Author: Π. Βλάμος

Title: Πρόταση θεμάτων σε διεθνείς μαθηματικές Ολυμπιάδες , Προετοιμασία Ολυμπιακών Ομάδων.

Abstract: Μελέτη προβλημάτων που προτείνονται και του τρόπου κατασκευής τους, τις απαιτούμενες γνώσεις και τις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, την προετοιμασία των Ολυμπιακών ομάδων:(λογική-πρακτική-διάρκεια). Ανάλυση της διαδικασίας πρότασης και επιβολής προβλημάτων και οι επιπτώσεις τους στην προετοιμασία των Ολυμπιακών ομάδων.

Creator: HDML

Μαθηματική Επιθεώρηση τ. 49 – 50. Έτος 1998

Πρόταση Θεμάτων σε Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες Προετοιμασία Ολυμπιακών Ομάδων

Π. Μ. Βλάμος
Διδάκτωρ Μαθηματικός Ε. Μ. Πολυτεχνείου

Περίληψη

Οι Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες (ΔΜΟ) ξεκίνησαν με στόχο να αναπτύξουν το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά, να διαδόσουν μαθηματικές γνώσεις και σκέψεις. Αργότερα εξελίχθηκαν ως ένα αξιόπιστο κριτήριο επιλογής και ανάδειξης νέων μαθηματικών ταλέντων με σπουδαία εξέλιξη στα ανώτερα μαθηματικά. Εως τότε, οι μαθηματικοί διαγωνισμοί εξελίσσονται ως ένας σημαντικός παράγοντας της μαθηματικής διδασκαλίας. Ο ρόλος τους αυτός δεν είναι δυνατόν να αγνοηθεί στα πλαίσια της εξέλιξης της μαθηματικής επιστήμης και της βελτίωσης των καθηγητών.

Με την εξέλιξη των μαθηματικών διαγωνισμών, οι Μαθηματικές Ολυμπιάδες αναπτύχθηκαν σταδιακά, έχοντας θετική συνεισφορά στη συνολική προσφορά της διδακτικής των μαθηματικών καθώς και στην ανάπτυξη της καθαρής μαθηματικής σκέψης.

Στις Μαθηματικές Ολυμπιάδες μπορούν να μελετηθούν οι ακόλουθοι τομείς :

(i) η ιστορική εξέλιξη και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους,
(ii) η συνεισφορά στο μαθηματικό εκπαιδευτικό σύστημα,
(iii) τα προβλήματα που προτείνονται και ο τρόπος κατασκευής τους,
(iv) οι απαιτούμενες γνώσεις και οι μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων,
(v) η προετοιμασία των Ολυμπιακών ομάδων : η λογική, η πρακτική και η διάρκεια.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τα (iii) - (v), αναλύοντας τη διαδικασία πρότασης και επιλογής προβλημάτων και τις επιπτώσεις τους στην προετοιμασία των Ολυμπιακών ομάδων.

1. Απαιτούμενες γνώσεις για τις ΔΜΟ

Οταν θα λέμε προβλήματα ΔΜΟ, θα αναφερόμαστε σε αυτά που προτείνονται στις ΔΜΟ και σε αυτά που χρησιμοποιούνται στην προετοιμασία των Ολυμπιακών ομάδων. Αυτά που επιλέγονται στις ΔΜΟ καθορίζονται από το Συμβούλιο Κριτών, έτσι ώστε να βρίσκονται στα πλαίσια του πνεύματος του διαγωνισμού, ενώ τα δεύτερα προέρχονται από προηγούμενες Ολυμπιάδες, μελετούνται, αλλάζουν και δίνονται παραλλαγές τους από τους προπονητές των ομάδων.

Οι απαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις, οι οποίες καθορίζουν τα πλαίσια υποβολής και επιλογής προβλημάτων και προετοιμασίας των μαθητών, καταγράφονται στον κανονισμό των Μαθηματικών Διαγωνισμών με την ευελιξία του χαρακτηρισμού "στοιχειώδεις μαθηματικές γνώσεις" από τις ακόλουθες θεματικές ενότητες :

Α. Καθορισμένη Υλη ΔΜΟ και ΒΜΟ (Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας)

- Θεωρία Αριθμών
- Ευκλείδεια Γεωμετρία
- Συνδυαστική
- Συναρτησιακές Σχέσεις
- Αλγεβρα
- Ανάλυση
- Θεωρία Γραφημάτων
- Θεωρία Παιγνίων
- Στερεομετρία

Β. Καθορισμένη Υλη ΒΜΟΝ (Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων)

- Θεωρία Αριθμών
- Συνδυαστική
- Αναλογίες - Ποσοστά
- Γραμμικές Εξισώσεις μίας Μεταβλητής
- Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων δύο Μεταβλητών
- Γραμμικές Ανισότητες
- Συστήματα Γραμμικών Ανισώσεων
- Αλγεβρικές Παραστάσεις
- Επιπεδομετρία
- Πρίσματα, Πυραμίδες, Κύλινδροι, Κώνοι

Ο αναλυτικός προσδιορισμός της ύλης κατά θεματική ενότητα αποτελεί ευθύνη της ομάδας προετοιμασίας και συχνά μεταβάλλεται ανά διαγωνισμό μετά από απόφαση του Συμβουλίου Κριτών.

2. Πρόταση Προβλημάτων σε Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Στην παρούσα παράγραφο θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην πρόταση προβλημάτων που συνδέονται άμεσα με την κατανομή, δομή και σκοπό των προβλημάτων ΔΜΟ, τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και την αξιολόγηση των προβλημάτων αυτών.

• Η σημασία της μελέτης της πρότασης προβλημάτων

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους αποτελούν τη βασική έκφραση της μαθηματικής δομής των ΔΜΟ καθώς "**τα προβλήματα είναι η καρδιά των μαθηματικών.**" Η εργασία αυτή αξιολογεί την εξέλιξη και βελτίωση των ΔΜΟ. Οι μαθηματικοί διαγωνισμοί έχουν ήδη ιστορία εκατό ετών.
Σημαντικά αποτελέσματα της επιστήμης των μαθηματικών και πρωτότυπες ιδέες αποτέλεσαν το εφαλτήριο της ουσιαστικής δομής του μεγαλύτερου μέρους των θεμάτων που προτάθηκαν και επιλέχθηκαν στις ΔΜΟ. Παρακάτω ακολουθεί ένας πίνακας με το πλήθος των θεμάτων, που έχουν επιλεγεί σε ορισμένες Μαθηματικές Ολυμπιάδες.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ	ΕΤΗ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ	ΣΥΝΟΛΟ
IMO	39	6	234
BMO	15	4	60
BMON	2	4 - 5	9
USAMO	27	5	135
USSSRMO	32	5 - 8 (10η ΤΑΞΗ)	223
ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ	16	4	64

Υπάρχει παράλληλα ένας αριθμός από αξιόλογα προβλήματα, τα οποία είτε τελικά δεν επελέγησαν σε συγκεκριμένους μαθηματικούς διαγωνισμούς, είτε χρησιμοποιήθηκαν σε άλλους προκριματικούς, που υπολογίζονται στα 500 για τα τελευταία 5 χρόνια. Τα προβλήματα αυτά καλύπτουν όλες τις γνωστικές κατηγορίες των Ολυμπιάδων και έχουν διαφορετική θεματολογία και ποικίλα επίπεδα δυσκολίας. Η συμβολή των ΔΜΟ στη μαθηματική εκπαίδευση είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς στα προβλήματα αυτά δίνεται έμφαση στην πρωτότυπη σκέψη, κατασκευή νέων μεθόδων και αποφυγή κάθε θεωρίας.
Η εστία των προβλημάτων ποικίλει, αλλά χωρίζονται σε τρεις κύριες κατηγορίες τα **κλασικά** και τα **πρωτότυπα,** τα πρώτα βασίζονται σε γνωστικά θέματα, ενώ τα δεύτερα σε λογική σκέψη.

Επιπλέον, η βασική ιδέα αρκετών προβλημάτων προέρχεται από βασικά ερευνητικά αποτελέσματα, οπότε η φύση των σύγχρονων μαθηματικών εμπεριέχεται σε αυτά. Τα προβλήματα των διαγωνισμών αντανακλούν τη σκέψη των εξεταστών ως λειτουργοί της μαθηματικής εκπαίδευσης και την ισορροπία ή σχέση που διαφαίνεται ανάμεσα στο μάθημα στο σχολείο και στους μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Τρία παραδείγματα της κατανομής αυτής των θεμάτων αποτελούν τα ακόλουθα :

Πρόβλημα 1 (Γνωστικό Θέμα)
Να βρεθούν όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) ακεραίων $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ που ικανοποιούν την εξίσωση $\alpha^{(\beta^2)} = \beta^{\alpha}$.

Πρόβλημα 2 (Πρωτότυπο Θέμα)
Εστω n θετικός ακέραιος και S το σύνολο όλων των σημείων (x,y), όπου x, y θετικοί ακέραιοι με $x \leq n$, $y \leq n$. *Υποθέτουμε ότι T είναι το σύνολο όλων των τετραγώνων με κορυφές στο S. Συμβολίζουμε με* α_k , $(k \geq 0)$ *τον αριθμό των ζευγών των σημείων του S, που είναι κορυφές ακριβώς k τετραγώνων του T. Να αποδείξετε ότι* $\alpha_0 = \alpha_2 + 2\alpha_3$.

Πρόβλημα 3 (Φύση των Σύγχρονων Μαθηματικών)
Εστω p, q δύο περιττοί πρώτοι. Να εξετάσετε αν υπάρχει φυσικός αριθμός ν>2, τέτοιος ώστε οι αριθμοί :

$$z = \left(p^{\nu} + 2^{\nu-2} q^{\nu}\right)^{\frac{2}{\nu}} \ , \quad x = \left(p^{\nu} - 2^{\nu-2} q^{\nu}\right)^{\frac{2}{\nu}},$$

να είναι ταυτόχρονα ακέραιοι.

Χρησιμοποιώντας τους ανωτέρω προβληματισμούς, η υποβολή θεμάτων υπόκειται σε κάποιες βασικές αρχές.

3. Αρχές Επιλογής Προβλημάτων ΔΜΟ

Οι αρχές αυτές αποτελούν οδηγό για τα Συμβούλια Κριτών των θεμάτων και καθορίζονται με βάσεις τους στόχους και το αντικείμενο των μαθηματικών διαγωνισμών. Οι κύριες συνιστώσες είναι :

(i) Επιστημονική Αρχή
(ii) Αρχή της Προσαρμογής
(iii) Αρχή της Επιλογής
(iv) Αρχή της Ανακάλυψης

• Επιστημονική Αρχή

Εχει δύο βασικές παραμέτρους. Η πρώτη είναι ότι η δομή και το περιεχόμενο των προβλημάτων αντανακλά την επιστημονική δομή των Μαθηματικών, δηλαδή οι υποθέσεις είναι επαρκείς και το συμπέρασμα παραγωγή ανάλυσης - σύνδεσης των δεδομένων. Η διατύπωση των θεμάτων έχει σαφήνεια και ακρίβεια. Ως παράδειγμα ας θεωρήσουμε τα ακόλουθα δύο θέματα :

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, *όπου* $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 10010$, $\alpha_3 = 100010010$, $\alpha_4 = 10000100010010$, $\alpha_5 = 1000001000100010010$, ...
Να βρεθούν όλοι οι δείκτες ν ώστε : $1998/\alpha_\nu$.

Πρόβλημα 5

Θεωρούμε τη δεκαδική αναπαρώ/ταση του αριθμού 4444^{4444}. *Το άθροισμα των ψηφίων του είναι* A *και το άθροισμα των ψηφίων του* A *είναι* B. *Να βρεθεί το άθροισμα των ψηφίων του* B.

• Αρχή της Προσαρμογής

Η αρχή αυτή είναι αναγκαία για τις ΔΜΟ, όχι όμως απαραίτητα για άλλους μαθηματικούς διαγωνισμούς. Για τη βελτίωση ή αναπροσαρμογή θεμάτων σε δεδομένα άλλων διαγωνισμών, πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην Επιστημονική Συνιστώσα.

Η αρχή αυτή αφορά στην προσαρμογή των προβλημάτων στα γνωστικά δεδομένα και ψυχολογικά χαρακτηριστικά των διαγωνιζομένων, καθώς και στο πολιτισμικό τους υπόβαθρο στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται δεδομένα χωρίς αυστηρά μαθηματικό περιεχόμενο.

Καταρχήν, το περιεχόμενο των προβλημάτων δεν πρέπει να ξεπερνά τους μαθητές.

Επιπρόσθετα, συγκριτικά με συνήθεις μαθητικούς διαγωνισμούς, τα προβλήματα Ολυμπιάδων δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα στην ανάδειξη του ταλέντου των μαθητών.

Ξεκινούν από απλές παρατηρήσεις, αφελή επαγωγή και ανάλυση δεδομένων, προσεκτική παρατήρηση και αυστηρή μεταφορά ενός πραγματικού μοντέλου σε ένα μαθηματικό.

Οι ιδέες αυτές αποτελούν τα χαρακτηριστικά της αρχής της προσαρμογής, βάσει των οποίων αρκετά δύσκολα προβλήματα μετατρέπονται κατάλληλα, έτσι ώστε να απευθύνονται σε μαθητές μικρότερων τάξεων απλοποιώντας τα ζητούμενα, αυξάνοντας τις υποθέσεις ή ζητώντας επιμέρους ή ειδικές περιπτώσεις ενός πολύπλοκου θέματος. Ως παραδείγματα παραθέτουμε τα ακόλουθα θέματα :

- **Μαθηματικά Μοντέλα**

Η τροποποίηση ενός πραγματικού μοντέλου σε ένα μαθηματικό μοντέλο είναι μιά σημαντική μαθηματική διαδικασία. Μία από τις βασικές λειτουργίες της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η παροχή στους μαθητές των γνώσεων και ικανοτήτων που απαιτούνται για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων και την κατανόηση μαθηματικών μοντέλων. Ας δούμε δύο παραδείγματα αυστηρά μαθηματικών ερωτήσεων, που μετατρέπονται σε θέματα εξαγωγής ανάλογων μαθηματικών μοντέλων :

Α. Παραδείγματα "Αυστηρά Μαθηματικών Ερωτήσεων"

1. Επιλέγουμε τυχαία ζεύγη αριθμών από το 1 έως το 10. Ποιος είναι ο μέσος όρος του απολύτου της διαφοράς σε κάθε ζεύγος;
2. Ρίχνουμε τρία ζάρια και προσθέτουμε τα αποτελέσματα των ρίψεων. Ποια η πιθανότητα το άθροισμα να είναι τουλάχιστον 11;

Β. Ανάλογα Μαθηματικά Μοντέλα

Οι ακόλουθες δύο ερωτήσεις είναι παρηλαγμένες οι ακριβώς προηγούμενες.

1. Ο Μιχάλης και η Μαρία εφηύραν ένα καινούργιο παιχνίδι στα χαρτιά. Από μία καινούργια τράπουλα βγάζουν όλες τις φιγούρες. Μοιράζουν από ένα ανοιχτό χαρτί στον καθένα. Αφαιρούν το μικρότερο από το μεγαλύτερο (ο άσος μετράει για ένα). Αν το αποτέλεσμα είναι 3 και κάτω, ο 1ος παίκτης κερδίζει έναν πόντο. Αν είναι 4 και πάνω, ο 2ος κερδίζει έναν πόντο. Η Μαρία σκέφτηκε ότι "Υπάρχουν 10 πιθανές διαφορές 0, 1, 2, ..., 9 , άρα ο μέσος όρος είναι $4\frac{1}{2}$". Για το λόγο αυτό θα παίζω δεύτερη. Ο Μιχάλης σκέφτηκε λίγο και συμφώνησε. Επαιξαν όλο το βράδυ 1000 παιχνίδια (είναι πολύ γρήγορα!). Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα το πρωί.
2. Ο Μιχάλης και η Μαρία παίζουν τώρα ζάρια και εφηύραν ένα καινούργιο παιχνίδι. Ρίχνουν τρεις φορές το ζάρι και προσθέτουν τα αποτελέσματα. Αν το άθροισμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 11, ο 1ος παίκτης κερδίζει έναν πόντο. Αν το άθροισμα είναι μικρότερο ή ίσο του 10, ο 2ος παίκτης κερδίζει έναν πόντο. Παίζουν το παιχνίδι 1000 φορές με τον Μιχάλη να παίζει πάλι 1ος. Ποιο είναι το αποτέλεσμα το πρωί;

Παρόμοια προβλήματα είναι και τα ακόλουθα :

Πρόβλημα 6

Πόσο συχνά πρέπει να κάνετε διάλειμμα όταν προετοιμάζεσθε για ένα διαγώνισμα ;

Πρόβλημα 7
Εστω α_ν*=1, 2, 3, . . . το πλήθος των φυσικών αριθμών της μορφής* N*, όπου το άθροισμα των ψηφίων του* N *είναι* ν *και τα ψηφία του* N *είναι μόνο τα 1, 3, 4. Να αποδείξετε ότι ο* $\alpha_{2\nu}$ *είναι τέλειο τετράγωνο.*

Πρόβλημα 8
Ας θεωρήσουμε ένα ποτάμι, του οποίου το μέγιστο πλάτος δε ξεπερνά το 1km, δηλαδή αν κάποιος ξεκινήσει από οποιοδήποτε σημείο της μίας όχθης για να διασχίσει το ποτάμι και να φθάσει στην άλλη όχθη δε διανύει απόσταση μεγαλύτερη του 1km. Είναι δυνατόν ένα πλοίο να κινείται μέσα στο ποτάμι, έτσι ώστε η απόστασή του και από τις δύο όχθες να μη γίνεται μεγαλύτερη από 0,7km ;

Η εξάσκηση των μαθητών σε τέτοια θέματα αποτελεί υποθήκη για την περαιτέρω εξέλιξή τους στα μαθηματικά.

- **Προσαρμογή Ερευνητικών Προβλημάτων σε Μαθητικό Επίπεδο**

Είναι συχνό το φαινόμενο πολλά προβλήματα να εκφράζουν τη φύση των σύγχρονων Μαθηματικών πηγάζοντας από απλές περιπτώσεις ερευνητικών ζητημάτων ή αποτελώντας μελέτη ειδικών περιπτώσεων τους, π.χ. :

Πρόβλημα 9
Να βρεθούν όλες οι τετράδες φυσικών αριθμών, διάφορων του 1, έτσι ώστε αν στο γινόμενο οποιωνδήποτε τριών από αυτούς προσθέσουμε τη μονάδα, να προκύπτει αριθμός που διαιρείται από τον αριθμό της τετράδας που δεν είναι στο γινόμενο.

Πρόβλημα 10
Ενας φυσικός αριθμός γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων, σε κάθε αριθμητικό σύστημα ;

• Αρχή της Επιλογής

Μία από τις σημαντικότερες επιδιώξεις των μαθηματικών Ολυμπιάδων είναι η πιθανή ανακάλυψη νέων ανθρώπων που να είναι μαθηματικά ταλέντα.
Η συνιστώσα λοιπόν αυτή λαμβάνεται σοβαρά υπόψη στην αντικειμενικότητα των θεμάτων καθώς και στο βαθμό δυσκολίας τους και και στη διαβάθμισή τους.

- **Αντικειμενικότητα των θεμάτων**

Πρέπει να αποφεύγονται θέματα παλιών Ολυμπιάδων, καθώς και θέματα που ξεπερνούν ότι έχουν διδαχθεί οι μαθητές που λαμβάνουν μέρος στους διαγωνισμούς. Τελευταία, εξαιτίας του αυξανόμενου αριθμού Ολυμπιάδων και διαγωνισμών που έχουν εμφανισθεί, είναι πρακτικά αδύνατη η κατασκευή εντελώς πρωτότυπων θεμάτων. Το πρόβλημα της κατασκευής νέων πρωτότυπων προβλημάτων απετέλεσε αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών.

Για να επιλυθεί αυτό το πρόβλημα, οφείλουν οι υπεύθυνοι προετοιμασίας των Ολυμπιακών ομάδων να επιμεληθούν την κατασκευή μίας τράπεζας θεμάτων με αντιστοίχιση δεικτών σε αυτά.

Επιπλέον, η μελέτη των υπάρχοντων θεμάτων οδηγεί στην ποιοτική αναβάθμιση, τη δημιουργία βελτιώσεων και την εφαρμογή απλοποιήσεων σε κάποια από τα θέματα. Επίσης πρέπει να υπάρχει προσεκτική μελέτη της υπάρχουσας θεματολογίας για την αποφυγή ανάλογων ή ίδιων θεμάτων.

- **Δυσκολία και Διαβάθμιση των θεμάτων**

Η βάση της επιλογής είναι ότι απευθύνονται σε και αξιολογούν μαθητές με διαφορετικές ικανότητες. Αν δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά στις βαθμολογίες μεταξύ μαθητών υψηλών και χαμηλών δυνατοτήτων, τότε η διαβάθμιση του προβλήματος είναι ιδιαίτερα χαμηλή. Τα ακόλουθα αποτελέσματα αποτελούν την ανάλυση των θεμάτων της 28ης ΔΜΟ στην Κούβα (1987).

ΘΕΜΑ	1	2	3	4	5	6
ΔΥΣΚΟΛΙΑ	0,36	0,63	0,74	0,68	0,43	0,81
ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΗ	0,38	0,52	0,19	0,56	0,42	0,11

Η διαβάθμιση των θεμάτων 1 και 5 είναι πολύ κοντά ή ξεπερνά το 0,4 που αποτελεί κρίσιμη τιμή της διαβάθμισης. Τα προβλήματα 1, 4 και 5 είναι θέματα που επιλύθηκαν από την πλειοψηφία των διαγωνιζομένων, ενώ τα προβλήματα 3 - 6 είναι θέματα μεγάλης δυσκολίας.

Ως παράδειγμα διαβάθμισης της δυσκολίας ενός θέματος παρουσιάζουμε το ακόλουθο :

Πρόβλημα 11

Ας θεωρήσουμε ένα διψήφιο αριθμό αβ, όπου α,β τα ψηφία του και την απόλυτη τιμή της διαφοράς των τετραγώνων των ψηφίων αυτών. Οταν φθάσουμε σε μονοψήφιο αριθμό σταματάμε. Ενας διψήφιος καλείται μηδενοδύναμος, αν οι διαφορές αυτές καταλήγουν στο 0. Π.χ. Ο 95 είναι μηδενο-δύναμος, ενώ ο 17 και ο 96 δεν είναι.

i. *Να βρεθούν οι διψήφιοι μηδενοδύναμοι.*
ii. *Ποιοί αριθμοί γίνονται μηδενοδύναμοι στο πρώτο βήμα;*
iii. *Ποιοί χρειάζονται τα περισσότερα βήματα για να φθάσουν στο 0;*
iv. *Ποιοί καταλήγουν κυκλικά στον ίδιο αριθμό (όπως ο 17 που καταλήγει στο 48);*
v. *Υπάρχουν άλλοι τρόποι για να καταλήγουμε σε φαύλο κύκλο;*
vi. *Ποιοί αριθμοί φθίνουν προς το 0 με την ανωτέρω διαδικασία;*
vii. *Φτιάξτε ένα διάγραμμα για να δείξετε πώς οι μηδενοδύναμοι καταλήγουν στο 0.*
viii. *Φτιάξτε δενδροδιαγράμματα για να δείξετε πώς λειτουργούν οι μη-μηδενοδύναμοι.*
ix. *Σε ποιό μονοψήφιο καταλήγουν τις περισσότερες φορές οι μη-μηδενοδύναμοι; Υπάρχουν μονοψήφιοι στους οποίους δεν καταλήγει κανένας μη-μηδενοδύναμος;*

• Η Αρχή της Ανακάλυψης

Για να αποφασίσουμε ποιός τύπος προβλημάτων είναι κατάλληλος για την ανάδειξη του ταλέντου των μαθητών, πρέπει να γνωρίζουμε και να έχουμε μελετήσει τις ικανότητες ενός μαθητή ταλαντούχου στα Μαθηματικά.

Οι ταλαντούχοι μαθητές στα Μαθηματικά είναι ισχυροί στην ανάλυση, σύνθεση και αξιολόγηση. Βρίσκουν εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης προβλημάτων, ανακαλύπτουν τις σχέσεις μεταξύ των μεγεθών που εμπλέκονται σε πραγματικά προβλήματα και στην κατασκευή μοντέλων. Πολλά θέματα έχουν κατασκευασθεί, έτσι ώστε να επιτρέπουν στους μαθητές να κατανοήσουν τις μαθηματικές διαδικασίες, μέσα από την παρατήρηση, ανακάλυψη και ψηλάφηση της αυστηρής μαθηματικής απόδειξης. Ως παραδείγματα έχουμε τα ακόλουθα :

Πρόβλημα 12

Να λυθεί στο Z *η εξίσωση* $x^3 - 7xy + y^3 = 7$.

Πρόβλημα 13

Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί k , *για τους οποίους η παράσταση* $5k^2 - k^2 + 4$ *είναι τέλειο τετράγωνο.*

Πρόβλημα 14

Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί ν, *για τους οποίους ο* $2^{\nu} + 85$ *είναι τέλειο τετράγωνο.*

Πρόβλημα 15

Εστω τρίγωνο ΑΒΓ, όπου τα μέτρα των γωνιών του $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ είναι α, β, γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha}{\beta^2-1}+\frac{\beta}{\gamma^2-1}+\frac{\gamma}{\alpha^2-1} \geq \frac{9\pi}{\pi^2-9}$.

Πρόβλημα 16

Θεωρούμε τους nxn τετραγωνικούς πίνακες, των οποίων όλα τα στοιχεία τους ανήκουν στο σύνολο $S=\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Ενας τέτοιος πίνακας ονομάζεται "ασημένιος" αν, επιπλέον, έχει την ιδιότητα : για κάθε $i=1, 2, \ldots, n$, τα στοιχεία της i-γραμμής του μαζί με τα στοιχεία της i-στήλης του περιέχουν όλα τα στοιχεία του S.

Να αποδείξετε ότι :

(α) δεν υπάρχει ασημένιος πίνακας στην περίπτωση $n=1997$.

(β) υπάρχουν άπειρες το πλήθος τιμές του n γιά τις οποίες υπάρχουν ασημένιοι πίνακες.

Πρόβλημα 17

Στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες είναι κορυφές τετραγώνων με πλευρά μήκους ένα. Τα τετράγωνα αυτά χρωματίζονται εναλλάξ μαύρα ή άσπρα (όπως σε μία σκακιέρα). Για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων m και n, θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο για το οποίο ισχύουν ότι :

i. οι κορυφές του είναι σημεία με ακέραιες συντεταγμένες

ii. οι κάθετες πλευρές του βρίσκονται κατά μήκος των πλευρών των παραπάνω τετραγώνων

iii. οι κάθετες αυτές πλευρές έχουν μήκος m η μία και n η άλλη.

Εστω S_1 το συνολικό εμβαδόν εκείνου του τμήματος του τριγώνου που είναι χρωματισμένο μαύρο, και έστω S_2 το συνολικό εμβαδόν εκείνου του τμήματος του τριγώνου που είναι χρωματισμένο άσπρο. Θέτουμε : $f(m,n)=|S_1-S_2|$.

α) Να υπολογίσετε τα $f(m,n)$ για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων m και n οι οποίοι είναι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων m, n ισχύει $f(m,n) \leq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$.

γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων m, n να ισχύει $f(m,n) < c$.

Τα περισσότερα προβλήματα που αναδεικνύουν την ανωτέρω λογική διαδικασία είναι θέματα που αφορούν την ύπαρξη ή τη σύνθεση ανεξάρτητων δεδομένων.
Η υποβολή θεμάτων σε Ολυμπιάδες πρέπει να ακολουθεί τις βασικές αυτές αρχές δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην αρχή της Ανακάλυψης.

4. Μέθοδος Κατασκευής Ολυμπιακών Θεμάτων

Η στρατηγική, που θα παρουσιασθεί, κατασκευάζει θέματα που αντιστοιχούν στις προθέσεις των εξεταστών. Ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάζονται τα θέματα είναι πολύ σημαντικός. Υπάρχουν τέσσερεις γενικές μέθοδοι, οι οποίες ήδη παρουσιάσθηκαν στο άρθρο.
Τα θέματα απεικονίζουν τις γνωστικές δυνατότητες καθώς και τις ικανότητες των μαθητών και οι συγγραφείς τους ακολουθούν δύο στρατηγικές, η πρώτη δίνει έμφαση στις γνώσεις και μέσω του προβλήματος οδηγεί το μαθητή σε νέα αποτελέσματα, ενώ η δεύτερη επενδύει στους μαθηματικούς τρόπους σκέψης. Τα δύο αυτά χαρακτηριστικά συνδυάζονται, ώστε να αποτελέσουν τη βάση της μεθόδου κατασκευής θεμάτων.

• Γνωστικές Δυνατότητες

Οι συγγραφείς που σκοπεύουν να αναδείξουν τα επίπεδα κατανόησης και εφαρμογής μερικών αρχών και εννοιών, συχνά διαχωρίζουν τις έννοιες αυτές, έτσι ώστε οι μαθητές να αποκτούν ένα βαθύτερο επίπεδο κατανόησης στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος και παράλληλα αποκτούν μεγαλύτερη ευελιξία στην επίλυση προβλημάτων.

Πρόβλημα 18

Να προσδιορίσετε όλες τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης : $\left|x^y - z^w\right| = 1$*,*
όπου x, z *πρώτοι και* $y, w \in IN^* - \{1\}$*.*

Πρόβλημα 19

Αν α *ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του φυσικού αριθμού* ν *(*$\nu \geq 3$*), για τις οποίες το κλάσμα :*

$$k_\nu = \frac{(\nu-3)!(\nu-1)\left[\alpha\nu^2 + (2\alpha+3)\nu - 2\right] + 1}{\nu(\nu+2)}$$

είναι ακέραιος.

Πρόβλημα 20

Το άθροισμα k διαφορετικών άρτιων φυσικών και λ διαφορετικών περιττών φυσικών είναι 1997. Να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $3k+4\lambda$.

Πρόβλημα 21

Εστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με $AB=\sqrt{2}A\Delta$. Με διάμετρο την ΔΓ γράφουμε ημικύκλιο στο εξωτερικό του ΑΒΓΔ και συνδέουμε σημείο του Μ με τα σημεία Α, Β. Αν Κ, Λ οι τομές των ΜΑ, ΜΒ με την ΔΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $\Delta\Lambda^2+\Gamma K^2=AB^2$. (Η άσκηση αυτή κατασκευάσθηκε από τον P. Fermat και λύσεις έδωσαν οι L. Euler, R. Simson κ.α.)

Ο στόχος των θεμάτων αυτών είναι οι μαθητές να μάθουν έμμεσα κάποιες γνώσεις, μέσω των προβλημάτων.

• Στρατηγικές με έμφαση στη σκέψη

Τα προβλήματα των διαγωνισμών επηρεάζουν άμεσα την προπόνηση των μαθητών που συμμετέχουν σε αυτούς, κατά τον ίδιο τρόπο που τα θέματα εισαγωγής στα Πανεπιστήμια επηρεάζουν την προετοιμασία των μαθητών, παρ' όλο που τα τελευταία αντικατοπτρίζουν γνώσεις και όχι ιδιαίτερα μαθηματική σκέψη. Τα προβλήματα Ολυμπιάδων έχουν ως κύριο στόχο τη δημιουργία πρωτότυπης σκέψης.

Αρχικά πρέπει να αναλύσουμε τις νοητικές διεργασίες και τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων στα πλαίσια της δημιουργίας Ολυμπιακών θεμάτων. Μία τεχνική αρκετά χρήσιμη είναι να επιλεγεί το κατάλληλο υλικό για την επίλυση του προβλήματος, μέσα από το ίδιο το πρόβλημα. Πολλά προβλήματα επιλύονται, προσεγγίζοντας τη γενική περίπτωση, μέσω ειδικών περιπτώσεων όπως γίνεται με διοφαντικές εξισώσεις, απροσδιόριστη ανάλυση, ακολουθίες ακέραιων και συναρτήσεις με ακέραιες τιμές.

Ως παραδείγματα παραθέτουμε τα ακόλουθα :

Πρόβλημα 22

Σε ένα πίνακα ένας μαθητής γράφει έναν 9-ψήφιο αριθμό χωρίς μηδενικά και με διαφορετικά ψηφία. Να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να σβήσουμε μερικά από τα ψηφία αυτά έτσι ώστε ο αριθμός που απομένει να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 23

Αν π πρώτος με $\pi \neq 2$, $\pi \neq 5$, να αποδείξετε ότι μεταξύ των π πρώτων όρων της ακολουθίας 1, 11, 111, 1111, . . . , $\underbrace{111\ldots1}_{\pi \text{ μονάδες}}$ υπάρχει ένας που διαιρείται με τον π.

Πρόβλημα 24

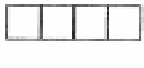
Ενα βιβλίο μαθηματικών περιέχει 30 κεφάλαια. Καθένα από αυτά αποτελείται από 1, 2, 3, . . . , 30 σελίδες, ενώ οποιαδήποτε δύο από αυτά αποτελούνται από διαφορετικό αριθμό σελίδων. Κάθε κεφάλαιο αρχίζει από καινούργια σελίδα. Με ποιά σειρά πρέπει να τοποθετήσουμε τα κεφάλαια αυτά, ώστε ο αριθμός των κεφαλαίων που αρχίζουν από περιττή σελίδα (εννοείται με την αρίθμηση των σελίδων όλου του βιβλίου) να είναι μέγιστος. Ποιός είναι ο αριθμός αυτός ;

Πρόβλημα 25

Θεωρούμε ακολουθία με $k\nu+1$ διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k\nu+1}$ $(k, \nu \in IN^*)$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή περιέχει είτε μία αύξουσα υπακολουθία με $k+1$ όρους, είτε μία φθίνουσα υπακολουθία με $\nu+1$ όρους.

Πρόβλημα 26

Να αποδείξετε ότι μία σκακιέρα 10×10 δεν είναι δυνατό να καλυφθεί από 25 σχήματα της μορφής :



(Τα τετράγωνα του σχήματος είναι ίσα με τα τετράγωνα της σκακιέρας).

Πρόβλημα 27

Στο επίπεδο δίνονται 1001 σημεία. Τρία από αυτά, έστω Α, Β, Γ, είναι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ, στο εσωτερικό του οποίου βρίσκονται τα υπόλοιπα 998. Τα 998 αυτά σημεία είναι ανά τρία μη συνευθειακά. Σε πόσα τρίγωνα διαιρούν το ΑΒΓ τα 998 σημεία ; (Τα τρίγωνα αυτά μπορούν να έχουν είτε κοινή πλευρά, είτε κοινή κορυφή, αλλά καθόλου κοινά εσωτερικά σημεία).

Πρόβλημα 28

Να βρεθούν τα ψηφία α, β, γ, x $(\alpha \neq 0)$, για τα οποία ισχύει η ακόλουθη σχέση : $\overline{\alpha\beta\gamma} + \overline{\alpha\gamma\beta} = \overline{199x}$

Πρόβλημα 29

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός : $k = 1\cdot 100 + 3\cdot 99 + 5\cdot 98 + \ldots + 199\cdot 1$ *γράφεται ως άθροισμα τετραγώνων διαδοχικών αριθμών.*

Πρόβλημα 30

Θεωρούμε κανονικό ν-γωνο και τα διαφορετικά κατά μέγεθος τμήματα που συνδέουν τις δύο κορυφές του. Αν Μ το σύνολο των τμημάτων αυτών, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των στοιχείων του Μ είναι μεγαλύτερο από το διπλάσιο εμβαδόν του ν-γωνου.

Πρόβλημα 31

Εστω ανοιχτό διάστημα I *, πλάτους* $\frac{1}{\nu}$, $\nu \in IN^*$. *Να προσδιορίσετε το μέγιστο πλήθος των ανάγωγων κλασμάτων* $\frac{\alpha}{\beta}$ *με* $1 \le \beta \le \nu$, *που περιέχονται στο* I.

Πρόβλημα 32

Θεωρούμε ακολουθία $g(\nu)$ $(\nu=1, 2, 3, \ldots)$ *η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$g(0) = 0$$

$$g(\nu) = \nu - g(g(\nu - 1)), \text{ όπου } \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Να αποδείξετε ότι :

α) $g(k) \ge g(k-1)$, *για κάθε φυσικό* $k > 0$

β) *Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι* k *ώστε* $g(k-1) = g(k) = g(k+1)$.

Πρόβλημα 33

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in IN^* - \{1\}$, *υπάρχει θετικός ακέραιος Α, τέτοιος ώστε* ν / A, $A < \nu^4$ *και το άθροισμα των ψηφίων του Α (σε δεκαδική μορφή) είναι μικρότερο του 18.*

Πρόβλημα 34

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 666 σύνθετοι φυσικοί στο σύνολο των 2006-ψήφιων αριθμών, οι οποίοι έχουν ένα μόνο ψηφίο 7 και τα υπόλοιπα ψηφία 1.

Σε αρκετά θέματα δίνεται έμφαση αρχικά στη γενική περίπτωση και κατόπιν στην ειδική. Οι κατασκευαστές αυτών των προβλημάτων συνήθως ξεκινούν από μοντέλα της πραγματικότητας και κατόπιν καταλήγουν στη γενίκευση αυτών από την οποία κατασκευάζονται νέα προβλήματα, που βασίζονται σε ήδη υπάρχουσες λύσεις. Τα ακόλουθα παραδείγματα χρησιμοποιούν με τελείως διαφορετική μορφή την αρχή άρτιος - περιττός.

Πρόβλημα 35

Γράφουμε τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, . . . , 1997 σε έναν πίνακα. Ενας μαθητής σβήνει δύο αριθμούς από αυτούς και στη θέση τους βάζει τη διαφορά τους. Ο μαθητής επαναλαμβάνει τη διαδικασία αυτή έως ότου να καταλήξει να έχει μόνο μηδενικά στον πίνακα. Να αποδείξετε ότι κάπου έκανε λάθος.

Πρόβλημα 36

Εστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ *ένα σύνολο αριθμών, όπου* $\alpha_i = \pm 1$ *και*

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + \ldots + \alpha_\nu\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0 .$$

Να αποδείξετε ότι το ν *είναι πολλαπλάσιο του 4.*

5. Προετοιμασία Ολυμπιακών Ομάδων

Η προετοιμασία Ολυμπιακών ομάδων έχει δύο διαφορετικές κατευθύνσεις: τη δημιουργία υποδομής και την τελική προετοιμασία των επιλεγμένων ομάδων, επομένως είναι φυσιολογικό να χωρίζεται σε διαφορετικές φάσεις ως προς την ποιότητα, διαβάθμιση, δυσκολία και συνδυασμό των επιλεγμένων θεμάτων κάθε φάσης.

Οι σημειώσεις που παραδίδονται στις Ολυμπιακές ομάδες οφείλουν να χωρίζονται σε τέσσερα επίπεδα :

1ο Επίπεδο : Σημειώσεις Υποδομής - Λειτουργία σε κεντρικά ζητήματα

2ο Επίπεδο : Δευτερογενή Ζητήματα

3ο Επίπεδο : Συνδυαστικά Θέματα

4ο Επίπεδο : Εξειδικευμένα Θέματα

Τα επίπεδα των σημειώσεων αυτών πρέπει να συμβαδίζουν με τη διαδικασία επιλογής των Ολυμπιακών ομάδων που ακολουθείται. Στην διάρκεια των Εθνικών Διαγωνισμών, όπου ουσιαστικά καταλήγουμε σε διψήφιο αριθμό επιλεγμένων μαθητών, οι θεματικές ενότητες των προβλημάτων πρέπει να είναι πολύ κοντά στις σχολικές, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην κατασκευή θεμάτων μακριά από κάθε θεωρία που άπτεται της ύλης των Ολυμπιάδων.

Αντίθετα στη δεύτερη φάση επιλογής, η οποία συνήθως διενεργείται με πληθώρα εσωτερικών διαγωνισμών, προφορικές εξετάσεις και συμμετοχή σε ασθενέστερους Διεθνείς διαγωνισμούς, η ύλη προετοιμασίας πρέπει να καθορισθεί πλήρως μέσα στα πλαίσια της ύλης των Ολυμπιάδων. Η έμφαση στη διάρκεια της προετοιμασίας στη δεύτερη αυτή φάση πρέπει να δοθεί στην άνοδο του επιπέδου των ταλαντούχων, αλλά "ακατέργαστων" μαθητών. Η θεωρία πρέπει να δώσει τη θέση της σε δευτερογενή θέματα πάντα στον ίδιο γνωστικό τομέα και κατόπιν μετά την επί μέρους ολοκλήρωση της κάθε μίας ενότητας, οι υπεύθυνοι προετοιμασίας πρέπει να εισάγουν τους μαθητές σε συνδυαστικά θέματα από δύο ή και περισσότερες ενότητες.

Στην τελική φάση προετοιμασίας, πριν από τη ΒΜΟ ή ΔΜΟ, οι μαθητές πρέπει να κατευθυνθούν προς τα πλαίσια της Παγκόσμιας θεματογραφίας, με την ευθύνη των προπονητών της Ολυμπιακής ομάδας για τη μελέτη και ανάλυση των ετήσιων μαθηματικών διαγωνισμών που διενεργούνται.

Πριν από όλες αυτές τις ενέργειες, η βασικότερη ίσως προϋπόθεση είναι η καλλιέργεια ενός φυτωρίου μαθηματικών ταλέντων, το οποίο δημιουργείται μόνο με οργανωμένες σημειώσεις, προγραμματισμένες διαλέξεις και δραστηριοποίηση κάθε σχολικής μονάδας προς την κατεύθυνση αυτή.

6. Συμπεράσματα

Τα θέματα των διαγωνισμών ασκούν μεγάλη επιρροή στους μαθητές, ιδιαίτερα εφ' όσον είναι έως κάποιο βαθμό ελκυστικά και αντιστοιχούν σε πραγματικά προβλήματα. Η ανάπτυξη και διάδοση των μαθηματικών Ολυμπιάδων εξαρτάται άμεσα, από την προσεκτική και υπεύθυνη επιλογή των προτεινόμενων θεμάτων. Υπάρχουν δύο δυνατές επιλογές σχετικά με τη διαδικασία κατασκευής νέων Ολυμπιακών προβλημάτων. Ο πρώτος είναι η μελέτη και ανάλυση παρελθόντων θεμάτων, ενώ ο δεύτερος αφορά στο ρόλο που θέλουμε να διαδραματίσει η επίλυση ενός συγκεκριμμένου προβλήματος στα πλαίσια της Ολυμπιάδας.

Οι στρατηγικές επίλυσης των προβλημάτων αποτελούν μία σημαντική διαδικασία, η οποία εντάσσεται στα θέματα του διαγωνισμού με διαφορετικά και ελεγχόμενα επίπεδα δυσκολίας. Η διατύπωση και κατασκευή των προβλημάτων συχνά είναι στενά συνδεδεμένη και εξαρτάται από τη μέθοδο επίλυσής τους.

Τέλος, γίνεται φανερή ότι η ουσιαστική ανάλυση και μελέτη της κατασκευής, επίλυσης και επιλογής των προβλημάτων ΔΜΟ, οδηγεί στην κατάρτιση ενός αξιόλογου προγράμματος προετοιμασίας Ολυμπιακών ομάδων, με έμφαση στη συνεχή του ανανέωση και βαρύτητα στην περαιτέρω εξέλιξη των μαθηματικών ταλέντων.

Οι ανωτέρω συνιστώσες αν ληφθούν σοβαρά υπόψη και αναλυθούν θα αποτελέσουν υποθήκη για περαιτέρω εξέλιξη των ΔΜΟ.

Παράρτημα - Υποδείξεις Θεμάτων

(1) Θέμα 5, IMO 1997.

(2) Θέμα 4, BMO 1995.

(3) Αν ναι, θέτοντας $y=2pq$, θα είχαμε ότι η τριάδα (x,y,z) ικανοποιεί τη διοφαντική $x^{v}+y^{v}=z^{v}$, αδύνατο.

(4) Αφού $1998=2\cdot 999$ και κάθε στοιχείο της ακολουθίας είναι άρτιος, αρκεί να βρούμε τους δείκτες ν ώστε $\alpha_{v}\equiv 0 \pmod{999}$. Αφού $10^{3\kappa}\equiv 1 \pmod{999}$ έχουμε ότι :

$\alpha_{1}\equiv 10 \pmod{999}$

$\alpha_{2}\equiv 10+10 \pmod{999}$

$\alpha_{3}\equiv 10+10+100 \pmod{999}$

$\alpha_{4}\equiv 10+10+100+10 \pmod{999}$

$\alpha_{5}\equiv 10+10+100+10+10 \pmod{999}$

$\alpha_{6}\equiv 10+10+100+10+10+100 \pmod{999}$

$\alpha_{7}\equiv 10+10+100+10+10+100+10 \pmod{999}$

....

Οπότε καταλήγουμε ότι:

$\alpha_{3\kappa+1}\equiv 10+120\kappa \pmod{999}$

$\alpha_{3\kappa+2}\equiv 20+120\kappa \pmod{999}$

$\alpha_{3\kappa}\equiv 120\kappa \pmod{999}$

Αρα $999 \nmid \alpha_{3\kappa+1}$, $999 \nmid \alpha_{3\kappa+2}$ και $999 / \alpha_{3\kappa}$ αν και μόνο αν $333/k$, οπότε $\alpha_{v}\equiv 0 \pmod{1998} \Leftrightarrow 999/v$.

(5) Κάνοντας μία εκίτιμηση του αθροίσματος A των ψηφίων του $N=4444^{4444}$, έχουμε ότι το A είναι το πολύ 6 - ψήφιος, οπότε το άθροισμα C των ψηφίων του B είναι το πολύ 54, ενώ το μέγιστο άθροισμα των ψηφίων του C είναι το πολύ 13. Επίσης, έχουμε ότι $N\equiv A\equiv B\equiv C \bmod 9$.
Ομως $N\equiv 7 \bmod 9$, επομένως το άθροισμα των ψηφίων του B είναι 7. Οι υποθέσεις των ζητημάτων είναι λίγες, απλά ζητείται το άθροισμα των ψηφίων. Ωστόσο η επίλυση του προβλήματος απαιτεί εκτιμήσεις, αθροίσματα και διαιρετότητα mod 9.

(6) Το πρόβλημα αυτό δεν έχει συγκεκριμένη απάντηση, ο καθένας μπορεί να κατασκευάσει το δικό του μαθηματικό μοντέλο, το οποίο για να είναι ρεαλιστικό θα πρέπει να υπολογίζει π.χ. τη διαύγεια και τις μεταβολές της ή άλλες παραμέτρους, όπως ποιός είναι ο μέγιστος αριθμός ωρών μελέτης.

Ετσι μπορούν να κατασκευασθούν διαγράμματα π.χ. της διαύγειας συναρτήσει του χρόνου, ανάλογα με τις προσωπικές εμπειρίες του κάθε μαθητή.

(7) Αρκεί να καταλήξουμε στην ιδέα : $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-3} + \alpha_{\nu-4}$, για $\nu > 4$.

(8) Η απάντηση είναι αρνητική και αποδεικνύεται κατασκευάζοντας μία κυκλική λίμνη ακτίνας 701m με ένα κανάλι εισόδου και εξόδου ε m, αντιδιαμετρικά της λίμνης.

(9) Ας υποθέσουμε ότι $2 \le x < y < z < u$, όπου :

$$x / yzu+1\,,\ y / zux+1\,,\ z / uxy+1\,,\ u / xyz+1\,.$$

Πολλ/ζοντας κατά μέλη τις σχέσεις και διαιρόντας με xyzu, έχουμε ότι

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{xyzu}=A \in \mathbb{N}^*\,.$$

Αφού $x \ge 2$, $y \ge 3$, $z \ge 4$ και $u \ge 5$, προκύπτει ότι :

$$A \le \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{31}{24}\,.$$

Επομένως $A=1$, άρα $x=2$, $y=3$ και $\frac{37}{u-6}=z-6$, οπότε έχουμε τη μοναδική λύση $(2,3,7,43)$.

(10) Οχι, ας θεωρήσουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών $1(\mathrm{mod}4)$, δηλαδή

$$\mathbb{M}=\{4k+1,\ k \in \mathbb{N}\}=\{1,5,9,13,17,\ldots\}\,.$$

Το 9 είναι πρώτος, αφού στο σύνολο αυτό διαιρείται μόνο από τον εαυτό του και τη μοναδα, όπως και το 21, το 25 είναι σύνθετος, ενώ το 49 πρώτος. Τότε έχουμε ότι $9\cdot 49=441=21^2$.

Το γινόμενο δύο πρώτων $(9,49)$ είναι τέλειο τετράγωνο!! Επίσης, οι αριθμοί 9, 21, 33 και 77 είναι πρώτοι, όμως $693=9\cdot 77=21\cdot 33$.

Το 693 γράφεται κατά δύο τρόπους ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

(11) Θέμα απλό, αλλά τεχνικό.

(12) Εστω $x+y=s$, $xy=t$. Τότε η εξίσωση γίνεται :

$$s^3-3st=7(1+t) \text{ ή } t=\frac{s^3-7}{3s+7} \text{ ή } 27t=\frac{27s^3-189}{3s+7}\,.$$

Οπότε θα πρέπει $3s+7 / 532=2^2\cdot 7\cdot 19$ και οι λύσεις είναι $(-91,2833)$, $(-15,89)$, $(-7,25)$, $(-3,17)$, $(-2,15)$, $(-1,-2)$, $(0,-1)$, $(4,3)$, $(-5,3)$, $(1,-2)$, $(1,-1)$, $(3,1)$, $(4,3)$.

(13) Το υπόλοιπο της διαίρεσης κάθε τελείου τετραγώνου με το 3 είναι 1. Επομένως $5k^4 - k^2 + 4 \equiv 1(\mathrm{mod}3)$. Οπότε $k=3m$ και αφού ο k είναι πρώτος καταλήγουμε ότι $k=3$.

(14) Το υπόλοιπο της διαίρεσης κάθε τελείου τετραγώνου με το 5 είναι ± 1. Επομένως $\nu=2k$ και είναι $2^{2k} + 85 = x^2$ ή $\left(x-2^k\right)\left(x+2^k\right) = 85 = 5 \cdot 17$. Οπότε $x - 2^k = 1$ και $x + 2^k = 85$ ή $x - 2^k = 5$ και $x + 2^k = 17$. Τελικά συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ν τέτοιο ώστε το $2^\nu + 85$ είναι τέλειο τετράγωνο.

(15) Εχουμε ότι $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, οπότε

$$\frac{\alpha}{\beta^2-1} + \frac{\beta}{\gamma^2-1} + \frac{\gamma}{\alpha^2-1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{\left(\alpha^2-1\right)\left(\beta^2-1\right)\left(\gamma^2-1\right)}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}}.$$

Αφού $\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha} + \frac{\beta-1}{\beta} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\right) = \frac{1}{3}\left[\pi - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\right]$ και

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}$, έχουμε ότι :

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} \leq \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} \leq \frac{\pi}{3} - \frac{3}{\pi} = \frac{\pi^2-9}{3\pi}.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού $\alpha+\beta+\gamma=\pi \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$.

(16) Θέμα 4, ΙΜΟ1997.

(17) Θέμα 1, ΙΜΟ1997.

(18) Καταλήγουμε στους δίδυμους πρώτους.

(19) Εκμεταλλευόμαστε τεχνικά τη διαιρετότητα.

(20) Είναι $1997 \geq (2+4+...+2k)+[1+3+...+(2\lambda-1)] = 2\frac{k(k+1)}{2} + \lambda^2$.

Οπότε $\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda^2 \leq 1997 + \frac{1}{4}$. Λόγω της ανισότητας Cauchy παίρνουμε :

$$3k+4\lambda = 3\left(k+\frac{1}{2}\right) + 4\lambda - \frac{3}{2} \leq \sqrt{3^2+4^2}\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda^2} - \frac{3}{2} \leq 5\sqrt{1997+\frac{1}{4}} - \frac{3}{2} < 222$$

Επομένως $3k+4\lambda \leq 221$. Προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της διοφαντικής είναι 221 και επιτυγχάνεται για $k=31$ και $\lambda=32$.

(21) Φέρουμε $\Delta P \parallel M\Gamma$. Προφανώς $\Gamma\hat{M}\Delta = E\hat{\Delta}P = 90^\circ$ και τα τρίγωνα ΔAP, ΓBZ είναι ίσα, οπότε

$$AP = BZ \text{ και } EA \cdot BZ = EA \cdot AP = A\Delta^2 = \frac{1}{2}AB^2.$$

Ακόμα $\dfrac{\Delta\Lambda}{EB} = \dfrac{K\Gamma}{AZ} = \dfrac{\Delta\Gamma}{EZ} = \lambda$, οπότε $\Delta\Lambda^2 + K\Gamma^2 = \lambda^2\left(EB^2 + AZ^2\right)$ και

$$AB^2 = \Delta\Gamma^2 = \lambda^2 EZ^2.$$

Η πρόταση θα έχει αποδειχθεί αν δείξουμε ότι $EB^2 + AZ^2 = EZ^2$.
Ομως $EB = EA + AB$, $AZ = AB + BZ$, $EZ = EA + AB + BZ$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(EA + AB)^2 + (AB + BZ)^2 = (EA + AB + BZ)^2 \text{ ή } AB^2 = 2EA \cdot BZ,$$

η οποία ισχύει.

(22) Αν στον αριθμό που σχηματίζεται στον πίνακα το ψηφίο 1 είναι πριν το 6 (από τα αριστερά προς τα δεξιά) τότε σβήνουμε όλα τα υπόλοιπα και έχουμε το ζητούμενο (16). Ομοια συμβαίνει και όταν το 2 είναι πριν το 5, το 3 πριν το 6, το 4 πριν το 9, το 6 πριν το 4 και το 8 πριν το 1. Εστω ότι δεν ισχύει τίποτε από τα παραπάνω. Τότε το 9 τοποθετείται πριν το 4, το 4 πριν το 6 και το 6 πριν το 1. Οπότε σχηματίζεται ο αριθμός $961 = 31^2$.

(23) Αν υποθέσουμε ότι ο ν είναι σύνθετος ($\nu = k \cdot \lambda$) τότε και ο

$$A = \underbrace{111\ldots1}_{k}\underbrace{111\ldots1}_{k}\ldots\underbrace{111\ldots1}_{k} = \underbrace{111\ldots1}_{k}\,00\ldots0 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{k} =$$

$$\underbrace{111\ldots1}_{k}\left(10^{k\nu_1} + 10^{k(\nu_1-1)} + \ldots + 1\right)$$

είναι σύνθετος, άτοπο. Αρα ο ν είναι πρώτος.
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Π.χ. για $\nu = 3$ έχουμε $111 = 3 \cdot 37$ σύνθετος.

(24) 23.

(25) Εφαρμογή της Αρχής του Dirichlet.

(26) Απλή.

(27) Απλή.

(28) Εχουμε ότι $\overline{\alpha\beta\gamma} + \overline{\alpha\gamma\beta} = \overline{199x} \Rightarrow 200\alpha + 11(\beta + \gamma) = 1990 + x$, οπότε $\alpha = 9$ και $11(\beta + \gamma) = 190 + x$. Η ανωτέρω σχέση ισχύει μόνο για $x = 8$, οπότε

$$\overline{9\beta\gamma} + \overline{9\gamma\beta} = 1998 \text{ και } \beta = \gamma = 9.$$

(29)Γράφουμε τον αριθμό k στη μορφή πίνακα 100 γραμμών ως εξής :

1	3	5	...	195	197	199
1	3	5	...	195	197	
1	3	5	...	195		
⋮	⋮	⋮				
1	3	5				
1	3					
1						

Αφού $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$, έχουμε ότι : $k=100^2+99^2+98^2+\ldots+3^2+2^2+1^2$.

(30) Αρχιμήδης 1998.

(31) Διαμερίζουμε το σύνολο των κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ $(1\leq\beta\leq\nu)$ στο I σε δύο σύνολα :

$$M_1=\{\frac{k_i}{\lambda_i} \text{ με } i=1,2,\ldots,r \text{ και } 1\leq\lambda_i\leq\frac{\nu}{2}\}$$

$$M_2=\{\frac{x_i}{y_i} \text{ με } i=1,2,\ldots,s \text{ και } \frac{\nu}{2}<y_i\leq\nu\}.$$

Για κάθε λ_i υπάρχει $c_i\in Z$, ώστε $\frac{\nu}{2}\leq c_i\lambda_i\leq\nu$. Αν $y_{s+i}=c_i\lambda_i$ και $x_{i+1}=c_ik_i$, τότε $y_j=y_k$ όπου $1\leq k\leq r+s$ και $1\leq j\leq r+s$, οπότε $\left|\frac{x_j}{y_j}-\frac{x_k}{y_k}\right|\geq\frac{1}{y_j}\geq\frac{1}{\nu}$, άτοπο.

Ωστε ο αριθμός των κλασμάτων είναι το πολύ $r+s\leq\nu-\left[\frac{\nu}{2}\right]\leq\left[\frac{\nu+1}{2}\right]$.

(32)Αρχιμήδης 1998.

(33) Είναι εύκολο να βρεθεί θετικός ακέραιος k, έτσι ώστε $2^{k-1}\leq n<2^k$. Για $k<6$, το ζητούμενο ισχύει. Θεωρούμε το σύνολο :

$$IM=\{m\in IN/m \text{ περιέχει το πολύ k ψηφία από το } \{0,1\}\}.$$

Προφανώς, $|IM|=2^k>n$. Επομένως υπάρχουν $p, q\in IM$, τέτοια ώστε $p\equiv q(\text{mod}n)$, δηλαδή $n/p-q$. Αν $p<q$, τότε τα ψηφία του $(q-p)$ (στη δεκαδική του μορφή), ανήκουν στο σύνολο $\{0, 1, 8, 9\}$. Οπότε :

$$q-p\leq q\leq\sum_{i=0}^{k-1}10^i<10^k<16^{k-1}=\left(2^{k-1}\right)^4\leq n^4.$$

(34) Αφού $2006 = 6 \cdot 333 + 8$, θεωρούμε έναν αριθμό της μορφής:

$$\underbrace{111111}_{6} \cdots \underbrace{11171111}_{8} \cdots \underbrace{111111}_{6}.$$

Τότε έχουμε ότι $111111 \equiv 0 \pmod{7}$, και $11171111 \equiv 0 \pmod{7}$. Επομένως υπάρχουν 333 σύνθετοι αριθμοί της μορφής αυτής. Εδώ το 7 είναι το $(6k+4)$-ψηφίο των δοσμένων αριθμών, $k \in \mathbb{N}^*$.

Ομοια έχουμε 333 σύνθετους της μορφής : $\underbrace{111111}_{6} \cdots \underbrace{11111711}_{8} \cdots \underbrace{111111}_{6}$, αφού $111111 \equiv 0 \pmod{13}$, και $11111711 \equiv 0 \pmod{13}$. Εδώ το 7 είναι το $6n$-ψηφίο των δοσμένων αριθμών, $n \in \mathbb{N}^*$, επομένως οι 333 σύνθετοι που προκύπτουν είναι διαφορετικοί από τους προηγούμενους και αποδείχθηκε το ζητούμενο.

(35) Απλή Εφαρμογή της Αρχής Αρτιος - Περιττός.

(36) Απλή Εφαρμογή της Αρχής Αρτιος - Περιττός.

Βιβλιογραφία

[1] A. H. Schoenfeld & D. Herrmann, (1982): Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem-solvers, *Journal of Exp. Psych.* 8 (5), 484-491.

[2] A. H. Schoenfeld, (1985): Mathematical problem solving, *Orlando: Academic Press, inc.*

[3] Arthure Engel, (1984), The Creation of Mathematical Olympiad Problems, *Proceedings of ICME - 5.*

[4] F. E. Weinert & M. R. Waldmann, (1985): Das Denken Hochbegabter - Intellektuelle Fähigkeiten und kognitive Prozesse, *Zeitschr, für Pädag* . 31, nr. 6, 786-804.

[5] Hughes, S. (1992). Questionnaire response. City of London Polytechnic Mathematics Problem Solving Competiton.

[6] J. M. C. Nelissen, (1987): Kinderen leren wiskunde, (children Learning mathematics), *Gorichem: De Ruiter.*

[7] K. A. Ericsson & Simson, H. A., (1984) : Protocol Analysis: Verbal Reports as Data, *Cambridge; MIT Press.*

[8] M. S. Klamkin, (1986), Problem Proposing and Mathematical Creativity, *Crux Mathematicorum,* Vol 12, Nσ 10.

[9] N. B. Vasiliev, (1990), The Questions from the Russian Mathematical Olympiad, *Shantung Educational Publishing House.*

[10] Overtoom - Corsmit, R. et al, (1990). Information processing in intellectually highly gifted children by solving mathematical tasks. *Gifted Education International,* 6(3), 143 - 148.

[11] P. Span & Overtoom-Corsmit, R., (1986): Information Processing by Intellectually gifted pupils solving mathematical problems, *Educational Studies in Mathewmatics* 17, 273-295.

[12] R, J, Sternberg & J. E. Davidson, (Eds.) (1986): Conceptions of giftedness, *Cambridge: Cambridge University Press.*

[13] R, J, Sternberg & J. E. Davidson, (Eds.) (1986): Conceptions of intelligence, *Cambridge University Press, Cambridge.*

[14] Wang Yuan (1990), My personal view on the Mathematical Contests. *Natural Magazine,* No. 12.

[15] Zhang Junda & Wu Jianping, (1990), Practice and Knowledge of the Mathematical Olympiad, *Beijing Teachers' College Journal,* (Science Version), No. 2.