Mathematics». In D.A. Alchele & R. Reys (Eds): «Readings in Secondary...» Prindle, Weder & Schmidt, 1971.
2. Allen Frank: «The new Math. — An Opportunity lost» Mathematics Teacher Vol. 77 (8), 1984, P. 589-590.
3. Alchele D. & Ryes R. (Eds): «Readings in Secondary Scholl Mathematics» Prindle, Weber & Schmidt 1971.
4. Alber Irving: «The Cambridge report: Bluerpint of fantasy?» In Alchele D. & Reys. R (Eds), 1971.
5. Anderson A.C.: «The International Comparative Study of achievement in Mathematics» In Alchele. D. & Reys R. (Eds), 1971, P. 94-109.
6. Αναπολιτάνος Διον.: «Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των μαθηματικών». Εκδ. Νεφέλη, Αθήνα, 1985.
7. Bourbaki Nic.: «The architecture of Mathematics» In F. Le Lionnais (Ed): «Great Currents of Math. Thought» Vol. I. Dover 1971, P. 23-36.
8. Brooks E: «Mental Science and Methods of mental culture» (1983). In J. K. Bidwell & R. G. Clason (Eds), 1970, P. 72-90.
9. Bidwell & R. G. Clason (Eds): «Readings in the history of Mathematics education» N.C.T.M. 1970.
10. Bruner Jerome: «On learning Mathematics» In Alchele D. & Reys R. (Eds), 1971.
11. Bruner Jerome: «Η διαδικασία της παιδείας» (1960). Μετάφραση Χρ. Κληρίδη. Εκδ. Καραβία, Αθήνα Χ.Χ.
12. Brousseau Guy: «The IREM's role in helping elementary Schol teachers». In R. Morris (Ed), Unesco 1984 vol 3, P. 235-251.
13. Γκλαβάς Χ.: «Εισαγωγή εις την μαθηματικήν διδακτικήν» Αθήναι 1960.
14. Coxford Arthur: «School Algebra: What is stilf fundamental and what is not?» In C. Hirsch (Ed) N.C.T.M. 1985, P. 35-64.
15. Craine Timothy: «Integrating geometry into the secondary Mathematics Curriculum». In C. Horsch (Ed), N.C.T.M. 1985, p. 119-133.
16. Davis Ph. & Hersh R.: «The Mathematical experience» Birkhäuser, Boston 1981.

17. Dieudonné Jean: «Modern axiomatic methods and the foundations of Mathematics». In F. Le Lionnais (Ed), Vol II, 1971, P. 251-266.
18. Dieudonné Jean: «New thinking in School Mathematics». In O.E.E.C. 1961^a, P. 23-41.
19. D' Ambrosio U.: «Overall goals and objectives for Mathematical education». In Unesco, Vol. IV 1979, P. 180-198.
20. De Yault V. & Weaver F: «Forces and issues related to curriculum and instruction, K-6». In N.C.T.M. (Yearbook) 1970, Π. 91-152.
21. De Broglie Louis: «The role of Mathematics in the development of contemporary theoretical Physics». In F. Le Lionnais (Ed), Vol II, 1971, P. 78-93.
22. Driscoll Mark: «Research within reach: Secondary School Mathematics». N.C.T.M., 1983.
23. Δρόσος Κώστας: «Θεωρία των πιθανοτήτων και στατιστικής στα Λύκεια». Πρακτικά Β' Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε. 1985, σελ. 72-95.
24. Δημητρόπουλος Ε.: «Παιδαγωγική Ψυχολογία. Οι θεωρίες μαθήσεως» Β' έκδοση, 1981.
25. Eves Howard: «Great moments in Mathematics» Vol II. M.A.A. 1983.
26. Ε.Μ.Ε.: «Α' Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας» Αθήνα 1984.
27. Ε.Μ.Ε.: «Β' Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας» Αθήνα 1985.
28. Fehr Howard: «New thinking-Mathematics today» O.E.-E.D., Athens 1963.
29. Fehr Howard: «The Mathematics program in Japanese Secondary Schools» (1966). In Alchele D. & Reys R. (Eds), 1971, P. 110-119.
30. Fehr Howard: «Issues and trends in the teaching of Schools Mathematics» (1968). In Alchele D. & Reys R. (Eds), 1971, P. 471-478.
31. Fehr Howard: «Reform in Mathematics Education around the World» (1965). In Alchele D. & Reys R. (Eds), 1971, P. 85-93.
32. Fehr Howard: «The chambery Plan-Stages and Perspectives in the reform of Mathematics Instruction» (1969). In Alchele D. & Reys R. 1971, P. 120-132.
33. Fremont Herbert: «New Mathematics and old dilemmas» (1967). In Alchele D. & Reys R. 1971, P. 3-8.

34. Genzwum Ferenc et al: «Secondary School Mathematics in Hungary». In R. Morris (Ed), Unesco 1980, Vol. 1, P. 1-20.
35. Griffiths H. & Howson A.G.: «Mathematics Society and Curricula». Cambridge Univ. Press, 1974.
36. Howson A.G.: «The diffusion of new Ideas». In G.T. Wain (Ed), 1978, P. 124-139.
37. Howson G. Keitel Ch., Kilpartick. J.: «Curriculum development in Mathematics» Cambridge Univ. Press, 1982.
38. Hirsch Christian (Ed): «The secondary School Mathematics Curriculum» N.C.T.M. (Yearbook), 1985.
39. House Peggy: «Mathematics teachers: An endangered species». E.R.I.C., 1982.
40. House Peggy & Post Thomas: «Considerations for designing assessment Programmes for teacher education». In R. Morris (Ed), Unesco vol. 3, 1984, P. 153-173.
41. Halmos Paul: «The heart of Mathematics» The American Math. Monthly, Vol. 87(7), 1980, P. 519-524.
42. Hyrup Else & Hyrup Jeans: «Mathematics in Society» Copenhagen 1973.
43. Jones Ph. & Coxford A: «Mathematics in the evolving schools». In N.C.T.M. (Yearbook), 1970, П. 11-89.
44. Jurdak M. & Jacobsen E: «The evolution of Mathematics Curricula in the Arab States». In R. Morris (Ed), Unesco, Vol. 2 1981, P. 133-147.
45. Kawaguchi Tadsu: «Secondary School Mathematics in Japan» In R. Morris (Ed) Unesco Vol. 1, 1980, P. 39-59.
46. Kline Morris: «The ancients versus the moderns». In Alchele D. & Reys R. (Ed), 1971, P. 9-20.
47. Kline Morris: «Why Johnny can't add» St. Martin's Press, 1973.
48. Kline Morris: «Mathematics thw loss of Certainty». Oxford Univ. Press, 1982.
49. Krygowska A.Z.: «Mathematics education at the first level in post-elementary and secondary Schools». In Unesco Vol. IV, 1979, P. 31-46.
50. Kolyagin Y.M. ce al: «Ways of improving math. teaching in Soviet general Secondary Schools». In R. Morris (Ed), Unesco vol. 1, 1980, P. 70-86.
51. Le Lionnais F. (Ed): «Great Currents of Mathematical thought» Vol II, Dover Publ. 1971.
52. Moore E.H.: «On the foundations of Mathematics» (1903).

In J.K. Bidwell & R. G. Glason (Eds). N.C.T.M. 1970, P. 246-255.

53. Mac Lane S.: «The Impact of modern Mathematics on Secondary Schools». *The mathematics Teacher*, 1956 (66), P. 66-69.

54. Mmari G.: «Secondary mathematics in the United republic of Tanzania». In R. Morris (Ed), Unesco Vol. 1, 1980, P. 106-126.

55. Mehrtens Herbert: «Social history of Mathematics». In Mehrtens H. et al (Eds), 1981, P. 257-280.

56. Mehrtens H, Bos H, Schneider I. (Eds): «Social history nineteenth Century Mathematics». Birkhäuser, 1981.

57. Marshall Stone: «Reform in School Mathematics». In O.E.-E.C., 1961^a.

58. Mc Knight. C et al: «Twelfth-grade Mathematics in U.S. high Schools: A report from the secondary International math. Study». *Mathematics Teacher*, Vol 78(4) 1985, P. 292-300.

59. Morris Robert (Ed): «Studies in Mathematics education» Unesco, Vol 1 (1980), Vol 2 (1981), Vol 3 (1984), Vol 4 (1985).

60. N.C.T.M.: «A history of Mathem. Education in the United States and Canada» 32 nd Yearbook, N.C.T.M. 1970.

61. N.C.T.M.: «Overview and analysis of school Mathematics, grades K-12». 1979.

62. N.C.T.M.: «An agenda for action Recommendations for School math. of the 1980»

63. N.C.T.M.: «Priorities in Shool Mathematics» 1981.

64. N.C.T.M.: «Mathematics Teacher» Vol 78(6), 1985.

65. Nebres B. & Marasigan J.: «Recent developments in Mathematics education in the Philippines». In R. Morris (Ed), Unesco Vol 1, 1980, P. 60-69.

66. Osborne A. R. & Crosswhite F.J. «Forces and issues related to curriculum and instruction, 7-12». In N.C.T.M., 1970, P. 155-297.

67. O.E.E.C.: «New Thinking in School mathematics» Paris, 1961^a.

68. O.E.E.C.: «Synopsis for modern Secondary School Mathematics» Paris, 1961^b.

69. Perry John: «The teaching of Mathematics». In J. Bidwell & R. Clason (Eds), N.C.T.M. 1970, P. 221-245.

70. Quadling A.D.: «Algebra, Analysis, Geometry». In R. Morris (Ed), Unesco, Vol 4, 1985, P. 79-96.

71. Rogers Leo: «A survey of factors affecting the teaching

of mathematics outside the University in Britain in the nineteenth century». In H. Mehrtens et al, 1981, P. 149-164.

72. Rising Gerald & Brown Stefan: «Η καινούργια κρίση στα μαθηματικά του σχολείου». Μετ/ση Γ. Χατζηχρήστος. Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχ. 25, 1983, σελ. 42-63.

73. Revuz A.: «Αλλαγή της μαθηματικής εκπαίδευσης μετά το 1950 — Ιδέες και πραγματοποίηση. Γαλλία. Οι μεταρρυθμίσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών στη Γαλλία». Μετ/ραση Ε. Παπαδοπετράκη. Μαθηματική Επιθεώρηση, τευχ. 21, 1981, σελ. 48-64.

74. Steen L. A. (Ed): «Mathematics Today» Vintage Books, 1980.

75. Strom D. R.: «Psychology for the classroom» Prentice-Hall, 1969.

76. Stanic George: «Mental discipline theory and Mathematics education». For the Learning of Mathematics, 6(1), 1986, P. 39-47.

77. Suydam M. & Osborne A.: «The status of pre-college science, mathematics and social science education: 1955-1975. Vol II, Mathematics education» E.P.I.C., 1977.

78. Surancu Janos: «Mathematics teachers associations». In R. Morris (Ed), Unesco Vol. 4, 1985, P. 133-140.

79. Servais W. & Varga T.: «Teaching School Mathematics» Unesco, 1971.

80. Shabanowitz Harry: «Educational reform and Mathematics in the Soviet Union». In Swetz F.Z. (E6), 1978.

81. Swetz F.Z. (Ed): «Socialist Mathematics education». Burgundy Press, 1978.

82. Stone Marchal: «Reform in School Mathematics». In O.E.E.C., 1961^a, P. 7-22.

83. Shulman Lee: «Psychological controversies in the teaching of science and mathematics». In Alchele D & R. Reys (Eds), 1971, P. 178-192.

84. Saxon John: «Minorities don't seem to be important in Texas». Mathematics Teacher, Vol 76(9), 1983, P. 650.

85. Saxon John: «Holocaust in Mathematics education». Mathematics Teacher, Vol 77(1), 1984^a, P. 7.

86. Saxon John: «Present Mathematics course sequence is inadequate». Mathematics Teacher, Vol 77(5), 1984^b, P. 325-326.

87. Schoenfeld Alan: «The wild, wild, wild, wild, world of

problems solving (A review of sorts)». For the Learning of Mathematics, Vol 3(3), 1983, P. 40-47.

88. Thorndike E.: «The Psychology of Arithmetic» (1924). In J. Bidwell & R. Clason (Eds), 1970, Π. 462-477.

89. Turnau Stefan: «Dissertations in Math education at the higher School of education in Cracow, 1968 to 1981» Journal for research in mathem. education, Vol 14(4), 1983, P. 354-360.

90. The American Mathematical Monthly: «On the mathematics Curriculum of the high School», LXIX (March, 1962), P. 189-192.

91. Thom René: «Modern Mathematics: does it exist?» In A.G. Howson (Ed), 1973, P. 194-209.

92. Τουμάσης Μπ.: «Εξελίξεις στην ανάπτυξη μαθηματικών προγραμμάτων στη μέση εκπαίδευση. Η Ελληνική πραγματικότητα». Ε.Μ.Ε., 1984, σελ. 139-155.

93. Usiskin Zalman: «We need another revolution in secondary School Mathematics». In Hirsch. Ch. (Ed), 1985, P. 1-21.

94. Van der Bliz. F. et al: «New goals for old: An analysis of reactions to recent reforms in several countries». In R. Morris (Ed), Unesco, Vol 2, 1981, P. 105-118.

95. Van Lint H.: «Mathematics education at University level». In Unesco, Vol 4, 1979, P. 66-84.

96. Wiszup Izaak: «Breakthroughs in the Psychology of learning and teaching geomerty». In J. L. Martin (Ed): «Space and geometry». E.R.I.C., 1976, P. 75-97.

97. Williams R. P.: «The Sociologist and Mathematical education». In G.T. Wain (Ed), 1978, P. 40-53.

98. Wait G. T. (Ed): «Mathematical Education» Van Nostrand Reinhold, 1978.

99. Xiangming Mei et al: «A Survey of Secondary school Mathematics teaching in China». In R. Morris (Ed), Unesco, Vol 4, 1985, P. 159-169.

Υπεύθυνος Κρίσης: Σ. Παπασταυρίδης