Author: Δ. Γαβαλάς

Title: Σπουδή των Δυναμικών Συστημάτων με χρήση της θεωρίας κατηγοριών και τόπων

Abstract: Παρουσίαση μιας εναλλακτικής μαθηματικής προσέγγισης, η οποία προκύπτει απο τη θεωρία Κατηγοριών και Τόπων, για τη μελέτη των δυναμικών συστημάτων.

Creator: HDML

Μαθηματική Επιθεώρηση τ. 49 – 50. Έτος 1998

ΣΠΟΥΔΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΩΝ

Δημήτρης Γαβαλάς
Μαθηματικός – Παιδαγωγικό Ινστιτούτο

0. Εισαγωγή: Η *Θεωρία Συστημάτων* και η λεγόμενη *Χαοτική Δυναμική* χρησιμοποιούν διαφορικές εξισώσεις χρόνου για τη μαθηματική μελέτη των αντίστοιχων καταστάσεων. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μια εναλλακτική μαθηματική προσέγγιση, η οποία προκύπτει από τη *Θεωρία Κατηγοριών και Τόπων*, για τη μελέτη των δυναμικών συστημάτων.

1. Εφοδιασμός Συνόλου με Ενδοαπεικόνιση: Δυναμικό Σύστημα

Θεωρούμε κατηγορία **C.** Για τα αντικείμενα **X** της **C** μπορούμε να πούμε πως είτε τα θεωρούμε, σύμφωνα με τη Θεωρία Συνόλων, ως *σύνολα*, είτε δε χρησιμοποιούμε συγκεκριμένου είδους μαθηματικά αντικείμενα, αλλά τα θεωρούμε γενικά. Το μόνο, που υποθέτουμε, είναι ότι έχουμε αντικείμενα μιας συλλογής και βέλη μεταξύ αυτών και ότι τα βέλη συντίθενται και η σύνθεση ικανοποιεί τον προσεταιριστικό και ταυτοτικό νόμο. Έτσι, όταν γράφουμε **X, Y,** κ.τ.ό. αυτά τα σημεία δηλώνουν αντικείμενα μιας κατηγορίας, που τη σημειώνουμε με **C,** και ένα βέλος $X \to Y$ δηλώνει μια απεικόνιση αυτής της κατηγορίας. Θεωρούμε τις ενδοαπεικονίσεις της κατηγορίας, δηλαδή τα βέλη που έχουν ίδιο πεδίο και συν-πεδίο. Μπορούμε, τώρα, να θεωρήσουμε μια νέα κατηγορία $\mathbf{C}_{DS}$, στην οποία ένα αντικείμενο είναι «αντικείμενο της **C** εφοδιασμένο με μια ενδοαπεικόνιση», δηλαδή ένα αντικείμενο της $\mathbf{C}_{DS}$ είναι του τύπου $<X, \varphi>$, όπου X αντικείμενο της **C** και φ ενδοαπεικόνιση αυτού του αντικειμένου. Στη συνέχεια, πρέπει να ορίσουμε τα βέλη του $\mathbf{C}_{DS}$, τη σύνθεση βελών και τις ταυτοτικές απεικονίσεις. Έχουμε, λοιπόν, τα εξής:

2. Ορισμοί:

(1) **Αντικείμενα** της C_{DS}: Είναι τα $<X, \varphi>$, όπως αυτό ορίστηκε προηγουμένως.

(2) **Βέλη** της C_{DS}: Ένα βέλος

$$<X_1, \varphi_1> \xrightarrow{f} <X_2, \varphi_2>$$

είναι απεικόνιση

$$X_1 \xrightarrow{f} X_2$$

που ικανοποιεί τη σχέση

$$f o \varphi_1 = \varphi_2 o f$$

σύμφωνα με το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1"] & X_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\ X_1 \arrow[r, "f"] & X_2 \end{tikzcd}$$

(3) **Σύνθεση βελών**: Η σύνθεση

$$<X_1, \varphi_1> \xrightarrow{f} <X_2, \varphi_2> \xrightarrow{g} <X_3, \varphi_3>$$

είναι η σύνθεση

$$X_1 \xrightarrow{gof} X_3$$

που πληροί τη σχέση στο (2), δηλαδή

$$(gof)o\varphi_1 = \varphi_3 o(gof).$$

Πράγματι, επειδή

$$f o\varphi_1 = \varphi_2 of \quad \text{και} \quad g o\varphi_2 = \varphi_3 og$$

έχουμε

$$(gof)o\varphi_1 = go(fo\varphi_1) = go(\varphi_2 of) = (go\varphi_2)of = (\varphi_3 og)of = \varphi_3 o(gof).$$

(4) Η **ταυτοτική** στο $<X, \varphi>$ είναι η ταυτοτική στο X:

$$X \xrightarrow{1_X} X.$$

Η ταυτοτική στη C_{DS} είναι πράγματι βέλος στη C_{DS}, δηλαδή για κάθε $<X, \varphi>$ στη C_{DS}, η 1_X ικανοποιεί τη σχέση

$$\varphi o 1_X = 1_X o\varphi,$$

γιατί και τα δυο μέλη ισούνται με φ.

(5) Ο **προσεταιριστικός** και **ταυτοτικός νόμος** στη C_{DS} ισχύουν, γιατί η σύνθεση στη C_{DS} ορίζεται, προφανώς, από τη σύνθεση στη C και οι νόμοι αυτοί στη C_{DS}

είναι άμεση συνέπεια των αντίστοιχων στη **C**. (Για τη σύνθεση των απεικονίσεων ισχύει πάντοτε η προσεταιριστική ιδιότητα.)

Συμπέρασμα: *Η C_{DS} είναι Κατηγορία.*

3. Σημασιολογία

Τα αντικείμενα της $\mathbf{C}_{DS}$, δηλαδή τα <Χ, φ>, είναι τα λεγόμενα *Δυναμικά Συστήματα*, με την έννοια ότι *το Χ είναι το σύνολο όλων των δυνατών διαφορετικών καταστάσεων και η ενδοαπεικόνιση φ παριστά την εξέλιξη των καταστάσεων*. Έτσι, αν το σύστημα βρίσκεται τώρα στην κατάσταση x, τότε μετά από μια (χρονική) μονάδα ή βήμα θα βρίσκεται στην κατάσταση φ(x) και μετά από δυο (χρονικές) μονάδες ή βήματα θα είναι στην κατάσταση

$$\varphi(\varphi(x))=(\varphi o \varphi)(x).$$

Ομοίως, η σχέση

$$\varphi o \varphi o \varphi = \varphi^3,$$

δείχνει την εξέλιξη μετά από τρία βήματα κ.τ.λ.

Η σχέση στο (2), πιο πάνω, εκφράζει την ιδέα ότι η f διατηρεί τη δομή, δηλαδή η f είναι τρόπος απεικόνισης της δομής $<X_1, \varphi_1>$ στη δομή $<X_2, \varphi_2>$.

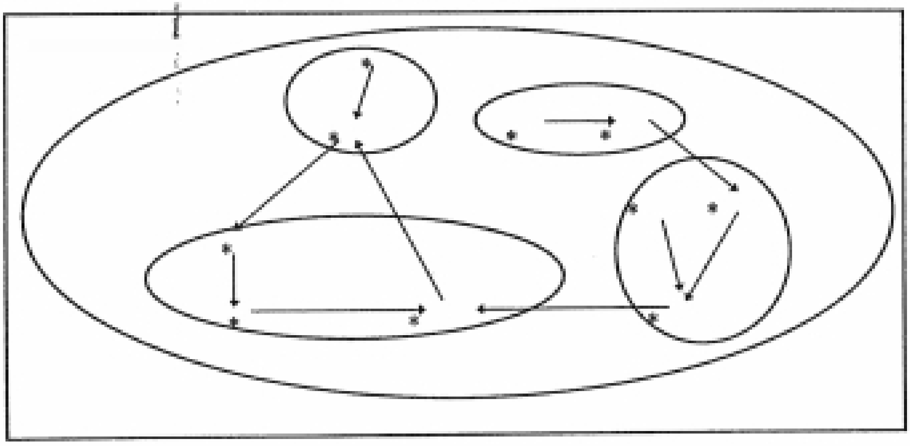
Επομένως, η $\mathbf{C}_{DS}$ είναι η *Κατηγορία των Δυναμικών Συστημάτων* <Χ, φ>. Σύμφωνα με αυτό, η $\mathbf{C}_{DS}$ είναι το *υπερσύστημα*, ως προς τα συστήματα <Χ, φ> και τα συστήματα αυτά είναι *υποσυστήματα* ως προς τη $\mathbf{C}_{DS}$. Άρα, η $\mathbf{C}_{DS}$ αποτελείται από τα επιμέρους υποσυστήματα της μορφής <Χ, φ>, εδώ όμως *δεν ισχύει σχέση*:

$$\mathbf{C}_{DS} = \bigcup_i <X_i, \varphi_i>$$

διότι κάθε σύστημα είναι ανώτερο από το άθροισμα των μερών του.

Αν $<X_1, \varphi_1>$ και $<X_2, \varphi_2>$ είναι δυο υποσυστήματα της $\mathbf{C}_{DS}$, ένα βέλος f από το πρώτο προς το δεύτερο, στέλνει μια κατάσταση x_1 του πρώτου, σε μια κατάσταση $x_2=f(x_1)$ του δεύτερου, η οποία μεταβάλλεται υπό τη δυναμική φ_2, με τον ίδιο τρόπο που μεταβάλλεται η x_1 υπό τη δυναμική φ_1.

Παρατήρηση 1: Το εσωτερικό διάγραμμα μιας ενδοαπεικόνισης έχει *ακριβώς ένα βέλος, που ξεκινάει από κάθε αντικείμενο, αλλά δεν υπάρχει καμιά ειδική συνθήκη για το πόσα βέλη φτάνουν σε κάθε αντικείμενο.* Με αυτή την έννοια, εδώ ειδικά, ο όρος ενδοαπεικόνιση δε σημαίνει ομομορφισμό εντός του ίδιου συνόλου, αλλά απλά μια εσωτερική απεικόνιση, δηλαδή πεδίο και συν-πεδίο είναι τα ίδια.



Παρατήρηση 2: Υπάρχουν πολλά παραδείγματα για κατηγορίες δομών, αλλά όλες αυτές οι δομές δημιουργούνται από σύνολα, τα οποία είναι αφηρημένα, δηλαδή δεν έχουν αρχικά δομή. Κάποιοι το ερμηνεύουν αυτό λέγοντας ότι τα *σύνολα είναι τα θεμέλια των Μαθηματικών.* Αν και ένα αφηρημένο σύνολο περιγράφεται πλήρως από ένα απλό αριθμό (πληθάριθμο), *το σύνολο έχει εγγενώς τη δυνατότητα να φέρει όλα τα είδη δομής, με τη βοήθεια των απεικονίσεων.*

Πιθανά προβλήματα: (ι) **Προσέγγισης μιας κατάστασης:** Δηλαδή, αν δοθεί μια κατάσταση x, είναι δυνατόν το δυναμικό σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση x, που σημαίνει, υπάρχει κατάσταση x΄ για την οποία: $\varphi(x')=x$.

(ιι) **Ισορροπίας**: Αν δοθεί κατάσταση x, είναι δυνατόν να φτάσει το σύστημα στην κατάσταση που δεν αλλάζει παραπέρα, δηλαδή για κάποιο ν να ισχύει: $\varphi^{\nu+1}(\chi)=\varphi^{\nu}(\chi)$.

(ιιι) Φυσικά, εκτός από την ενδοαπεικόνιση φ, υπάρχουν και άπειρες άλλες ενδοαπεικονίσεις, π.χ. α, β, γ, κ.τ.λ., δηλαδή υπάρχουν, εκτός από το <X, φ>, και τα <X, α>, <X, β>, <X, γ>, κ.τ.λ. Ποια η σχέση τους; Και, επιπλέον, ποιες ακριβώς αυτές οι ενδοαπεικονίσεις; Βάζοντας περιορισμούς στο είδος των επιτρεπόμενων ενδοαπεικονίσεων, παίρνουμε υποκατηγορίες, όπως αυτή της οποίας αντικείμενα είναι όλες οι ταυτοδύναμες ενδοαπεικονίσεις ή αυτή της οποίας αντικείμενα είναι όλοι οι αυτομορφισμοί. Επομένως, έχουμε τη γενική κατηγορία των *αυθαίρετων ενδοα-*

πεικονίσεων και των εξειδικευμένων, όπως *αυτομορφισμών, ταυτοδυναμικών, ταυτοτικών, ενελικτικών*. Όλες αυτές είναι υποκατηγορίες της αρχικής και γενικής κατηγορίας. Φυσικά, υπάρχουν πρακτικά άπειρες υποκατηγορίες, οι οποίες καθορίζονται από ειδικές συνθήκες, όπως αυτή που τα αντικείμενά της είναι όλες οι ενδοαπεικονίσεις α, που ικανοποιούν, για παράδειγμα, τη σχέση $\alpha o \alpha o \alpha = \alpha$

Παρατήρηση 3: Η κατηγορία των δυναμικών συστημάτων μπορεί να ειδωθεί και ως υποκατηγορία της κατηγορίας των γραφημάτων. Πράγματι, αν δοθεί σύνολο X εφοδιασμένο με ενδοαπεικόνιση α, $\langle X, \alpha \rangle$, μπορούμε να το θεωρήσουμε ως εξής:

$$\begin{tikzcd} X . \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "1_X"'] & X, \end{tikzcd}$$

δηλαδή ως ειδικό γράφημα, στο οποίο το πλήθος των βελών είναι το ίδιο με αυτό των τελειών και στο οποίο η αφετηρία του βέλους x είναι η τελεία x, ενώ η άφιξή του είναι η τελεία α(x). Έτσι, το εσωτερικό διάγραμμα μιας ενδοαπεικόνισης είναι ειδική περίπτωση του εσωτερικού διαγράμματος ενός γραφήματος. Συνεπώς, η κατηγορία των δυναμικών συστημάτων μπορεί να θεωρηθεί ως υποκατηγορία αυτής των γραφημάτων. Αν

$$\langle X, \alpha \rangle \xrightarrow{\;f\;} \langle Y, \beta \rangle$$

είναι βέλος στην κατηγορία των δυναμικών συστημάτων, τότε εύκολα φαίνεται ότι:

$$\boxed{\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "1_X"'] \arrow[d, shift left, "\alpha"] & Y \arrow[d, shift right, "1_Y"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}}$$

δηλαδή ικανοποιεί τις δυο σχέσεις, που απαιτούνται για ένα βέλος στην κατηγορία των γραφημάτων:

$$f1_X = 1_Y f \qquad \text{και} \qquad f\alpha = \beta f.$$

4. Γεγονότα/ Δράσεις στη C_{DS}

Ας είναι

$$BxX \xrightarrow{\alpha} X: (\beta, \chi) \longrightarrow \alpha(\beta, \chi)$$

απεικόνιση με πεδίο ορισμού ένα γινόμενο. Μια τέτοια απεικόνιση καλείται *γεγονός* ή *δράση* του B επί του X. Αυτό σχετίζεται άμεσα με τα δυναμικά συστήματα, με την έννοια ότι *κάθε δυναμικό σύστημα συνίσταται από μια δράση του χρόνου επί ενός συνόλου καταστάσεων*. Ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου, που περιγράφεται ακριβώς ως $<X, \varphi>$, δηλαδή ως η ενδοαπεικόνιση φ ενός συνόλου καταστάσεων X, μπορεί εξίσου καλά να περιγραφεί ως δράση του B=1 επί του X. Μπορούμε να θεωρήσουμε το B ως ένα σύνολο από ελέγχους, που ελέγχουν την κατάσταση του συστήματος. Αν δοθεί μια δράση

$$BxX \xrightarrow{\alpha} X$$

ένας συγκεκριμένος ειδικός έλεγχος

$$1 \xrightarrow{\beta} B$$

δίνει μια ενδοαπεικόνιση στο X, ακριβώς την α(β, -). Δηλαδή, για κάθε στοιχείο χ του X, η εικόνα του είναι η α(β, χ), ένα νέο στοιχείο του X. Η ενδοαπεικόνιση του X, που ορίζεται από την $1 \xrightarrow{\beta} B$,
μπορεί να κατανοηθεί ως η σύνθεση δυο απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{<\beta^*, 1_X>}"] \arrow[dr] & BxX \arrow[d, "\alpha"] \\ & X \end{tikzcd}$$

από τις οποίες, η πρώτη είναι η απεικόνιση του X στο γινόμενο BxX, της οποίας συνιστώσες είναι η σταθερή συνάρτηση β

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\beta^*"'] & 1 \arrow[d, "\beta"] \\ & B \end{tikzcd}$$

και η ταυτοτική του X, 1_X, ενώ η δεύτερη είναι η α.. Ενεργοποιώντας τον έλεγχο β μια φορά, η συγκεκριμένη κατάσταση χ μεταβαίνει στην κατάσταση α(β, χ). Στη συνέχεια, αν τον ενεργοποιήσουμε δυο φορές, μεταβαίνει από τη χ στην α(β, α(β, χ)) κ.τ.λ. Από την άλλη, μπορούμε να ενεργοποιήσουμε ένα διαφορετικό έλεγχο. Έτσι, *μια δράση περιλαμβάνει όχι μόνο μια ενδοαπεικόνιση, αλλά πολλές ενδοαπεικονίσεις* $\alpha(\beta_1, -)$, $\alpha(\beta_2, -)$, … μια για κάθε στοιχείο του B. Αλλά, επίσης, μπορούμε να ενεργοποιήσουμε έναν έλεγχο και μετά έναν άλλο διαφορετικό. Αν το σύστημα είναι στην κατάσταση χ και ενεργοποιήσουμε τον έλεγχο β_1 και μετά τον β_2, το αποτέλεσμα θα είναι η κατάσταση $\alpha(\beta_2, \alpha(\beta_1, \chi))$, έτσι, ώστε ο $\alpha(\beta_2, \alpha(\beta_1, -))$ είναι μια νέα ενδοαπεικόνιση του X. Στην πραγματικότητα, κάθε πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων του B δίνει μια ενδοαπεικόνιση.

5. Το Δυναμικό Σύστημα ως Συναρτητής

Ας είναι **N** μονοειδές, το οποίο έχει ένα μόνο αντικείμενο *, τα βέλη του είναι φυσικοί αριθμοί, η σύνθεση είναι η πρόσθεση, η ταυτοτική 1_* είναι το 0. Ένας συναρτητής

$$\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

σημαίνει ότι ερμηνεύουμε το * ως κάποιο σύνολο S και ότι κάθε βέλος

$$n: * \longrightarrow *$$

στο **N**, ερμηνεύεται ως ενδοαπεικόνιση του συνόλου S

$$g_n: S \longrightarrow S$$

τέτοια, ώστε

$$g_0 = 1_S \qquad \text{και} \qquad g_{n+m} = g_n o g_m.$$

Παράδειγμα: Να θεωρήσουμε ως S ένα σύνολο αριθμών και να ορίσουμε ως g_n

$$g_n(x) = n + x.$$

Το κλασικό παράδειγμα ερμηνείας ενός μονοειδούς στη **Set** είναι το εξής: Το αντικείμενο του μονοειδούς * θεωρείται ως το σύνολο βελών του μονοειδούς (φυσικοί αριθμοί) και με αυτή την έννοια, έχουμε πάντα ένα συναρτητή από το μονοειδές **N** στη **Set**. Βέβαια, υπάρχουν πολλοί συναρτητές, εκτός από τον κλασικό, από το **N** στη **Set**.

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια ενδοαπεικόνιση α, <X,

α>, και ας ερμηνεύσουμε το * ως το X και ας στείλουμε κάθε βέλος n του **N** (φυσικό αριθμό) στη σύνθεση του α με τον εαυτό του n φορές, δηλαδή

$$n \longrightarrow \alpha^n$$

και το 0 στην ταυτοτική του X, δηλαδή

$$0 \longrightarrow 1_X .$$

Με τον τρόπο αυτό έχουμε ορίσει ένα συναρτητή H από το **N** στη Set

$$H\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathrm{Set}$$

που ικανοποιεί τα εξής:
(ι) $H(*)=X$, (ιι) $H(n)=\alpha^n$, (ιιι) $H(0)= 1_X$, (ιv) $H(n+m)=H(m)\mathrm{o}H(n)$, επειδή η σύνθεση του α με τον εαυτό του είναι προσεταιριστική.

Έτσι, όταν συγκεκριμενοποιούμε ένα σύνολο εφοδιασμένο με ενδοαπεικόνιση <X, α>, παίρνουμε ως ερμηνεία ένα συναρτητή από το **N** στη Set. Αυτό σημαίνει ότι ένα άλλο όνομα και τρόπος ύπαρξης της κατηγορίας των δυναμικών συστημάτων είναι το S^N . Πράγματι, αυτή είναι η κατηγορία των δυναμικών συστημάτων *διακριτού χρόνου*. Έτσι, ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου είναι ακριβώς ένας συναρτητής από το μονοειδές **N** στην κατηγορία Set. Με ανάλογο σκεπτικό, μπορούμε να πούμε ότι δυναμικό σύστημα *συνεχούς χρόνου* προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε τους φυσικούς αριθμούς με τους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή επιτρέπουμε στο μονοειδές όλους τους πραγματικούς αριθμούς ως βέλη. Τότε, για να έχουμε ένα συναρτητή από το νέο μονοειδές **R** στη Set, πρέπει να έχουμε ένα σύνολο X με ενδοαπεικόνιση α_t, <X, α_t>, για κάθε πραγματικό αριθμό t. Φυσικά, πρέπει να βεβαιωθούμε ότι

$$\alpha_0= 1_X \quad \text{και} \quad \alpha_{s+t}=\alpha_s \mathrm{o} \alpha_t.$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε το X ως το σύνολο των καταστάσεων ενός υποσυστήματος, το οποίο, αν βρίσκεται στην κατάσταση x κάποια χρονική στιγμή, τότε t χρονικές μονάδες αργότερα θα βρίσκεται στην κατάσταση $\alpha_t(x)$.

6. Γινόμενα στην Κατηγορία των Δυναμικών Συστημάτων

Ας υποθέσουμε ότι <A, α> και <B, β> είναι δυο αντικείμενα στη $\mathbf{C}_{ΔΣ}$. Σύμφωνα με τον ορισμό, ένα γινόμενο αυτών των δυο αντικειμένων, είναι ένα τρίτο αντικείμενο <P, γ> και δυο βέλη

$$\langle A, \alpha\rangle \longleftarrow p_1 \text{ --- } \langle P, \gamma\rangle \text{ --- } p_2 \longrightarrow \langle B, \beta\rangle$$

που σημαίνει

$$p_1\gamma=\alpha p_1 \qquad \text{και} \qquad p_2\gamma=\beta p_2$$

τέτοια, ώστε για κάθε άλλο αντικείμενο $\langle T, \tau\rangle$ και βέλη

$$\langle A, \alpha\rangle \xleftarrow{\;q_1\;} \langle T, \tau\rangle \xrightarrow{\;q_2\;} \langle B, \beta\rangle$$

υπάρχει ακριβώς ένα βέλος

$$\langle T, \tau\rangle \xrightarrow{\;q\;} \langle P, \gamma\rangle$$

δηλαδή τέτοιο, ώστε

$$p_1q=q_1 \qquad \text{και} \qquad p_2q=q_2$$

$$\begin{tikzcd}
& \langle T, \tau\rangle \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, dash, "q"] \arrow[dr, "q_2"] & \\
\langle A, \alpha\rangle & \langle P, \gamma\rangle \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & \langle B, \beta\rangle
\end{tikzcd}$$

Για να βρούμε αυτό το $\langle P, \gamma\rangle$, πρέπει να συνυπολογίσουμε ότι τα στοιχεία του P αντιστοιχούν στα βέλη

$$\langle N, s\rangle \longrightarrow \langle P, \gamma\rangle$$

που μας λέει ότι είναι τα ζεύγη βελών

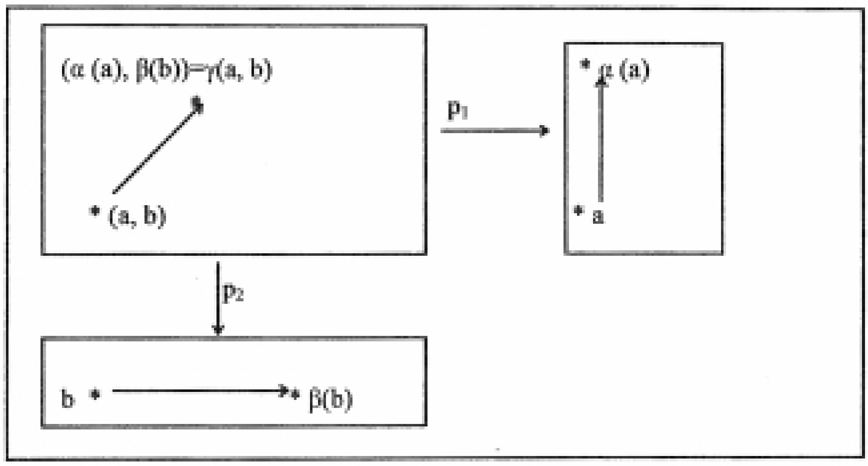
$$\langle A, \alpha\rangle \longleftarrow \langle N, s\rangle \longrightarrow \langle B, \beta\rangle$$

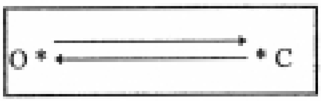
$$\begin{tikzcd}
& \langle N, s\rangle \arrow[dl] \arrow[d, dash] \arrow[dr] & \\
\langle A, \alpha\rangle & \langle P, \gamma\rangle \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & \langle B, \beta\rangle
\end{tikzcd}$$

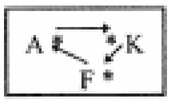
που αντιστοιχούν στα ζεύγη στοιχείων (a, b) με $a\in A$, $b\in B$. Το σύνολο P πρέπει να είναι το γινόμενο, στη Set, των A και B. Χρειάζεται, ακόμα, να ορίσουμε ποια είναι η ενδοαπεικόνιση γ του P. Για ένα ζεύγος (a, b) μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την ενδοαπεικόνιση α στο a και τη β στο b έτσι, ώστε

$$\gamma(a, b)=(\alpha(a), \beta(b)).$$

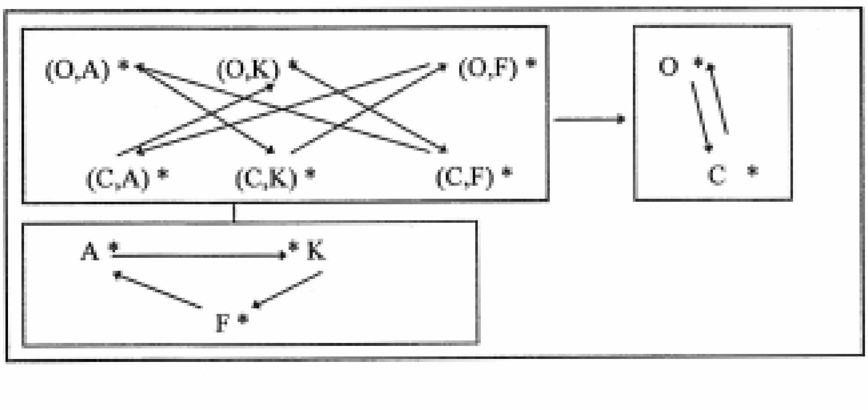
Αυτή η ενδοαπεικόνιση δουλεύει, γιατί κάνει τις γνωστές προβολές p_1, p_2 να διατηρούν τη δομή της ενδοαπεικόνισης έτσι, ώστε έχουμε όλες τις προϋποθέσεις ενός γινομένου στην κατηγορία των δυναμικών συστημάτων. Η βασική άποψη εδώ είναι ότι για κάθε ζεύγος βελών των ενδοαπεικονίσεων α και β, παίρνουμε ένα βέλος της ενδοαπεικόνισης γ του γινομένου P. Αυτό δείχνεται στο πιο κάτω σχήμα:



Παράδειγμα: Αν <Α, α>= 

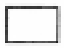
<Β, β>= 

τότε το γινόμενό τους είναι:



7. Αρχικό και Τελικό Αντικείμενο στην Κατηγορία Δυναμικών Συστημάτων

Στη $\mathbf{C}_{DS}$ *αρχικό αντικείμενο* είναι ένα κενό σύνολο:

 =A=0.

Τελικό αντικείμενο είναι σύνολο με ένα στοιχείο και ενδοαπεικόνιση, η οποία στέλνει το στοιχείο αυτό στον εαυτό του:

=T=1.

Αυτό οφείλει να ικανοποιεί τη συνθήκη ότι για κάθε <X, α> στη $\mathbf{C}_{DS}$ πρέπει να υπάρχει ακριβώς ένα βέλος

$$\langle X, \alpha\rangle \longrightarrow T,$$

πράγμα που ισχύει, αφού μόνο ένα βέλος υπάρχει από το X στο μονοσύνολο. Επίσης, πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$f\alpha=\beta f,$$

την οποία πράγματι ικανοποιεί, γιατί και οι δυο, fα και βf, είναι απεικονίσεις συνόλων από το X στο μονοσύνολο και υπάρχει μόνο μια τέτοια απεικόνιση. Δείχθηκε, λοιπόν, ότι αυτό το T είναι τελικό δυναμικό σύστημα, δηλαδή τελικό αντικείμενο στην κατηγορία $\mathbf{C}_{DS}$.

Τέλος, για ένα δυναμικό σύστημα <X, α> υπάρχουν δυο έννοιες για το σημείο αυτού του αντικειμένου:
(ι) Σημείο του *συνόλου* X: $x\in X$: $1 \longrightarrow x \rightarrow X$,
(ιι) Σημείο του *δυναμικού συστήματος* <X, α>, που σημαίνει ένα *σταθερό σημείο* **(fixed point)** του X, δηλαδή ένα x για το οποίο α(x)=x.

Στην κατηγορία $\mathbf{C}_{DS}$ ένα σημείο αντικειμένου της είναι ακριβώς ένα fixed point της ενδοαπεικόνισης, δηλαδή μια *κατάσταση ισορροπίας* (equilibrium state) του δυναμικού συστήματος. Έτσι, πολλές καταστάσεις δεν αντιστοιχούν σε κανένα βέλος της κατηγορίας, από το τελικό αντικείμενο. Επομένως, σημείο του δυναμικού συστήματος <X, α> σημαίνει fixed point ή equilibrium state.

8. Κατασκευή Εκθετικού ή Αντικειμένου-συνάρτηση στην Κατηγορία $\mathbf{C}_{DS}$

Η κατασκευή εκθετικού είναι σημαντική, τόσο για την οικοδόμηση σχέσεων μεταξύ κατηγοριών με δομημένα αντικείμενα, για παράδειγμα μεταξύ της κατηγορίας των διακριτών δυναμικών συστημάτων και της κατηγορίας Set, όσο και για να δειχτεί πιο κάτω ότι η κατηγορία αυτή είναι Τόπος.

Αν $\langle X, \alpha \rangle$ είναι διακριτό δυναμικό σύστημα και Y ένα σύνολο, τότε μια απεικόνιση

$$f: X \longrightarrow Y$$

μπορεί να θεωρηθεί ως ένα *ιδιαίτερο είδος παρατήρησης κάποιου χαρακτηριστικού ή ιδιότητας των καταστάσεων του συνόλου X, με τιμές στο Y.* Έτσι, αν σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x θα παρατηρούμε το f(x), μια (χρονική) μονάδα αργότερα ή ένα βήμα θα παρατηρούμε το f(α(x)), δυο (χρονικές) μονάδες μετά ή δυο βήματα θα παρατηρούμε το f(α(α(x))) κ.τ.λ. έτσι, ώστε το x γίνεται η απαρχή για μια ακολουθία στοιχείων του Y. Αυτό μπορεί να γίνει με μια απεικόνιση δυναμικών συστημάτων ως εξής:

Αν δοθεί ένα σύνολο Y, θεωρούμε το Y^N, δηλαδή το σύνολο συναρτήσεων, των οποίων τα σημεία αντιστοιχούν σε ακολουθίες

$$y: N \longrightarrow Y.$$

Στο Y^N μπορούμε να ορίσουμε την ενδοαπεικόνιση μετατροπής β ως εξής:

$$\beta(y(n))=y(n+1) \ \forall n \ \forall y$$

ή ακριβέστερα

$$\frac{Y^N \xrightarrow{\ \beta\ } Y^N}{N\mathrm{x}Y^N \xrightarrow{\ \beta^*\ } Y}$$

όπου

$$\begin{tikzcd}
N\mathrm{x}Y^N \arrow[r, "\beta^*"] \arrow[dr, "s\mathrm{x}1_{Y^N}"'] & Y \\
& N\mathrm{x}Y^N \arrow[u, "e"']
\end{tikzcd}$$

με

$$s: N \longrightarrow N: s(n)=n+1.$$

Έτσι, το σύνολο Y^N των ακολουθιών στο Y είναι δυναμικό σύστημα, όταν εφοδιάζεται με την ενδοαπεικόνιση μετατροπής.

Αν αναφερθούμε σε ένα δοσμένο, παρατηρήσιμο, αυθαίρετο δυναμικό σύστημα <X, α>, με δοσμένη

$$f: X \longrightarrow Y,$$

τότε μπορούμε να ορίσουμε την

$$\bar{f}: X \longrightarrow Y^N: \bar{f}(x)(n)=f(a^n x)$$

δηλαδή η $\bar{f}$ απονέμει σε κάθε κατάσταση x την ακολουθία όλων των f-παρατηρήσεων του μέλλοντος, το οποίο φυσικά προκύπτει από τη δυναμική α του X.

Ένας λόγος για την εισαγωγή της απεικόνισης $\bar{f}$ είναι ότι επιτρέπει την απλή έκφραση κάποιων σημαντικών ιδιοτήτων, τις οποίες μπορεί να έχουν τα X και f, όπως φαίνεται στους πιο κάτω ορισμούς:

Ορισμός 1: Μια παρατηρήσιμη κατάσταση/ διαδικασία

$$f: X \longrightarrow Y$$

σε δοσμένο δυναμικό σύστημα <X, α> καλείται *χαοτική*, αν η επαγόμενη απεικόνιση

$$\bar{f}: \langle X, \alpha\rangle \longrightarrow \langle Y^N, \beta\rangle$$

είναι *σημειακά-επί* για τις καταστάσεις x, δηλαδή αν για κάθε δυνατή ακολουθία

$$y: N \longrightarrow Y$$

μελλοντικών παρατηρήσεων, υπάρχει τουλάχιστον μια κατάσταση x του X, για την οποία ισχύει

$$\bar{f}(x)=y.$$

Ερμηνεία: Μια ερμηνεία της χαοτικής φύσης της f είναι ότι, αν και το <X, α> καθαυτό είναι πλήρως ντετερμινιστικό, αυτή παρατηρεί ελάχιστα τις καταστάσεις έτσι, ώστε τίποτα δεν μπορεί να ειπωθεί για τις δυνατές ακολουθίες παρατηρήσεων. Η λύση γι' αυτό, είναι να μπορεί να παρατηρεί περισσότερο, δηλαδή να φτιάξουμε την

$$f^*: X \longrightarrow Y^*.$$

από την οποία μπορούμε να ξαναπάρουμε την f ως σύνθεση με κατάλληλη απεικόνιση $Y^* \longrightarrow Y$, για

την οποία η αντίστοιχη $\bar{f}^*$ δε θα είναι σημειακά-επί.

Ορισμός 2: Μια παρατηρήσιμη κατάσταση/ διαδικασία

$$f: X \longrightarrow Y$$

σε δοσμένο δυναμικό σύστημα $\langle X, \alpha \rangle$ καλείται *αποδεκτή έννοια για τον υποκείμενο σχηματισμό του*, αν η

$$\bar{f}: \langle X, \alpha \rangle \longrightarrow \langle Y^N, \beta \rangle$$

είναι *1-1 (και εντός)*, δηλαδή για καταστάσεις x_1, x_2, αν οι ακολουθίες, που προκύπτουν για τους μελλοντικούς σχηματισμούς, είναι ίσες

$$\bar{f}(x_1)=\bar{f}(x_2)$$

τότε ισχύει και $x_1=x_2$.

Παρατήρηση 1: Η επαγόμενη συνάρτηση $\bar{f}$ μπορεί να είναι συχνά 1-1 (και εντός), ενώ δεν είναι η f.

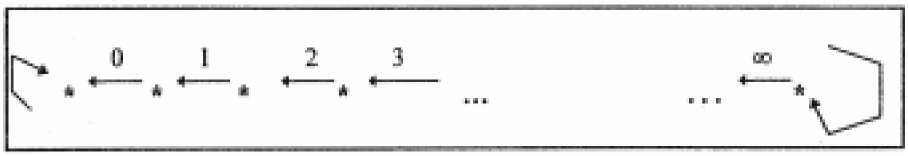
Παρατήρηση 2: Ο υποκείμενος σχηματισμός συνδέεται άμεσα με το χώρο φάσεων του συστήματος.

Παρατήρηση 3: Ο όρος «κατάσταση» στην πράξη, σημαίνει συχνά «κατάσταση της κίνησης». Η κατάσταση της κίνησης, συνήθως περιλαμβάνει περισσότερα από την απλή κατάσταση ή υποκείμενο σχηματισμό ή χώρο φάσεων, αλλά για τα καθαρά μηχανικά συστήματα, χρειάζεται επιπλέον καθορισμό από έννοιες όπως «στιγμιαία», οι οποίες ορίζονται από τη μεταβολή του σχηματισμού.

Παράδειγμα: Στα συνήθη παραδείγματα της Φυσικής, το σύνολο Y είναι αντικείμενο-συνάρτηση S^B, όπου S ο τρισδιάστατος χώρος της Φυσικής και B το σύνολο των μερών του σώματος. Τότε, τα σημεία του $Y=S^B$ αντιστοιχούν στις θέσεις του σώματος στο χώρο: $B \longrightarrow S$.

9. Το Αντικείμενο Αληθοτιμών ή Ταξινομητής Υποαντικειμένων στην Κατηγορία C_{DS}

Η κατηγορία των δυναμικών συστημάτων έχει ένα Αντικείμενο Αληθοτιμών ή Ταξινομητή Υποαντικειμένων Ω, που περιλαμβάνει άπειρο πλήθος στοιχείων ή αληθοτιμών. Συγκρινόμενο με το αντικείμενο των φυσικών αριθμών, εφοδιασμένο με τη γνωστή συνάρτηση «του επόμενου» s, μάλλον είναι αντίθετο προς αυτό, με την έννοια ότι η δυναμική του πηγαίνει κατά την αντίθετη κατεύθυνση. Αυτό το Αντικείμενο Αληθοτιμών στην κατηγορία των δυναμικών συστημάτων, έχει την ακόλουθη εικόνα:



Η εξήγηση αυτού του γεγονότος είναι ότι ένα υποσύστημα είναι μέρος ενός δυναμικού συστήματος, το οποίο είναι κλειστό υπό τη δυναμική, για παράδειγμα, φ, και αν εξετάσουμε μια συγκεκριμένη κατάσταση x και αναρωτηθούμε αν η x περικλείεται στο υποσύστημα, τότε η απάντηση μπορεί να είναι «τώρα όχι, αλλά θα περικλείεται σε ένα βήμα ή δυο βήματα κ.τ.λ.».

Παράδειγμα: Αν ρωτήσουμε για το 'αν κάποιος δικαιούται να ψηφίζει', η πλήρης απάντηση μπορεί να είναι «τώρα όχι, αλλά θα δικαιούται σε δυο χρόνια» ή ακόμα «όχι και ούτε πρόκειται ποτέ να ψηφίσει, γιατί είναι καταδικασμένος σε ισόβια στέρηση των πολιτικών του δικαιωμάτων». Στην περίπτωση αυτή, η αληθοτιμή είναι το ∞, που ερμηνεύεται ως το *εντελώς όχι* ή *λάθος* ή *ψευδές*. Η αληθοτιμή *εντελώς ναι* ή *σωστό* ή *αληθές* παριστάνεται εδώ με το 0. Είναι ευνόητο ότι όλες οι ενδιάμεσες τιμές παριστάνουν βαθμούς αλήθειας ή ψεύδους.

Παρατήρηση: Υπάρχει το ερώτημα για το τι συμβαίνει στην περίπτωση, που ένα στοιχείο αφήνει/ εξέρχεται από το υποσύστημα. Μιλάμε εδώ για δυναμικά υποσυστήματα, δηλαδή απεικονίσεις εγκλεισμού, των οποίων τα πεδία είναι επίσης αντικείμενα στην κατηγορία των δυναμικών συστημάτων. Έτσι, τα στοιχεία ποτέ δεν εγκαταλείπουν τα υποσυστήματα. Αντίθετα, το ενδιαφέρον χαρακτηριστικό είναι ότι μπορεί να εισέρχονται στα υποσυστήματα από το υπερσύστημα. Μπορούμε, φυσικά, να θεωρήσουμε υποσύνολα του υποκείμενου συνόλου καταστάσεων ενός δοσμένου δυναμικού συστήματος. Στην πραγματικότητα, υπάρχει ένα ευρύτερο δυναμικό σύστημα Ω*, το οποίο μπορούμε να ονομάσουμε «χώρο των χαοτικών αληθοτιμών», με την ιδιότητα ότι απεικονίσεις

$$\varphi\colon X \longrightarrow \Omega^*$$

των δυναμικών συστημάτων, αντιστοιχούν σε αυτά τα αυθαίρετα υποσύνολα του X. Μόνο αυτές οι φ, που ανήκουν στον εγκλεισμό

$$\Omega \longrightarrow \Omega^*$$

αντιστοιχούν σε πραγματικά, δηλαδή ενεργά, υποσυστήματα. Υπάρχουν γνωστοί τυπικοί τελεστές

$$\Omega^* \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \Omega$$

οι οποίοι σχετίζουν κάθε υποσύνολο A του κάθε X, αφενός με το μικρότερο υποσύστημα του X, το οποίο περιλαμβάνει το A και, αφετέρου με το ευρύτερο υποσύστημα, το οποίο περιλαμβάνεται στο A.

10. Η κατηγορία C_{DS} ως Τόπος

Όπως είδαμε αναλυτικά στα προηγούμενα, η C_{DS} είναι Καρτεσιανή Κλειστή Κατηγορία, δηλαδή έχει 0 και 1, γινόμενα, αντικείμενα-συνάρτηση και, επιπλέον, έχει αντικείμενο αληθοτιμών. Επομένως, είναι Τόπος. Η λογική σε ένα Τόπο χαρακτηρίζεται ως μη-Μπουλιανή, με την έννοια ότι ο Boole διαπραγματεύτηκε την ειδική περίπτωση, κατά την οποία

$$\text{όχι-όχι-A=A.}$$

Εντούτοις, ο κανόνας ότι

$$\text{όχι-όχι-όχι-A=όχι-A}$$

ισχύει σε κάθε Τόπο. Επίσης, η κατηγορία όλων των ταυτοδύναμων (idempotent) ενδοαπεικονίσεων συνόλων S^e, είναι υποκατηγορία της κατηγορίας των δυναμικών συστημάτων, αφού σημαίνει περιορισμό και εξειδίκευση της εφαρμοζόμενης ενδοαπεικόνισης.

11. Πρόταση: Δυναμική Fibonacci

Αποδεικνύουμε τώρα την εξής πρόταση: *Δυναμική Fibonacci.*

(ι) Η απεικόνιση

$$F\colon X \longrightarrow Y^{\mathbb{N}}\colon F(x)(n)=f(\alpha^n(x))$$

είναι βέλος στην κατηγορία των δυναμικών συστημάτων και το μόνο το οποίο ι-κανοποιεί τη σχέση

$$F(x)(0)=f(x) \quad \forall x.$$

(ιι) Αν είναι

$$AxA \xrightarrow{+} A \qquad \text{και} \qquad X=AxA,$$

η δυναμική Fibonacci α στο X ορίζεται ως εξής:

$$\alpha\,(a, b)=\langle b, a+b\rangle.$$

Ας είναι, επιπλέον,

$$Y=A \qquad \text{και} \qquad f(a, b)=a.$$

Τότε, η $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι αποδεκτή έννοια για τον υποκείμενο σχηματισμό της δυναμικής Fibonacci.

Απόδειξη:

(ι) (α) Αν $F\colon \langle X, \alpha\rangle \longrightarrow \langle Y^N, \beta\rangle$, η F ορίζεται ως $F\colon X \longrightarrow Y^N$.

Σύμφωνα με αυτό έχουμε:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y^N \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "F"] & Y^N \end{tikzcd}$$

δηλαδή

$$F\alpha=\beta F$$

συνθήκη που ικανοποιούν τα βέλη της κατηγορίας δυναμικών συστημάτων. Άρα, το F είναι βέλος σε αυτή την κατηγορία.

(β) Είναι $F(x)(n)=f(\alpha^n(x))$

για $n=0$: $F(x)(0)=f(\alpha^0(x))=f(x)$.

Ας είναι και άλλη συνάρτηση G τέτοια, ώστε $G(x)(0)=f(x)$. Θα δείξουμε ότι $G=F$.

Για όλα τα x είναι $F(x)(0)=f(x)$ και $G(x)(0)=f(x)$, άρα $F(x)(0)= G(x)(0)$, συνεπώς $F(x)\ )= G(x)$ και $F= G$.

(α) Είναι $(F(a, b)(n)=f(\alpha^n(a, b))$.
Υπολογισμός του $\alpha^n(a, b)$:

$\alpha(a, b)=<b, a+b>$
$\alpha^2(a, b)=<a+b, a+2b>$
$\alpha^3(a, b)=<a+2b, 2a+3b>$
$\alpha^4(a, b)=<2a+3b, 3a+5b>$
.
.
.
$\alpha^n(a, b)=<(n-2)a+(n-1)b, (n-1)a+(n+1)b>$.

Υπολογισμός του $f(\alpha^n(a, b))$:

$f(\alpha^n(a, b))=f(<(n-2)a+(n-1)b, (n-1)a+(n+1)b>)=(n-2)a+(n-1)b$.

Άρα $F(a, b)(n)= (n-2)a+(n-1)b$.

Αν είναι $F(a_1, b_1)(n)=F(a_2, b_2)(n)$, θα δείξουμε ότι $(a_1, b_1)=(a_2, b_2)$.

$(n-2)a_1+(n-1)b_1=(n-2)a_2+(n-1)b_2$

$(n-2)(a_1-a_2)= (n-1)(b_2-b_1)$
$a_1-a_2=(n-1)/(n-2)\ (b_2-b_1)$ (1).

Ισχύει επίσης $F(a, b)(0)=f(a, b)=a$

$-2a-b=a$

$a= -1/3\ b$ (2).

Από (1) και (2) συνεπάγεται:

$-1/3\ b_1+1/3\ b_2 = (n-1)/(n-2)\ (b_2-b_1)$

$1/3\ (b_2-b_1) = (n-1)/(n-2)\ (b_2-b_1)$

$[1/3 - (n-1)/(n-2)]\ (b_2-b_1)=0$

$[1-2n/3(n-2)]\ (b_2-b_1)=0$

αν $[1-2n/3(n-2)]=0$, τότε $n=1/2$, άτοπο γιατί n φυσικός

άρα $b_2-b_1=0$, δηλαδή $b_1=b_2$

οπότε, από την (1) και $a_1=a_2$.

Επομένως, $(a_1, b_1)=(a_2, b_2)$

και η F είναι 1-1, δηλαδή αποδεκτή έννοια για τον υποκείμενο σχηματισμό της δυναμικής Fibonacci.

12. Συμπέρασμα

Οι δυο θεμελιακές μαθηματικές έννοιες, αυτές του συνόλου και της απεικόνισης, είναι δυνατόν με κατάλληλη χρήση να εκφράσουν με μαθηματικό τρόπο σύγχρονες απόψεις, όπως αυτές των δυναμικών συστημάτων και της χαοτικής δυναμικής. Ο εφοδιασμός ενός συνόλου καταστάσεων με ενδοαπεικόνιση το μετατρέπει σε κατηγορία, αυτή των δυναμικών συστημάτων. Στη συνέχεια δείχνεται ότι η κατηγορία αυτή είναι τόπος. Τέλος, αποδεικνύεται μια πρόταση για τη γνωστή δυναμική Fibonacci.

Βιβλιογραφία

[1] Bell, J. L. (1981). Category Theory and the Foundations of Mathematics. *British Journal for the Philosophy of Science, 32, 349-358.*

[2] Bell, J. L. (1988). *Toposes and Local Set Theories - An Introduction*. Oxford: Clarendon Press.

[3] Drossos, C. A. (1994). *Categorical Foundations of Mathematics (Notes)*. Patras: Patras Univ. Press. (In Greek).

[4] Lawvere, F. W. (1987). *Algebraic Concepts in the Foundations of Physics and Engineering*. A Course Taught at the University of Buffalo.

[5] Lawvere, F. W. (1994). Tools for the Advancement of Objective Logic: Closed Categories and Toposes. In Macnamara, J. & Reyes, G. E.(Eds.): *The Logical Foundations of Cognition* (pp. 43-56). Oxford: Oxford Univ. Press.

[6] Lawvere, F. W. & Schanuel, S. H. (1993). *Conceptual Mathematics - A First Introduction to Categories*. Buffalo, NY: Buffalo Workshop Press.

[7] Mac Lane, S. (1971). *Categories for the Working Mathematician*. NY: Springer - Verlang.

[8] Mac Lane, S. (1986). *Mathematics, Form and Function*. NY: Springer-Verlang.

[9] Mac Lane, S. (1996). The Development and Prospects for Category Theory. *Applied Categorical Structures*, **4**, 129-136.

[10] Mac Lane, S. & Moerdijk, L.(1992). *Sheaves in Geometry and Logic - A First Introduction to Topos Theory.* NY: Springer - Verlang.

[11] McLarty, C. (1992). *Elementary Categories, Elementary Toposes.* Oxford: Clarendon Press.