Author: Θανάσης Σκούρας

Title: Μετά από τους ρητούς... οι άρρητοι. Μια εναλλακτική πρόταση εισαγωγής των άρρήτων στο Γυμνάσιο.

Abstract: Αναφορά στα αποτελέσματα που προέκυψαν απο την μελέτη περίπτωσης, η οποία έγινε με την μέθοδο της κλινικής συνέντευξης,και που είχε ως στόχο την εξέταση της δυνατότητας γραφής ενός περιοδικού δεκαδικού σε κλασματική μορφή και μέσα απο αυτή την μορφή, τη διερεύνηση της δυνατότητας εξαγωγής ενός γενικότερου συμπεράσματος που αφορά τον τρόπο εισαγωγής των αρρήτων αριθμών κατα τρόπο διαφορετικό από το συνηθισμένο.

Creator: HDML

Μαθηματική Επιθεώρηση τ. 49 - 50. Έτος 1998

"Μετά τους ρητούς ... οι άρρητοι. Μια εναλλακτική πρόταση εισαγωγής των αρρήτων στο Γυμνάσιο.''

Θανάσης Σ. Σκούρας

Περίληψη. Στο άρθρο αυτό αναφερόμαστε στα αποτελέσματα που προέκυψαν από μια μελέτη περίπτωσης, η οποία έγινε με τη μέθοδο της κλινικής συνέντευξης, και που είχε ως στόχο την εξέταση της δυνατότητας γραφής ενός περιοδικού δεκαδικού σε κλασματική μορφή και, μέσα από αυτή τη γραφή, τη διερεύνηση της δυνατότητας εξαγωγής ενός γενικότερου συμπεράσματος που αφορά στον τρόπο εισαγωγής των αρρήτων αριθμών , κατά τρόπο διαφορετικό από τον συνηθισμένο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Διδακτική των Μαθηματικών στην επιδίωξή της να ερμηνεύσει τα φαινόμενα που μελετά αλλά και να δράσει πάνω σε αυτά με στόχο τη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών, επηρεάζεται από διάφορες ''περιοχές'' επιστημονικής δραστηριότητας όπως π.χ. ψυχολογία, κοινωνιολογία, επιστημολογία κ.λ.π. Η βιβλιογραφία δείχνει ότι υπάρχουν ιστορικοί των Μαθηματικών ιδιαιτέρως ευαίσθητοι σε παιδαγωγικά προβλήματα οι οποίοι, όχι μόνο βρίσκουν και ερμηνεύουν τις (ιστορικές) πηγές, αλλά επιλέγουν και συζητούν ειδικές καταστάσεις κατάλληλες για διδακτική μεταφορά (Furinghetti, F. ,1997,p.55).

Όμως η διδασκαλία των Μαθηματικών – που είναι μια δύσκολη υπόθεση – δεν καθίσταται **αναγκαία** ευκολότερη και αποδοτικότερη με τη χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών στις σχολικές τάξεις. Θα πρέπει να επινοηθούν οι τρόποι εκείνοι, με τους οποίους η χρήση της ιστορίας θα κάνει ευκολότερη αλλά και προσιτή τη μάθηση για το μαθητή. Σήμερα είναι πλέον καθαρό, ότι για να έχει επιτυχία αυτή η χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη, θα πρέπει να έχει κατανοηθεί το πώς μαθαίνουν οι μαθητές τις μαθηματικές έννοιες (Katz, V., 1997,p.55). Τα τελευταία χρόνια η ιστορία των Μαθηματικών συγκεντρώνει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών από τον χώρο της ''ψυχολογίας της μαθηματικής εκπαίδευσης'' (P.M.E.). Το ενδεχόμενο δε ενός ''παραλληλισμού'' μεταξύ της ιστορικής εξέλιξης μιας έννοιας και της διδακτικής της μεταφοράς στη σχολική τάξη, απασχολεί τους ερευνητές της Διδακτικής Μαθηματικών.(Θωμαΐδης, Γ. ,1997,σελ.3). Διατυπώνονται διάφορα ερωτήματα όπως:

α) Οι γνώσεις εμπόδια της ιστορίας των Μαθηματικών ενδέχεται να αναπαράγονται στην πνευματική πορεία του μαθητή;

β) είναι δυνατόν --και αν πρέπει--να αναπαράγονται στη σχολική τάξη οι συνθήκες (ιστορικές) υπέρβασης αυτών των εμποδίων;

γ) Κάτω από ποιές διδακτικές συνθήκες η δραστηριότητα του μαθητή μπορεί να προσομοιάζει με τη δραστηριότητα του μαθηματικού ερευνητή;

Με την παρούσα εργασία επιχειρούμε να συμβάλουμε σε αυτόν τον προβληματισμό. Συγκεκριμένα μέσα από μια ''μελέτη περίπτωσης'' (Cohen,L. and Manion,L., p.152), διερευνούμε την εισαγωγή των αρρήτων αριθμών ''ενωρίτερα'' από αυτό που συμβαίνει στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου, αφού σε αυτή την τάξη εισάγεται η έννοια του αρρήτου και είναι η πρώτη επαφή του μαθητή με αυτούς τους αριθμούς.

Ρητοί και Άρρητοι

Το μέγεθος ενός **μη συνεχούς ποσού** [1] μπορούμε να το εκφράσουμε με τη βοήθεια κάποιου ακεραίου αριθμού. Όμως οι ακέραιοι αριθμοί μόνοι τους δεν επαρκούν πάντοτε για να αποδώσουν το μέγεθος ενός **συνεχούς ποσού**, δηλαδή ενός ποσού τα στοιχεία του οποίου δεν είναι διακεκριμένα μεταξύ τους, όπως το βάρος ενός σώματος, το μήκος μιας απόστασης κ.λ.π. Για τη μέτρηση τέτοιων ποσών χρειάζεται και κάποια μονάδα μέτρησης ,δηλαδή είναι απαραίτητη η σύγκρισή τους με κάποια άλλα **ομοειδή** ποσά , τα οποία έχουν καθορισθεί εκ των προτέρων ως μονάδες. Ωστόσο η σύγκριση συνεχών ποσών με τις δεδομένες μονάδες τους δεν μπορεί να αποδοθεί πάντοτε με ακέραιους αριθμούς. Την ανεπάρκεια αυτή των ακέραιων αριθμών τη διαπίστωσε ο άνθρωπος από τους αρχαίους χρόνους. Διαπίστωσε δηλαδή ότι μετρώντας μια ποσότητα με κάποια ωρισμένη μονάδα ήταν δυνατόν να επαναλάβει τη μονάδα ν φορές (ν ακέραιος αριθμός) , αλλά στο τέλος αυτής της επανάληψης να περισσέψει ένα μέρος από την ποσότητα, που ήταν μικρότερο από τη μονάδα. Οι , τέτοιας φύσης, ανάγκες της καθημερινής ζωής ώθησαν τον άνθρωπο να σκεφθεί και να επινοήσει νέους αριθμούς για αυτές τις μετρήσεις. Οι νέοι αυτοί αριθμοί ονομάστηκαν **κλασματικοί αριθμοί.** Οι κλασματικοί αριθμοί ήταν η πρώτη επέκταση των φυσικών αριθμών και χρησι-

[1] Ένα ποσό λέγεται μη συνεχές όταν τα στοιχεία του είναι διακεκριμένα μεταξύ τους, όπως για παράδειγμα το σύνολο των κατοίκων ενός χωριού ή το σύνολο των δένδρων ενός δάσους.

μοποιήθηκαν αρχικά για να παραστήσουν μέρη αντικειμένων και μέρη μονάδων μέτρησης . Σήμερα όταν λέμε κλασματικό αριθμό, εννοούμε κάθε αριθμό της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$, με α, β ακεραίους και $\beta \neq 0$ (Εξαρχάκος, Θ., 1991, σελ. 403). Οι έννοιες ''κλασματικός αριθμός '' και ''ρητός αριθμός '' είναι έννοιες διαφορετικές μεταξύ τους αφού ο ρητός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι το σύνολο όλων των κλασματικών αριθμών οι οποίοι είναι ισοδύναμοι με το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$. Για παράδειγμα ο ρητός $\frac{1}{2}$ είναι το σύνολο : $\{ \frac{\alpha}{2\alpha} / \alpha \in Z, \alpha \neq 0\}$. Πρόκειται δηλαδή για μια κλάση ισοδυναμίας ισοδύναμων μεταξύ τους κλασμάτων. Η έννοια του ρητού αριθμού είναι πολύ στενά συνδεδεμένη με την έννοια του δεκαδικού αριθμού και του δεκαδικού κλάσματος. Γενικά ισχύει ότι: κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί σε μορφή δεκαδικού περιοδικού αριθμού, και ότι κάθε δεκαδικός περιοδικός αριθμός μπορεί να γραφεί σε μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha, \beta \in Z$, $\beta \neq 0$.

Ιστορικά την ανακάλυψη ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός ο οποίος να αντιστοιχεί σε σημείο Κ του άξονα χ΄Ο χ όταν το ΟΚ είναι το μήκος της διαγωνίου τετραγώνου πλευράς μήκους 1, δηλαδή ΟΚ= $\sqrt{2}$, έκαναν οι Πυθαγόρειοι (ο.π. σελ. 447). Η ανακάλυψη των άρρητων αριθμών προκάλεσε σύγχυση και αμηχανία στους Πυθαγορείους, αφού ανέτρεπε τη βασική τους φιλοσοφία, σύμφωνα με την οποία τα πάντα εξαρτώνται από τους ακέραιους αριθμούς και κατά συνέπεια ο κόσμος θα πρέπει να δομείται κατά τρόπο ρητό. Η διάψευση της πυθαγόρειας πίστης για ρητή (σύμμετρη) δομή του κόσμου --εκτός του ότι ήταν καταστροφική για τους ίδιους τους Πυθαγορείους--προκάλεσε την πρώτη μεγάλη κρίση στα θεμέλια των Μαθηματικών , η οποία δεν ξεπεράστηκε γρήγορα.

Ας δούμε τώρα πώς – και πότε – εισάγονται οι άρρητοι αριθμοί στο σχολικό βιβλίο της Β΄ γυμνασίου. Αφού έχει προηγηθεί η δεκαδική μορφή των ρητών αριθμών, και η γραφή ενός περιοδικού δεκαδικού αριθμού ως ρητού με κλασματική μορφή, οι άρρητοι εισάγονται μετά το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Πιο συγκεκριμένα: με διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις του μήκους της διαγωνίου τετραγώνου πλευράς 1, δηλαδή του αριθμού $\sqrt{2}$, διαπιστώνεται η αδυναμία εύρεσης δεκαδικού αριθμού που να είναι ακριβώς ίσος με $\sqrt{2}$. Παραπέμπεται δε σε μεγαλύτερη τάξη, η απόδειξη ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός που να είναι ίσος με $\sqrt{2}$(σελ. 109). Στην ίδια σελίδα επίσης αναφέρεται : '' Γενικότερα η τετραγωνική ρίζα κάθε φυσικού αριθμού ο οποίος δεν είναι τετράγωνο φυσικού ,είναι άρρητος αριθμός. Έτσι π.χ. οι $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, κλπ. είναι άρρητοι αριθμοί. **Αλλά οι άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο τετραγωνικές ρίζες. Όπως θα μάθουμε αργότερα, υπάρχουν και πολλοί άρρητοι που δεν είναι τετραγωνικές ρίζες''**. (η υπογράμιση δική μας).Είναι εύλογο να υποθέσει κανείς ότι το υπογραμισμένο τμήμα θέλει να ''προλάβει '' ερωτήσεις από τους μαθητές του τύπου: '' Δηλαδή άρρητοι είναι εκείνοι οι αριθμοί των οποίων δεν μπορούμε να εξάγουμε τις τετραγωνικές ρίζες'', ή ότι: ''ένας άρρητος αριθμός ισούται πάντα με τη ρίζα κάποιου άλλου, έχει δηλαδή την έκφραση άρρητος = $\sqrt{\alpha}$ με $\alpha \geqslant 0$ και όχι τέλειο τετράγωνο; '', ή ότι ο αριθμός π.χ. 1,423672... τι είναι; Ερωτήματα δηλαδή που απορρέουν αποκλειστικά από τον τρόπο εισαγωγής της έννοιας του αρρήτου, ο οποίος (τρόπος) ακολουθεί την ιστορική πορεία εμφάνισης αυτής της έννοιας.

ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Αν η γραφή κάθε ρητού αριθμού ως δεκαδικού ή δεκαδικού περιοδικού είναι μια εύκολη υπόθεση και μπορεί να πραγματοποιηθεί με μια απλή διαίρεση, η γραφή ενός δεκαδικού περιοδικού σε κλασματική μορφή είναι μια πιό σύνθετη διαδικασία, αφού απαιτείται όχι απλά η διαμόρφωση μιας εξίσωσης με άγνωστο τη ζητούμενη κλασματική έκφραση του δεκαδικού περιοδικού,αλλά και ο κατάλληλος μετασχηματισμός αυτός της εξίσωσης ώστε να προκύψει από τη λύση της το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Το θέμα που τέθηκε στον μαθητή ήταν ήταν να γραφεί με κλασματική μορφή ένας δεκαδικός περιοδικός αριθμός. Για να ποικίλει ο βαθμός δυσκολίας του θέματος, η περίοδος άρχιζε από ένα ψηφίο και ήταν μέχρι τρία ψηφία. Ο μαθητής είναι από τους καλύτερους της τάξης του (Β΄Γυμνασίου), η δε διάρκεια διαπραγμάτευσης αυτής της δραστηριότητας ήταν (περίπου) δύο περιόδων.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 1°

Ο παρακάτω διάλογος έλαβε χώρα μεταξύ Μαθητή (Μ) και Καθηγητή (Κ) όταν ζητήθηκε από μαθητή να γράψει σε κλασματική μορφή τον δεκαδικό περιοδικό αριθμό 0,444... . Είχε προηγηθεί το αντίστροφο, δηλαδή το κλάσμα 4/9 είχε βρεθεί ότι ισούται με τον δεκαδικό περιοδικό 0,444... , με μια απλή διαίρεση. Ο μαθητής δηλαδή ήξερε ότι το πρόβλημα έχει λύση.

1. **Καθηγητής :** Ας γράψουμε τώρα τον 0,4 σε κλασματική μορφή.
2. **Μαθητής :** Μα κάνει 4/9΄
3. **Καθηγητής :** Αν δεν το ξέραμε πώς θα το βρίσκαμε.
4. **Μαθητής :** Να ονομάσουμε χ αυτό που ζητάμε.
5. **Καθηγητής :** Τότε ποιά εξίσωση θα λύσουμε;
6. **Μαθητής :** Θα λύσουμε την εξίσωση χ = 0,44..., (και μετά από λίγο) : Ναι

αλλά αυτή, όπως έχουμε μάθει, είναι στην τελική της μορφή. Πώς θα τη λύσω;

Παρά το γεγονός ότι ο μαθητής φαίνεται να αντιλαμβάνεται (γραμμή 4) την ''άλλη'' έκφραση του 0,444... (η οποία είναι ο χ) , δηλώνει αδυναμία επίλυσης της εξίσωσης. Η ''τελική μορφή'' αυτής της εξίσωσης – που είναι ίδια με την αρχική – δεν του αφήνει περιθώρια.

7. **Καθηγητής :** Θα μπορούσαμε άραγε να βρεθούμε ένα βήμα πριν από αυτή την ''τελική μορφή'';

8. **Μαθητής :** Δηλαδή να πολλαπλασιάζει τον χ κάποιος αριθμός; Να έχει ο χ συντελεστή;

9. **Καθηγητής :** Πώς θα μπορούσε να εμφανίσουμε συντελεστή στον χ εκτός φυσικά του 1;

10. **Μαθητής :** Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον ίδιο αριθμό.

11. **Καθηγητής :** Με ποιόν όμως αριθμό; Με ποιό κριτήριο θα τον επιλέξουμε;

Στο σημείο αυτό ο μαθητής διατυπώνει κάποιες εικασίες : όπως με 10, 100 1000, κλπ., πάντα όμως με δυνάμεις του 10 και στη ''λογική'' να μεταφερθεί η υποδιαστολή του δεκαδικού περιοδικού 0,444... . Σε παρατήρησή μας αν η περίοδος του 0,444... –που είναι 4– θα παίξει κάποιο ρόλο σε αυτήν την επιλογή, ο μαθητής απαντά : Θα πολλαπλασιάσω με 10 αφού πρέπει να λαμβάνω υπ΄όψιν μου τα δεδομένα.

12. Καθηγητής : Δηλαδή έχουμε να λύσουμε την εξίσωση : 10χ = 10 · 0,444...

13. Μαθητής : δηλαδή την εξίσωση: 10χ = 4,444... . (Και μετά από λίγο). Αν διαιρέσω με 10 θα βρώ πάλι την παλιά. (εννοεί την χ=0,444...).

Η επιμονή του μαθητή να γραφεί η εξίσωση: χ=0,444... ένα βήμα πριν από την ''τελική μορφή'', μας έβαλε κάποια ερωτηματικά όπως: Τι άραγε θα σήμαινε η εμφάνιση συντελεστή στο χ ; πώς αυτός ο αριθμός (ο συντελεστής δηλαδή) θα μπορούσε να τον καθοδηγήσει; Η απάντησή του (γραμμή 13) φανερώνει ότι αυτό ήταν αποτέλεσμα εφαρμογής ενός μοντέλου για τη λύση της εξίσωσης πρώτου βαθμού , αποτέλεσμα προηγούμενης γνώσης και εμπειρίας, και ότι δεν υπήρχε κάποια ιδιαίτερη σκόπευση. Η διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης χ = 0,444... έχει φτάσει σε αδιέξοδο, αφού και η άλλη μορφή της 10χ = 10·0,444... μόνο στην αρχική (κατά το μαθητή) οδηγεί. Αν και , κατά τους (Fischbein et. al., 1985, p. 15), ''τα λανθάνοντα μοντέλα που ενεργούν σε μεγάλο βαθμό πέρα από κάθε συνειδητό τυπικό έλεγχο,είναι δυνατόν μερικές φορές να διευκολύνουν την επίλυση των προβλημάτων, πολύ συχνά όμως μπορεί να επιβραδύνουν, να εκτρέψουν ή ακόμη και να διακόψουν τη διαδικασία της επίλυσης, όταν προκύψουν αντιφάσεις ανάμεσα στον αλγόριθμο του μοντέλου και τον αλγόριθμο της λύσης'', το ίδιο μπορεί να συμβεί --κατά την άποψή μας--και με τα μοντέλα που διδάσκονται στους μαθητές, αφού μπορεί να γίνεται χρήση τους σε άγνοια των περιορισμών που αυτά (τα μοντέλα) επιβάλλουν. Στην περίπτωσή μας ο μαθητής προσπαθεί να εφαρμόσει ένα μοντέλο επίλυσης της πρωτοβάθμιας εξίσωσης, παραβιάζοντας έναν περιορισμό (ο άγνωστος χ που ισούται με τον δεκαδικό περιοδικό 0,444..., αποτελεί ταυτόχρονα και την κλασματική έκφραση αυτού του δεκαδικού περιοδικού).

Η επιζητούμενη, από το μαθητή ,''τελική μορφή'' της εξίσωσης : $\chi = 0{,}444...$ θα προκύψει αφού προηγουμένως εφαρμόσουμε σε αυτή έναν ''άλλο'' μετασχηματισμό. Αυτόν τον μετασχηματισμό προσπαθούμε μαζί με το μαθητή να εντοπίσουμε ώστε ο 0,444... , να εκφρασθεί στην εξίσωση μόνο από τον άγνωστο χ. Ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος.

14. **Καθηγητής :** Ο χ στο πρώτο μέλος των δύο εξισώσεων τι έχουμε πεί ότι συμβολίζει; (γραμμή 4)
15. **Μαθητής :** Το κλάσμα που ζητάμε.
16. **Καθηγητής :** Πώς θα μπορούσαμε να εμφανίσουμε στο δεύτερο μέλος την κλασματική έκφραση του 0,444... ; δηλαδή μπορούμε να έχουμε χ και στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης $10\chi = 4{,}444...$;
17. **Μαθητής :** Αν έχουμε και το 0,444...
18. **Καθηγητής :** Γράψε λοιπόν κατάλληλα το 4,444...
19. **Μαθητής :** $4{,}444... = 4 + 0{,}444... = 4 + \chi$
20. **Καθηγητής :** Πώς θα γραφτεί τώρα η εξίσωση;
21. **Μαθητής :** Άρα : $10\chi = 4 + 0{,}444... = 4 + \chi$ ή $10\chi - \chi = 4$ ή $9\chi = 4$ ή $\chi = \frac{4}{9}$
22. **Καθηγητής :** Ποιό ήταν το στοιχείο που μας βοήθησε στη λύση της εξίσωσης; Πώς έπρεπε να γραφεί τελικά το 2^0 μέλος της εξίσωσης;Τι μπορούμε να παρατηρήσουμε;
23. **Μαθητής :** Να μην έχουμε περιοδικό αριθμό στο 2^0 μέλος.
24. **Καθηγητής :** Και αυτό με ποιόν μετασχηματισμό θα το πετύχουμε; Πώς πρέπει να γράφουμε τον περιοδικό αριθμό του 2ου μέλους κάθε φορά;

25. **Μαθητής** : Ως άθροισμα του χ και ενός σταθερού αριθμού.

ΕΠΕΙΣΟΔΙΟ 2^{0}

Στη συνέχεια θέσαμε στο μαθητή το πρόβλημα της γραφής σε κλασματική μορφή των δεκαδικών περιοδικών 1,2525...και 1,251251..., δίδοντας ιδιαίτερη έμφαση στο να κατανοηθεί πλήρως ότι ο μετασχηματισμός του 2^{ου} μέλους είναι αυτός που οδηγεί στη λύση της εξίσωσης η οποία διαμορφώνεται κάθε φορά. Παρουσιάζουμε συνοπτικά την πορεία επίλυσης των αντίστοιχων εξισώσεων.

1).
$$\begin{aligned} \chi &= 1{,}2525... \\ 100\chi &= 124+1{,}2525.. \\ 100\chi &= 124+\chi \\ 100\chi-\chi &= 124 \\ 99\chi &= 124 \qquad \text{άρα} \\ \chi &= \frac{124}{99} \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} \chi &= 1{,}251251... \\ 1000\chi &= 1251{,}251... \\ 1000\chi &= 1250+1{,}251251... \\ 1000\chi &= 1250+\chi \\ 1000\chi-\chi &= 1250 \\ 999\chi &= 1250 \qquad \text{άρα} \\ \chi &= \frac{1250}{999} \end{aligned}$$

Ο πολλαπλασιασμός της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης με 100 και 1000 αντίστοιχα έγινε επειδή η περίοδος των αριθμών είχε δύο και τρία ψηφία αντίστοιχα , και αναλογικά προς αυτό που κάναμε στην πρώτη περίπτωση, όταν μετατρέψαμε τον 0,44... σε κλασματικό αριθμό.

Η κατανόηση από το μαθητή της παραπάνω διαδικασίας , που ήταν βασικός μας στόχος , μας οδήγησε να του θέσουμε το ερώτημα: Μπορούμε να γράψουμε και τον δεκαδικό αριθμό 1,2519251... σε κλασματική μορφή; Ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος.

26. **Μαθητής** : Έστω χ = 1,2519251... , τότε ...(και μετά από λίγο) με ποιόν όμως αριθμό (εννοεί μάλλον με ποιά δύναμη του 10) θα πολλαπλασιάσω την εξίσωση;

27. **Καθηγητής** : Τι σε δυσκολεύει για να βρείς αυτόν τον αριθμό;

28. **Μαθητής** : Δεν ξέρουμε την περίοδο του αριθμού άρα ούτε και τα μηδενικά.

29. **Καθηγητής** : Πώς διαπίστωσες ότι αυτός ο αριθμός είναι περιοδικός, και ταυτόχρονα να μην ξέρεις ποιά είναι η περίοδός του;

30. **Μαθητής** : Α, ναι έχει επτά ψηφία η περίοδος, θα πολλαπλασιάσω με 10^7 την εξίσωση.

31. **Καθηγητής** : Δηλαδή θέλεις να πεις ότι το δεκαδικό τμήμα που βλέπουμε αυτού του αριθμού, επαναλαμβάνεται συνεχώς. Πώς το συμπεραίνεις αυτό;

32. **Μαθητής** : Γιατί , υπάρχει κάτι που δεν βλέπουμε;

33. **Καθηγητής** : Υπάρχει αλλά δεν μπορούμε να το δούμε, αφού μπορεί να ακολουθούν μετά το τελευταίο ψηφίο ,που είναι το 1 , οποιαδήποτε άλλα ψηφία. Δεν έχουμε κάποια κανονικότητα στην εμφάνιση των άπειρων δεκαδικών ψηφίων ,όπως συνέβαινε στους δεκαδικούς περιοδικούς τους οποίους πιο πάνω γράψαμε στην κλασματική τους μορφή.

34. **Μαθητής** : **Δηλαδή έχουμε δύο είδη δεκαδικών αριθμών που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία;** (η υπογράμιση δική μας).

35. **Καθηγητής** : Ποιά είναι αυτά τα δύο είδη;

36. **Μαθητής** : Οι δεκαδικοί που είναι περιοδικοί και αυτοί που δεν είναι.

37. **Καθηγητής** : Όλους τους δεκαδικούς περιοδικούς μπορούμε να τους γράφουμε σαν κλάσματα;

38. **Μαθητής** : Ναι, μάλλον όλους.

39. **Καθηγητής** : Ας επανέλθουμε στο πρόβλημά μας και στη λύση της εξίσωσης: χ=1,2519251...

40. **Μαθητής** : Μετά από όσα είπαμε πώς να τη λύσω;Δεν μπορώ να αρχίσω.

41. **Καθηγητής** : Ας υποθέσουμε ότι βρήκαμε την κατάλληλη δύναμη του 10 με την οποία πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση. Το δεύτερο βήμα για τη λύση της ποιό θα είναι; Τι γίνεται με το 2^0 μέλος; (προσπαθούμε εμμέσως να του υπενθυμίσουμε την απάντηση που έδωσε στη γραμμή 23).

42. **Μαθητής** : Να έχουμε το χ και στο 2^0 μέλος .

43. **Καθηγητής** : Και πώς θα το πετύχουμε αυτό;

44. **Μαθητής** : Να γράψω το 2^0 μέλος σαν άθροισμα που να έχει και το χ ... αλλά πώς; δεν μπορώ... δεν είναι το ίδιο, δεν ξέρω ποιό είναι το 2^0 μέλος.

45. **Καθηγητής** : Όλα αυτά τι σημαίνουν για την εξίσωση; έχει λύση;

46. **Μαθητής** : Ότι δεν μπορεί να είναι κλάσμα ο 1,2519251...

47. **Καθηγητής** : Και όλα αυτά πρέπει να τα αποδώσουμε στα χαρακτηριστικά του αριθμού 1,2519251... , ο οποίος σε ποιούς αριθμούς ανήκει με βάση τη δική σου κατάταξη; (του υπενθυμίζουμε το ερώτημά του στη γραμμή 34)

48. **Μαθητής** : Στους δεκαδικούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν τα ξέρουμε

49. **Καθηγητής** : Και ο οποίος δεν μπορεί να γραφεί σαν κλάσμα. Τους αριθμούς με αυτό το χαρακτηριστικό τους ονομάζουμε **άρρητους.**

50. **Μαθητής** : **Δηλαδή εκτός από τους ρητούς έχουμε και τους άρρητους;** (η υπογράμμιση δική μας).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ--ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Μέσα από τη συζήτηση που είχαμε με το μαθητή προέκυψαν κάποια συμπεράσματα τα οποία , χωρίς ασφαλώς να μπορούν να γενικευθούν, έχουν το ενδιαφέρον τους. Έτσι:

α) Η αδυναμία επίλυσης της εξίσωσης χ=1,2519251**...** **,** και ως εκ τούτου ''ότι δεν μπορεί να είναι κλάσμα ο 1,2519251... '' (γραμμή 46)**,** συνειδητοποιείται από το μαθητή ότι οφείλεται αποκλειστικά στη ''φύση'' αυτού του αριθμού. Ο μαθητής επομένως αποκτά και μια εξήγηση γιατί ο άρρητος δεν μπορεί να γραφεί ως κλάσμα, και η οποία είναι –κατά τη γνώμη μας– αρκετά ικανοποιητική για το επίπεδο των γνώσεων του. Μια απόδειξη γιατί ο $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να γραφεί σαν κλάσμα, θα συναντήσει αργότερα στο βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου.(Ιδε ιστορικό σημείωμα σελ. 57).

β) Τόσο με τη διαδικασία γραφής ενός δεκαδικού περιοδικού σε κλασματικό αριθμό, όσο και με τη διαδικασία διαπίστωσης του αδυνάτου αυτής της γραφής στην περίπτωση που ο αριθμός είναι δεκαδικός και μη περιοδικός, ο μαθητής έρχεται σε μια πρώτη επαφή με το σύνολο των πραγματικών αριθμών, και τη διαμέρισή του σε ρητούς και άρρητους (Γραμμές 34 και 50).

γ) Η διδακτική προσέγγιση των αρρήτων μέσα από την αδυναμία γραφής ενός δεκαδικού μη περιοδικού σε κλασματικό αριθμό, μπορεί να προσφέρει και μια βαθύτερη κατανόηση των ίδιων των ρητών στις διάφορες αναπαραστάσεις τους.

Σχετικά τώρα με την ένταξη των ριζών στο σύνολο των αρρήτων. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο , η προσέγγιση μιας ρίζας με ρητούς και με αυξανόμενη ακρίβεια (δεκάτου, εκατοστού, χιλιοστού, κ.λ.π.), κάτω από μια διαδικασία που δεν έχει τέλος, νομίζουμε ότι μπορεί να προσφέρει μια διαισθητική βάση για να μήν ταυτίζεται το σύνολο των αρρήτων με τις ρίζες.

Επανερχόμενοι στον αρχικό προβληματισμό, σχετικά με την ιστορική εξέλιξη των εννοιών και μιας αντίστοιχης παρουσίας τους στη σχολική τάξη, έχουμε να πούμε ότι ασφαλώς και είναι πολύτιμη η ιστορική εμπειρία. Σε κάθε όμως περίπτωση η διδακτική μεταφορά μιας έννοιας δεν μπορεί να γίνεται κατά τρόπο δογματικό.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Ανδρεαδάκης Α., κ.α. (1998). Άλγεβρα Α΄ Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β.
2. Αλιμπινίσης Α., κ.α. (1998). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Ο.Ε.Δ.Β.
3. Εξαρχάκος Θ. (1991). Εισαγωγή στα Μαθηματικά. Τόμος Α΄, Άλγεβρα.
4. Θωμαίδης Γ. (1997). ''Είναι δυνατός ο ''ιστορικός παραλληλισμός'' στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών; ''. Ερευνητική **διάσταση** της Διδακτικής των Μαθηματικών,τεύχος2, σσ.3–38, Ε.Μ.Ε. παράρτημα κεντρικής Μακεδονίας.
5. Cohen L. and Manion L. (1997). ''Μεθοδολογία Επιστημονικής Έρευνας''. Εκδόσεις Έκφραση.
6. Fischbein, E. et al. (1985). '' The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division''. **Journal for Research in Mathematics Education**, 16, pp.3-17, N.C.T.M.
7. Furinghetti, F. (1997).'' History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains''. **For the Learning of Mathematics 17,1**, pp. 55-61.
8. Katz, V. (1997). ''Some Ideas on the Use of History in the Teaching of Mathematics''. **For the Learning of Mathematics 17,1** , pp.62-63.