Author: Νικόλαος Αλεξανδρής

Title: Τα Μαθηματικά στο κατώφλι του 2000.

Abstract: Το άρθρο αυτό είναι η εναρκτήρια ομιλία στο 15ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ, στη Χίο στις 13-14-15 Νοεμβρίου 1998. Στην ομιλία αυτή αναφέρονται κάποιες απόψεις και σκέψεις για τα μαθηματικά, την επιστήμη των μαθηματικών, τη μαθηματική παιδεία και την εκπαίδευση, όπως αυτές διαμορφώνονται σήμερα, στο τέλος του 20ου και στο κατώφλι του 21ου αιώνα.

Creator: HDML

Μαθηματική Επιθεώρηση τ. 51. Έτος 1999

Τα Μαθηματικά στο κατώφλι του 2000 [1]

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ

Αγαπητοί συνάδελφοι

Πρώτα απ' όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω το ΔΣ της ΕΜΕ για την τιμητική πρόσκληση που μου έκανε να είμαι κεντρικός ομιλητής στο εφετινό Συνέδριό της, που γίνεται εδώ στην ακριτική και πανέμορφη Χίο. Με το νησί αυτό με συνδέουν ιδιαίτεροι δεσμοί, γιατί εκτός των άλλων, πριν τη μετάβασή μου από την δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση υπηρέτησα στο Γυμνάσιο του Βροντάδου και στο 1ο Λύκειο Χίου. Θέσεις από τις οποίες απεκόμισα πολλές και πολύτιμες εμπειρίες για τη λειτουργία των σχολείων της περιφέρειας σε μια περιοχή η οποία διαθέτει εκπαιδευτικούς με υψηλό αίσθημα ευθύνης για το έργο που επιτελούν , που αντανακλάται και στις υψηλές επιδόσεις των μαθητών της κάθε χρόνο στις Γενικές εξετάσεις.

Αποτελεί παράδοση του ετήσιου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΜΕ, μ' αυτή την εναρκτήρια ομιλία να θίγονται γενικότερα θέματα μαθηματικών και μαθηματικής παιδείας, παράδοση την οποία προτίθεμαι να ακολουθήσω. Έτσι η σημερινή μου ομιλία δεν είναι δημοσίευση μιας έρευνας σε συγκεκριμένο στενό γνωστικό αντικείμενο ή κάποια γνωστική περιοχή, αλλά μια προσπάθεια να καταθέσω κάποιες απόψεις και σκέψεις για τα μαθηματικά, την επιστήμη των μαθηματικών, τη μαθηματική παιδεία και την εκπαίδευση, όπως αυτές διαμορφώνονται σήμερα στο τέλος του 20ου και στο κατώφλι του 21ου αιώνα.

Ο ρόλος των μαθηματικών στη σύγχρονη ζωή μπορεί να αποτιμηθεί καλύτερα, αν συγκρίνουμε την πρόοδό τους στα διάφορα στάδια ανάπτυξής τους. Μόλις 3 εκατονταετηρίδες πριν, τα θεμέλια της μαθηματικής σκέψης ήταν αγκιστρωμένα στη γεωμετρία που μας κληροδότησαν οι αρχαίοι λαοί

---

[1] Εναρκτήρια ομιλία στο 15ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ, Χίος 13-14-15 Νοεμβρίου 1998

και η οποία πολύ λίγο είχε αναπτυχθεί μετά τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο. Μετά ξεκίνησε ο ορμητικός και ριζικός μετασχηματισμός των μαθηματικών.

Το αξιωματικό παραγωγικό ύφος της γεωμετρίας έδωσε τη θέση του στην διαισθητική επαγωγική προσέγγιση και οι καθαρά γεωμετρικές έννοιες αντικαταστάθηκαν από τις έννοιες του αριθμού και της αλγεβρικής πράξης, όπως εφαρμόστηκαν στην Αναλυτική Γεωμετρία και στην Μαθηματική Ανάλυση και στη συνέχεια στην Μηχανική. Εμφανίστηκε τότε μια μικρή ομάδα επιστημόνων που αποτέλεσε την αριστοκρατία της μαθηματικής σκέψης και επιστήμης. Την εποχή της μεγάλης Γαλλικής επανάστασης οι μαθηματικές επιστήμες γνώρισαν τόση άνθιση, που άρχισαν να εμπλέκονται με την επιστημονική δραστηριότητα που αυξήθηκε σημαντικά. Εμφανίστηκε τότε η επιστημονική μαθηματική βιβλιογραφία, που έδωσε την δυνατότητα της διάδοσης των νέων επιτευγμάτων των μαθηματικών και τα πανεπιστήμια άρχισαν συστηματικά να προετοιμάζουν ειδικούς στο πεδίο των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών.

Τα κλασικά μαθηματικά που γεννήθηκαν τον 17ο αιώνα διατηρούν την τεράστια σημασία τους μέχρι και σήμερα. Οι πιο γόνιμες εργασίες που εμφανίστηκαν προήλθαν από την γενίκευση των δύο βασικών εννοιών της μαθηματικής ανάλυσης: της έννοιας της συνάρτησης και της έννοιας του ορίου, που μετέτρεψαν τη διαισθητική αντίληψη της συνέχειας σε αντικείμενο αυστηρής μαθηματικής έρευνας. Στο εξαιρετικά διευρυμένο πεδίο των σύγχρονων μαθηματικών συναντάμε διαρκώς τις έννοιες της μαθηματικής ανάλυσης και ειδικότερα στην θεωρία των διαφορικών εξισώσεων (των συνήθων και με μερικές παραγώγους) που είναι βασικό εργαλείο στην μελέτη του ρυθμού μεταβολής διαφόρων μεγεθών.

Τα σύγχρονα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από την ισχυροποίηση των αποτελεσμάτων από την άποψη της μαθηματικής αυστηρότητας. Η προσέγγιση αυτή οδήγησε σε πιο εντατική μελέτη των θεμελίων των μαθηματικών και στην διευκρίνηση της δομής των ίδιων των μαθηματικών και του νοήματος της ύπαρξης των αντικειμένων της μαθηματικής σκέψης.

Η ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης οδήγησε αναπόφευκτα στην εξειδίκευση και στην απομόνωση. Οι ειδικοί στους διάφορους τομείς των μαθηματικών άρχισαν να καταλαβαίνουν όλο και λιγότερο ο ένας τον άλλο και τα μαθηματικά κινδύνευσαν να χάσουν την ενότητα και την εσωτερική συνοχή τους, αλλά και η σχέση των μαθηματικών με τις άλλες επιστήμες εξασθένισε αισθητά.

Στο ερώτημα τι είναι μαθηματικά δεν μπορούμε να δώσουμε μονοσήμαντη απάντηση ή ορισμό, όπως δεν μπορούμε να δώσουμε γενικό ορισμό της μουσικής ή της ζωγραφικής. Κανείς δεν μπορεί να εκτιμήσει αυτές τις μορφές τέχνης χωρίς να καταλαβαίνει, τι είναι ρυθμός και αρμονία στην μουσική, ή μορφή, χρώμα και σύνθεση στη ζωγραφική. Αντίστοιχα για την κατανόηση του αντικειμένου των μαθηματικών είναι απαραίτητη η κατανόηση των ουσιαστικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής δραστηριότητας.

Συχνά αναφέρεται, ότι ο σκοπός των μαθηματικών είναι η διαδοχική αφαίρεση, η λογικά αυστηρή μαθηματική παραγωγή και η περαιτέρω γενίκευση. Όμως αυτός ο χαρακτηρισμός περιέχει ένα μόνο μέρος της αλήθειας. Και πρώτα από όλα τα μαθηματικά δεν έχουν την αποκλειστικότητα στην αφαίρεση. Οι έννοιες της μάζας, της ταχύτητας και της δύναμης, είναι αφηρημένες ιδανικεύσεις της φυσικής πραγματικότητας, που χρησιμοποιούνται στο πεδίο της φυσικής.

Το σύστημα της αυστηρής αξιωματικής δομής που υιοθετήθηκε από τον Ευκλείδη στα «Στοιχεία» του, και για μεγάλο διάστημα, άσκησε αποφασιστική επίδραση στα Μαθηματικά, είναι μια λανθάνουσα μορφή, στην οποία συχνά αποκρυσταλλώνεται το τελικό προϊόν της μαθηματικής σκέψης, επειδή η μορφή αυτή δίνει τη δυνατότητα να πετύχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια και συστηματοποίηση του μαθηματικού περιεχομένου και της δομής του. Όμως, το να τονίζουμε αυτή την πλευρά των μαθηματικών μας αποσπά την προσοχή από εποικοδομητικά στοιχεία της μαθηματικής σκέψης, όπως η επαγωγή, η φαντασία και η διαίσθηση.

Αυτό το εξαιρετικά σημαντικό αποτέλεσμα ακολούθησε μια πορεία διαδοχικών πράξεων αφαίρεσης, που ξεκίνησαν από τις βάσεις της αναλυτικής γεωμετρίας. Είναι γνωστό ότι στον τρισδιάστατο χώρο τα επίπεδα περιγράφονται με γραμμικές εξισώσεις και οι επιφάνειες δεύτερης τάξης όπως η σφαίρα, το ελλειψοειδές κ.λπ με τετραγωνικές εξισώσεις.

Με την αλγεβροποίηση της γεωμετρίας μας δίνεται η δυνατότητα χωρίς ιδιαίτερο κόπο να περάσουμε σε χώρο μεγαλύτερο των τριών διαστάσεων, στο χώρο των ν διαστάσεων.

Οπως και πριν τα επίπεδα σ' αυτό το χώρο περιγράφονται και πάλι με γραμμικές μορφές και οι επιφάνειες δεύτερης τάξης με τετραγωνικές μορφές.

Ενα σημαντικό αποτέλεσμα της γραμμικής άλγεβρας είναι ότι οι επιφάνειες δεύτερης τάξης μπορούν να αναχθούν σε κανονική μορφή, με τη βοήθεια του αντίστοιχου μετασχηματισμού του συστήματος συντεταγμένων. Ως αποτέλεσμα το κέντρο του σχήματος μεταφέρεται στην αρχή των συντεταγμένων και οι κύριοι άξονές του, συμπίπτουν με τους άξονες των συντεταγμένων. Αυτό αποτελεί βασικό εργαλείο σε πολλές εφαρμογές, για παράδειγμα στη θεωρία ηλεκτρικών συστημάτων στα οποία ν υλικά σημεία ταλαντούνται ως προς τη θέση της ισορροπίας τους.

Ορισμένοι φυσικοί, χωρίς να ενδιαφέρονταν για αυστηρή μαθηματική θεμελίωση , όπως ο λόρδος Cayley, εφάρμοσαν αυτό το συμπέρασμα σε πιο γενικές περιπτώσεις, όπου ο αριθμός των διαστάσεων γίνεται οσοδήποτε μεγάλος. Αυτό το βήμα στην πορεία προς τη γενίκευση και την αφαίρεση των μαθηματικών, αποδείχθηκε εξαιρετικά γόνιμο στη μελέτη των ταλαντούμενων συστημάτων, στα οποία οι σημειακές μάζες και τα στοιχεία της ηλεκτρικής αλυσίδας δεν δίνονται από ένα πεπερασμένο αριθμό, αλλά είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα.

Βέβαια η παραγωγική μέθοδος ξεκινώντας από αξιώματα, τα οποία αρχικά φαίνονται δογματικές θέσεις, επιτρέπει στα μαθηματικά να αναπτύξουν ένα σημαντικά ευρύ φάσμα γνώσης. Ωστόσο και η μέθοδος του Σωκράτη, που οδηγεί από το μερικό στο γενικό και αποφεύγει την δογματική προσέγγιση, ανοίγει αξιόπιστους δρόμους στην δημιουργική σκέψη.

Όπως η παραγωγή πρέπει να συμπληρώνεται από τη διαίσθηση, έτσι και η τάση προς τη διαδοχική γενίκευση πρέπει να συγκρατείται και να εξισορροπείται από τη συντηρητική στάση προς το μερικό. Τα επιμέρους προβλήματα δεν θα πρέπει να υποβιβάζονται σε απλές σχηματικές επεξηγήσεις των γενικών θεωριών. Στην πραγματικότητα, όλες σχεδόν οι γενικές θεωρίες εμφανίζονται από τη μελέτη επιμέρους προβλημάτων. Αλλά, αν αυτές οι γενικές θεωρίες δεν εξυπηρετούν την επεξήγηση και συστηματοποίηση στενότερων και ειδικότερων προβλημάτων, δεν έχει νόημα.

Η αλληλεπίδραση του γενικού με το μερικό, της παραγωγής με την επαγωγική προσέγγιση , της λογικής με την φαντασία, είναι που συνιστά την ουσία των ζωντανών μαθηματικών. Μπορεί να φανεί ότι η βάση κάποιου συγκεκριμένου επιτεύγματος, είναι μόνο μία, από τις παραπάνω πλευρές. Ωστόσο, κάθε αποτέλεσμα που ανοίγει νέους δρόμους, περιέχει αναμφίβολα όλες αυτές τις πλευρές. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συγκριθεί σχηματικά με την εξής εικόνα: Ξεκινάμε από τη γη (από το συγκεκριμένο πρόβλημα) και με τα φτερά της αφαίρεσης απογειωνόμαστε πάνω από τα σύννεφα, όπου στην αραιή ατμόσφαιρα η παρατήρηση γίνεται ευκολότερη. Αλλά μετά πρέπει να εκτελέσουμε το αποφασιστικό πείραμα, την προσγείωση. Πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα των παρατηρήσεων. Αυτό συμβαίνει και πάλι στην γη, δηλαδή και πάλι κοιτάμε την συγκεκριμένη πραγματικότητα, αλλά τώρα πια από μια συγκεκριμένη σκοπιά. Έτσι, η πλοήγηση στο πεδίο της αφηρημένης γενικότητας πρέπει να ξεκινάει από το συγκεκριμένο και το μερικό και να καταλήγει πάλι στο συγκεκριμένο και μερικό.

Αυτές οι σκέψεις δείχνουν καθαρά την πορεία της εξέλιξης της μαθηματικής επιστήμης. Ο Κέπλερ μπόρεσε να κάνει αφαίρεση από ένα τεράστιο πλήθος παρατηρήσεων, και να διατυπώσει την θεωρία των ελλειπτικών τροχιών των πλανητών. Παραπέρα αφαίρεση οδήγησε τον Νεύτωνα να εξάγει από το μοντέλο αυτό το Νόμο της παγκόσμιας έλξης και τις διαφορικές εξισώσεις της μηχανικής. Σε αυτό το αρκετά υψηλό επίπεδο, οι μηχανικοί απόκτησαν απεριόριστη ελευθερία και επέστρεψαν στα συγκεκριμένα επήγεια προβλήματα, συνεχίζοντας τις επιτυχίες σε πεδία πολύ πέραν της ουράνιας μηχανικής από όπου ξεκίνησαν.

Με παρόμοιο τρόπο ο Φαραντέϊ απέδειξε στην θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού μια σειρά πειραματικών δεδομένων, τα οποία συνέδεσε με μια ενιαία ερμηνεία . Αυτό του έδωσε την δυνατότητα να βρει με αφαίρεση, αρκετούς μαθηματικούς ποιοτικούς νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού. Όταν οι νόμοι αυτοί είχαν διατυπωθεί για ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, ο Μάξγουελ ανακάλυψε έναν γενικό ποσοτικό νόμο, που συνδέει τις ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις καθώς και τον ρυθμό αλλαγής τους με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Αυτές οι εξισώσεις, που έχουν προέλθει με αφαίρεση και είναι αποψιλωμένες από κάθε τι το επιμέρους και συγκεκριμένο, μπορούν αρχικά να φανούν ότι δεν ενδείκνυται για χρήση. Όμως σύντομα γίνεται σαφές ότι η πτήση του Μάξγουελ στις υψηλές σφαίρες της αφαίρεσης άνοιξε στην επιστήμη νέους δρόμους προς πολλές κατευθύνσεις. Η ανακάλυψη της κυματικής φύσης την ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων στην βάση των εξισώσεων του Μάξγουελ, οδήγησε τον Χερτς να κάνει πειράματα για την διάδοση των ραδιοκυμάτων που, με την σειρά τους, οδήγησαν στην εμφάνιση ενός νέου τύπου πεδίου τεχνολογίας. Ως συνέπεια, άρχισαν να εμφανίζονται κλάδοι της επιστήμης, όπως για παράδειγμα η υδροδυναμική

Πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι οι εξισώσεις του Μάξγουελ δεν είναι προϊόν της σταδιακής παραγωγικής σκέψης. Σε μικρότερο ακόμα βαθμό μπορούν να θεωρηθούν ως προϊόν της καθαρά Σωκρατικής επαγωγικής μεθόδου. Πιο σωστό θα ήταν, να κατατάξουμε τον Μάξγουελ σε εκείνες τις ευφυίες που είναι ικανές να συλλάβουν την ομοιότητα και να σκεφτούν αναλογίες ανάμεσα σε απόμακρα γεγονότα που εξωτερικά φαίνονται να μην έχουν καμία σχέση και να κάνουν το αποφασιστικό βήμα , να υιοθετήσουν μια πιο βαθιά άποψη που συνδέει ανομοιογενή στοιχεία με μια ενιαία ερμηνεία.

Στα ίδια τα μαθηματικά, η μετάβαση στην πορεία της ιστορίας από το συγκεκριμένο και το μερικό, μέσω της αφαίρεσης, και πάλι στο συγκεκριμένο και μερικό, προσδίδει στη θεωρία μία ιδιάζουσα σημασία. Για να εκτιμήσουμε τη σημασία αυτού του θεμελιακού συμπεράσματος, πρέπει να έχουμε υπόψη ότι οι λέξεις «συγκεκριμένο» , « αφηρημένο» , «μερικό», «γενικό», στα μαθηματικά δεν έχουν σταθερή και απόλυτη σημασία. Αφορούν κυρίως το πλαίσιο της σκέψης μας και το επίπεδο της γνώσης και τη φύση του μαθηματικού αντικειμένου. Έτσι εύκολα δεχόμαστε ως «συγκεκριμένο» αυτό με το οποίο είμαστε εξοικειωμένοι από καιρό. Οι δε όροι «γενίκευση» και « αφαίρεση» περιγράφουν όχι μια στατική κατάσταση ή ένα τελικό προϊόν, άλλα τη ζωντανή δυναμική διαδικασία της μετάβασης από ορισμένο συγκεκριμένο επίπεδο, σε κάποιο άλλο υψηλότερο.

Μερικές φορές οι γόνιμες ανακαλύψεις στα μαθηματικά εμφανίζονται σχεδόν απροσδόκητα, χωρίς ιδιαίτερες προσπάθειες. Οι νέοι ορίζοντες εμφανίζονται κατά την αφαίρεση από το συγκεκριμένο υλικό και την αποκάλυψη ουσιωδών ως προς την δομή του στοιχείων. Η αξιωματικοποίηση ανεξάρτητα από την Ευκλείδεια μορφή της, ακολουθεί αυτήν ακριβώς της διαδικασία. Ένα σημαντικό παράδειγμα γόνιμης εφαρμογής της αφαίρεσης είναι η γενίκευση από τον Τζον Φον Νόημαν και άλλους επιστήμονες της φασματικής θεωρίας του Χίλμπερτ; η οποία οδήγησε από την μερική περίπτωση των φραγμένων γραμμικών τελεστών στους μη φραγμένους τελεστές.

Ενα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα του προηγούμενου αιώνα ήταν η εισαγωγή της έννοιας της ομάδας. Ως αποτέλεσμα, διάφοροι κλάδοι των μαθηματικών απόκτησαν σαφήνεια και ομοιομορφία. Πολλές προσπάθειες επικεντρώθηκαν στην ανάλυση της δομής των αφηρημένων εννοιών. Αυτό οδήγησε στην αποσαφήνιση της δομής συγκεκριμένων κλάδων των μαθηματικών, όπως η θεωρία αριθμών και η άλγεβρα. Ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα σε αυτή την κατεύθυνση ήταν η περίφημη ταξινόμηση των διάφορων γεωμετριών που προτάθηκε από τον Φέλιξ Κλάιν, την δεκαετία 1870. Η ταξινόμηση αυτή βασίζεται στην έννοια της αναλλοίωτης ορισμένων γεωμετρικών ιδιοτήτων ως προς διάφορες ομάδες μετασχηματισμών.

Η αφηρημένη θεωρία βρήκε λαμπρή εφαρμογή στη λύση ακόμα πιο συγκεκριμένων προβλημάτων της φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων. Εδώ οι δυνατότητες της θεωρίας ομάδων καθορίζονται από την ύπαρξη πολυπλοκότατων ομάδων πρόδηλων και λανθανουσών συμμετριών στις αμοιβαίες θέσεις και αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων του πυρήνα. Η επιτυχία της θεωρίας ομάδων στην συστηματικοποίηση ενός πλήθους πειραματικών δεδομένων, αλλά και στην πρόβλεψη της ύπαρξης νέων στοιχειωδών σωματιδίων, αναμφισβήτητα μαρτυρεί τη χρησιμότητα των αφαιρέσεων στην αναζήτηση πραγματικών αληθειών.

Η διαίσθηση παρουσιάζεται ενεργά στην μαθηματική δημιουργία, παρακινώντας και κατευθύνοντας και την πιο αφηρημένη νόηση. Η πιο διαδεδομένη μορφή, η γεωμετρική διαίσθηση, συνέβαλε στην εμφάνιση νέων σημαντικών αποτελεσμάτων των μαθηματικών, τόσο στο πεδίο της γεωμετρίας όσο και πέρα από τα όρια της. Παρόλα αυτά υπάρχει σαφής τάση στην ενίσχυση της διαίσθησης με ακριβείς και αυστηρούς συλλογισμούς.

Η τοπολογία, ο πιο νέος και πιο ισχυρός κλάδος της γεωμετρίας, αποδεικνύει παραστατικότατα την γόνιμη επίδραση της αντίθεσης ανάμεσα στη διαίσθηση και την λογική. Εχοντας έναν μικρό αριθμό σποραδικών, αλλά και αναμφίβολα σημαντικών ανακαλύψεων, όπως, για παράδειγμα, την ανακάλυψη της ταινίας του Μέμπιους, να συνιστά το βασικό της «κεφάλαιο», η τοπολογία μόνο τον 19ον αιώνα κατάφερε να γίνει πεδίο αξιόλογης επιστημονικής έρευνας. Για μεγάλο διάστημα, δέσποζε πλήρως η γεωμετρική διαίσθηση. Οι τοπολόγοι έκοβαν και επανασυγκολούσαν διάφορες επιφάνειες προκειμένου να παρουσιάσουν εποπτικά την μαθηματική ουσία της τοπολογίας ως επιστήμης των ιδιοτήτων των επιφανειών που παραμένουν αναλλοίωτες σε οποιεσδήποτε συνεχείς παραμορφώσεις . Όμως στις αρχές της γένεσης αυτού του νέου κλάδου, ο Ρίμαν κατάφερε να προσελκύσει την προσοχή των επιστημόνων με την εργασία του, στη θεωρία αλγεβρικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής, όπου, έδειξε ότι για την κατανόηση αυτών των συναρτήσεων είναι ουσιαστικές οι τοπολογικές ιδιότητες ορισμένων ειδικών επιφανειών που σήμερα ονομάζονται επιφάνειες Ρίμαν. Στη διάρκεια του περασμένου αιώνα, οι μαθηματικοί ανακάλυψαν και μελέτησαν συστηματικά πολλές τοπολογικές ιδιότητες επιφανειών δύο, τριών ή ν διαστάσεων. Στην αρχή του 20 αιώνα ο Πουανκαρέ και άλλοι μαθηματικοί κατασκεύασαν ένα λαμπρό οικοδόμημα τοπολογικής θεωρίας, προσανατολιζόμενοι ακόμα από την διαίσθηση. Το έργο αυτό ήταν στενά συνδεδεμένο με την ανάπτυξη της θεωρίας ομάδων και βρήκε εφαρμογή και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών. Τα αποτελέσματά της εφαρμόστηκαν στην ουράνια μηχανική, και τον ορισμό των πλανητικών τροχιών στον καμπύλο χώρο των βαρυτικών πεδίων.

Όμως σήμερα οι τοπολόγοι άρχισαν να διακατέχονται από ένα διπλό αίσθημα. Από την μια αισθάνονταν την ανάγκη να υποτάξουν την γεωμετρική διαίσθηση στους κανόνες της σύγχρονης μαθηματικής αυστηρότητας και από την άλλη, δεν θα ήθελαν καθόλου να χάσουν την πειστικότητα και τη σαφήνεια των διαισθητικών γεωμετρικών συλλογισμών. Την πρώτη δεκαετία του αιώνα μας το πρόβλημα αυτό το αντιμετώπισε σχεδόν μόνος του ο Ολλανδός μαθηματικός Μπράουερ. Χάρη στις τεράστιες προσπάθειές του, η μέθοδος της τοπολογίας σήμερα δεν είναι λιγότερο αυστηρή απ' ότι η γεωμετρία του Ευκλείδη. Η παραπέρα ανάπτυξη αυτού του κλάδου συνεχίστηκε στην κατεύθυνση της λογικής αυστηροποίησης.

Στη βάση των δυσκολιών που αντιμετώπισε ο Μπράουερ υπήρχε το δίλημμα που εμφανίζεται συνδεδεμένο με την έννοια της συνέχειας. Καθένας μας έχει σαφή διαισθητική αντίληψη για το τι είναι συνεχές, για παράδειγμα μπορούμε χωρίς δυσκολία να φανταστούμε μια συνεχή καμπύλη. Όμως καθένας που μελετά διαφορικό λογισμό παύει να είναι βέβαιος όταν η έννοια της συνέχειας χρειάζεται να διατυπωθεί στο πλαίσιο μιας αυστηρής μαθηματικής θεωρίας. Το πρόβλημα είναι ότι η γεωμετρική διαίσθηση δημιουργεί μια τέτοια αντίληψη της συνέχειας, η οποία δεν συμφωνεί πλήρως με την μαθηματική λογική έννοια της συνέχειας. Ο αυστηρός ορισμός φέρνει στην επιφάνεια πολλές περιπτώσεις που από την σκοπιά της διαίσθησης μας φαίνονται παραδοξολογικές. Μπορούμε, για παράδειγμα να κατασκευάσουμε μια συνεχή γραμμή (σύμφωνα με τον ορισμό) που να μην έχει πεπερασμένο μήκος, να μην έχει ορισμένη διεύθυνση σε κανένα σημείο ή μια γραμμή, η οποία ευρισκόμενη στο εσωτερικό ενός τετραγώνου, να μπορεί να προχωρά χωρίς να τέμνει τον εαυτό της πλησιάζοντας οσοδήποτε κοντά σε οποιοδήποτε σημείο του. Αυτές οι περίεργες κατασκευές δείχνουν ότι πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στη απόδειξη των τοπολογικών ιδιοτήτων, επιφανειών ή άλλων αντικειμένων που υφίστανται σύνθετη συνεχή παραμόρφωση.

Η ανάγκη μια τέτοιας προσεκτικής επιχειρηματολογίας δεν είναι πάντοτε διαισθητικά κατανοητή σε όποιον δεν ασχολείται με την τοπολογία. Επίσης, αν και κανείς δεν είχε αμφιβολία ότι η διάσταση ενός δισδιάστατου ή τρισδιάστατου γεωμετρικού σχήματος δεν αλλάζει σε οποιεσδήποτε συνεχείς παραμορφώσεις, όμως η αυστηρή απόδειξη αυτού του γεγονότος, ξεκινώντας από την γενική έννοια της αφηρημένης συνέχειας, ήταν μια από τις σημαντικές συνεισφορές του Μπράουερ.

Και οι πιο αφηρημένες μαθηματικές θεωρίες καθορίζονται από την αίσθηση της φυσικής πραγματικότητας. Το γεγονός ότι τα μαθηματικά ως καθαρό προϊόν του ανθρώπινου λόγου μπορεί να συμβάλλουν αποτελεσματικά στην κατανόηση και την περιγραφή του φυσικού κόσμου, απαιτεί ιδιαίτερη ερμηνεία και δεν είναι τυχαίο ότι το πρόβλημα αυτό προσήλκυε πάντοτε την προσοχή των φιλοσόφων.

Αφήνοντας όμως κατά μέρος τις φιλοσοφικές διενέξεις οφείλουμε να αναγνωρίσουμε ότι η υποχρέωση των μαθηματικών να λύνουν διάφορα φυσικά προβλήματα, ή αντίθετα, η φαινομενική έλλειψη αυτής της υποχρέωσης, δεν μπορεί να ληφθεί ως κριτήριο διαχωρισμού ανάμεσα στο ένα ή το άλλο είδος μαθηματικού ή τις διχογνωμίες που υπάρχουν ανάμεσα στους μαθηματικούς.

Στην πραγματικότητα δεν μπορούμε να χαράξουμε μια διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στα καθαρά και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά.

Ενα και το αυτό μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί με διαφορετικούς τρόπους. Ο μαθηματικός που υποστηρίζει την προσέγγιση της αυστηρής απόδειξης απαιτεί την ασυμβίβαστη τελειότητα. Δεν επιτρέπει κανένα κενό στη λογική των συλλογισμών και στη λύση των προβλημάτων και το λαμβανόμενο αποτέλεσμα πρέπει να είναι το αποκορύφωμα μιας άρρηκτης αλυσίδας άψογων συλλογισμών.

Αν ο υποστηρικτής αυτής της προσέγγισης αντιμετωπίσει δυσκολίες, οι οποίες του φαίνονται ανυπέρβλητες, θα επιχειρήσει μάλλον να αναδιατυπώσει το πρόβλημα ή ακόμη και να θέσει ένα άλλο συγγενές με το πρώτο, οι δυσκολίες του οποίου είναι υπερβάσιμες. Αλλά υπάρχει και άλλος δρόμος. Να επαναπροσδιορίσουμε εκ νέου, τι θεωρούμε λύση του προβλήματος. Στην πραγματικότητα, αυτή η διαδικασία έχει αποδειχθεί πολλές φορές το προκαταρκτικό βήμα στην πραγματική λύση του αρχικού προβλήματος.

Στις έρευνες εφαρμοσμένου χαρακτήρα η κατάσταση είναι διαφορετική. Πρώτα απ' όλα το πρόβλημα δεν μπορεί να τροποποιηθεί με μεγάλη ευκολία. Πρέπει να δώσουμε ορθή και αξιόπιστη απάντηση από την άποψη του κοινού νου της ανθρώπινης πρακτικής. Σε περίπτωση ανάγκης ο μαθηματικός μπορεί να δεχθεί συμβιβασμό, να εισάγει κάποια εικασία στην σειρά των συλλογισμών του ή ακόμη να επιτρέψει κάποια ανακρίβεια στις αριθμητικές τιμές.

Ομως ακόμη και προβλήματα κατ' εξοχήν πρακτικού προσανατολισμού, μπορεί να χρειάζονται βασική μαθηματική έρευνα για το κατά πόσον είναι ορθά τοποθετημένα. Στις εφαρμοσμένες έρευνες μπορεί να χρειαστούν και αποδείξεις καθαρά μαθηματικών θεωρημάτων ύπαρξης, επειδή η πεποίθηση ότι υπάρχει λύση μπορεί να εγγυηθεί την αξιοπιστία του χρησιμοποιούμενου μαθηματικού μοντέλου.

Τέλος, στα εφαρμοσμένα μαθηματικά δεσπόζουν οι προσεγγίσεις, τις οποίες δεν μπορούμε να αποφύγουμε κατά την κατασκευή των μαθηματικών μοντέλων.

Ο χειρισμός της πραγματικότητας που μετασχηματίζεται σε αφηρημένα μαθηματικά μοντέλα και η αποτίμηση της ακρίβειας των επιτυγχανόμενων αντιστοιχιών απαιτούν αυξημένη διαίσθηση, η οποία τελειοποιείται με την εμπειρία. Συχνά, είναι ανάγκη να μετασχηματίσουμε το αρχικό μαθηματικό πρόβλημα που αποδεικνύεται αρκετά περίπλοκο για λύση με σύγχρονες μεθόδους. Αυτό εν μέρει εξηγεί και την ικανοποίηση που αισθάνονται οι μαθηματικοί που εργάζονται με μηχανικούς και φυσικούς επιστήμονες για τη λύση πραγματικών προβλημάτων.

Σε αντίθεση με τους προηγούμενους κλάδους, η θεωρία αριθμών είναι ίσως το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα μαθηματικής θεωρίας που έχει μια ιδιαίτερη, εσωτερική δυναμική εξέλιξης, ανεξάρτητα από οποιεσδήποτε εφαρμογές. Η θεωρία αριθμών είναι ίσως η πιο παλιά μαθηματική θεωρία, η οποία αναπτύχθηκε σε όλους τους πολιτισμούς, στην Μεσοποταμία, την Αίγυπτο, την αρχαία Ελλάδα, την Ινδία, την Κίνα και αλλού, και εξακολουθεί μέχρι και σήμερα να αναπτύσσεται χωρίς κάποιες θεμελιακές, ριζικές αλλαγές στο αντικείμενο και την μέθοδό της. Τα προβλήματα που τίθενται στο πλαίσιο του κλάδου αυτού αν και χαρακτηρίζονται από σχετικά πολύ απλή διατύπωση, η λύση τους συχνά απαιτεί μεθόδους εξαιρετικής ευφυίας και καινοτομικές προσεγγίσεις.

Στοιχεία της θεωρίας αριθμών έχουν περιληφθεί στα περιεχόμενα της ύλης των μαθηματικών της Β' Λυκείου στο πρόγραμμα θετικής κατεύθυνσης, με την οποία επιδιώκεται, σωστά νομίζω, οι μαθητές

- να ασκηθούν στην αποδεικτική διαδικασία
- να καλλιεργήσουν την αφηρημένη σκέψη
- να γνωριστούν με την αισθητική αξία των μαθηματικών

Ο 20ος αι. είδε τη λύση ενός από τα πλέον θρυλικά θεωρήματα της θεωρίας αριθμών: του Μεγάλου Θεωρήματος του Φερμά. Το θεώρημα αυτό διατυπώθηκε από τον μεγάλο Γάλλο μαθηματικό το 1637, μελετώντας το όγδοο πρόβλημα του Βιβλίου II της «Αριθμητικής» του Διόφαντου, το οποίο ζητά να αναλυθεί δεδομένος τετραγωνικός αριθμός σε άθροισμα δύο τετραγώνων. Ο Φερμά διατύπωσε την εξής υπόθεση:

Δεν είναι δυνατόν να αναλυθεί ούτε κύβος σε δύο κύβους, ούτε διτετράγωνος σε δύο διτετράγωνους, ούτε εν γένει βαθμός άνω του τετραγώνου σε δύο βαθμούς με τον ίδιο έκθετη.

Ανακάλυψα, γράφει, γι' αυτό μια αληθινά θαυμάσια απόδειξη αλλά δεν μου φτάνει το περιθώριο να τη γράψω.

Όμως όσο κι αν έψαξαν οι ιστορικοί στα χειρόγραφα του Φέρμα δεν βρήκαν την απόδειξη αυτή. Από τότε η ιστορία γνώρισε επανειλημμένες προσπάθειες να αποδειχθεί το Μεγάλο Θεώρημα του Φερμά, χωρίς όμως αξιόλογη επιτυχία.

Εως το 1993 η μόνη ένδειξη που συντηρούσε τις ελπίδες των μαθηματικών ότι το Θεώρημα του Φέρμα είναι αληθές ήταν η επαλήθευσή του με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών για τιμή του εκθέτη 4 000 000.

Η τελευταία πράξη για την απόδειξη του θεωρήματος του Φερμά άρχισε το 1955 στο πλαίσιο έρευνας που φαινομενικά δεν είχε σχέση με το θεώρημα αυτό. Ο Γιαπωνέζος μαθηματικός Γ. Τανιγιάμα έθεσε δύο ανοιχτά προβλήματα στη θεωρία ελλειπτικών καμπυλών. Αυτά οδήγησαν τον Βέιλ και τον Σιμούρα στη διατύπωση της λεγόμενης εικασίας Σιμούρα-Τανιγιάμα-Βέιλ.

Το 1993 ο Βρετανός μαθηματικός Αντριου Ουάιλς (Andrew Wiles) έδωσε τρεις διαλέξεις στις 21-23 Ιουνίου στο Ινστιτούτο Ισαάκ Νεύτων στο Καίμπριτζ, όπου στην τελευταία ανακοίνωσε την απόδειξη του Θεωρήματος του Φερμά ως απόρροια του κύριου αποτελέσματος της έρευνάς του. Είχε αποδείξει την εικασία Σιμούρα-Τανιγιάμα-Βέιλ για μια κλάση παραδειγμάτων που ήταν αναγκαία για την απόδειξη του θεωρήματος του Φερμά.

Στη συνέχεια ο Ουάιλς επανεξέτασε την απόδειξη αποκαθιστώντας κάποια κενά που εντόπισε εκ των υστέρων και την τελική απόδειξη δημοσίευσε το 1995 στο περιοδικό Annals of Mathematics δίνοντας τέλος στις προσπάθειες για τη λύση του πιο θρυλικού ίσως μαθηματικού προβλήματος.

Σήμερα όμως, ζούμε σε μια εποχή που η πληροφορία αναδείχθηκε παγκόσμια αρχή, δίνοντας σχήμα στο ασχημάτιστο, προσδιορίζοντας τον ιδιαίτερο χαρακτήρα των έμβιων μορφών και ακόμη καθορίζοντας μέσα από ειδικούς κώδικες, τα ίχνη της ανθρώπινης σκέψης. Με αυτό τον τρόπο η πληροφορία εκτείνεται πάνω απ' όλα τα ανόμοια πεδία, των υπολογιστών, της Κλασικής Φυσικής, της Μοριακής Βιολογίας, της Ανθρώπινης Επικοινωνίας, της εξέλιξης της Γλώσσας και της εξέλιξης του ανθρώπου.

Είναι σήμερα προφανές ότι η φύση δεν μπορεί πλέον να θεωρηθεί μόνον ως ύλη και ενέργεια. Ούτε μπορούν όλα της τα μυστικά να αποκαλύπτονται με τα κλειδιά της Χημείας και της Φυσικής. Μια τρίτη συνιστώσα είναι πλέον απαραίτητη για οποιαδήποτε ερμηνεία του κόσμου που διεκδικεί την πληρότητα, η επιστήμη των Πληροφοριών. Η φύση πρέπει να ερμηνευτεί ως ύλη, ενέργεια και πληροφορία. Και αυτό γίνεται δυνατό με τη μαθηματική θεώρηση της πληροφορίας, που εγκαινιάστηκε από τον Shannon. Ο Shannon όρισε αυστηρά την ποσότητα της πληροφορίας και περιέγραψε με μαθηματικό τρόπο τη διαδικασία μετάδοσης των πληροφοριών στο κλασικό του άρθρο «Μια μαθηματική Θεωρία της Πληροφορίας» το 1948. Στο άρθρο αυτό πρότεινε και ερεύνησε ένα νέο μαθηματικό μοντέλο των συστημάτων επικοινωνίας.

Μια από τις πιο σημαντικές καινοτομίες του ήταν ότι θεώρησε τα στοιχεία του συστήματος (πηγές, μηνύματα, διαύλους επικοινωνίας, κώδικες) ως πιθανο-θεωρητικές οντότητες.

Τις αρχές της θεωρίας πληροφοριών του Shannon εφαρμόζουμε σήμερα, για παράδειγμα, για να προσδιορίσουμε, ποιες πληροφορίες περιέχονται μέσα σ' ένα μόριο DNA. Γιατί μπορούμε να βλέπουμε τα γονίδια πρώτα ως πληροφορίες και μετά ως Χημεία. Τα γονίδια γίνονται τότε ένα από τα πολλά διαφορετικά είδη του συστήματος των συμβόλων, όπου περιλαμβάνεται και το τόσο πλούσιο και εκφραστικό σύστημα της ανθρώπινης γλώσσας.

Το αλφάβητο όμως των γονιδίων είναι πολύ μικρότερο από το δικό μας αλφάβητο, γιατί αποτελείται μόνο από τέσσερα γράμματα που αντιστοιχούν σε αντίστοιχες ουσίες με τα συμβολικά ονόματα A (αδενίνη), G (γουανίνη), C (κυτοσίνη) και T (θυμίνη). Το σύστημα δηλαδή αυτό είναι πλησιέστερο στο δυαδικό κώδικα του Shannon, που αποτελείται από δύο ψηφία 0 και 1 από ότι το αλφάβητο οποιασδήποτε ανθρώπινης γλώσσας, γι' αυτό και η εφαρμογή της μαθηματικής θεωρίας πληροφοριών μας δίνει τη δυνατότητα να παίρνουμε εύκολα, αποτελεσματικά και με ασφάλεια τις πληροφορίες που περιέχονται μέσα σε ένα μόριο DNA.

Μια από τις πολλές προκλήσεις για τη Μαθηματική Επιστήμη τα τελευταία χρόνια ήταν αυτή της εξασφάλισης της ασφαλούς μετάδοσης των πληροφοριών στα δίκτυα των υπολογιστών και το παγκόσμιο διαδίκτυο. Απαίτηση που γίνεται ιδιαίτερα επιτακτική ύστερα από την ανάπτυξη μιας ποικιλίας εφαρμογών (π.χ. το ηλεκτρονικό εμπόριο, το ηλεκτρονικό χρήμα, οι τραπεζικές συναλλαγές, ο έλεγχος διακίνησης προϊόντων κ.α) και τον τεράστιο όγκο ευαίσθητων πληροφοριών, που ανταλλάσσονται μεταξύ διαφόρων οργανισμών μέσω μη ασφαλών δημόσιων δικτύων.

Είναι σημαντικό ότι τα μαθηματικά μπορούν αποτελεσματικά να αντιμετωπίσουν αυτές τις απαιτήσεις.

Τα μηνύματα που ανταλλάσσουν μεταξύ τους οι χρήστες ενός δικτύου επικοινωνίας είναι κείμενα με σύμβολα για τη σύνταξη των οποίων χρησιμοποιείται κάποια γλώσσα επικοινωνίας. Είναι προφανές ότι αυτή η γλώσσα επικοινωνίας μπορεί να είναι η δυαδική γλώσσα, δηλαδή η γλώσσα που έχει ως μοναδικά σύμβολα τους αριθμούς 0 και 1. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η διαδικασία της κρυπτογράφησης και αποκρυπτογράφησης, που χρησιμοποιείται για την ασφαλή μετάδοση των μηνυμάτων, να μπορεί να πραγματοποιείται με τη βοήθεια μιας μαθηματικής διαδικασίας, στην οποία περιλαμβάνονται πεπερασμένα σώματα. Η αποτελεσματική κρυπτογράφηση και αποκρυπτογράφηση μηνυμάτων βασίζεται σε μαθηματικά προβλήματα, με δύσκολη ή αδύνατη επίλυση. Αν δηλαδή η αποκρυπτογράφηση ενός μηνύματος μπορεί να αναχθεί σ' ένα άλυτο πρόβλημα ή σ' ένα πρόβλημα, που η λύση του απαιτεί πολύ μεγάλο υπολογιστικό χρόνο, τότε αυτή είναι ασφαλής. Τέτοια προβλήματα είναι η παραγοντοποίηση ενός πολύ μεγάλου ακέραιου αριθμού και το πρόβλημα του διακριτού λογαρίθμου, τα οποία χρησιμοποιούνται σήμερα στην κατασκευή ασφαλών πρωτοκόλλων επικοινωνίας. Ο δρόμος προς αυτή την κατεύθυνση ανοίχθηκε το 1976 από τους Diffie και Helman, οπότε άρχισε μια νέα εποχή για την κρυπτολογία, την κρυπτολογία του λεγόμενου δημόσιου κλειδιού, και ο ρόλος της κρυπτολογίας έπαυσε να περιορίζεται μόνον στο στρατιωτικό και διπλωματικό τομέα.

Προς την κατεύθυνση της αποκωδικοποίησης του μυστηρίου της ζωής που όπως προαναφέρθηκε έθεσε από μία πλευρά ο Shannon με την τρίτη συνιστώσα της πληροφορίας, εργάσθηκαν και άλλοι επιστήμονες στον 20 αιώνα με στόχους όπως, να γίνει προσπάθεια ενοποίησης του ηλεκτρονικού και μαγνητικού πεδίου, ή της εισαγωγής της 4ης συνιστώσας του χρόνου, στο ήδη παραδεκτό μοντέλλο του τρισδιάστατου πεδίου. Επίσης με την παράλληλη ραγδαία ανάπτυξης των Η/Υ, ετέθησαν οι βάσεις για την επίλυση μη γραμμικών πολυπλόκων εξισώσεων. Γιαυτό το λόγο αναπτύχθηκαν και εφαρμόσθηκαν πολλές θεωρίες όπως η ειδική θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν, την οποία ακολούθησαν η κβαντική θεωρία, η αποκωδικοποίηση του DNA, η ανάπτυξη της θεωρίας του χάους και της πολυπλοκότητας οι οποίες απελευθέρωσαν την Επιστήμη από τις συμβατικότητες ότι ο κόσμος είναι απλός, υλικός, προβλέψιμος και κυβερνάται από καθολικούς νόμους της μηχανικής.

Η θεωρία του χάους, μελετά τα σύνθετα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα και προσφέρει ένα θαυμάσιο τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών.

Το χάος είναι μια θεωρία η οποία μελετά τις μεταβολές των σύνθετων συστημάτων κατασκευάζοντας μοντέλα φυσικών συστημάτων με βάση της μαθηματικές έννοιες της αναδρομής, είτε με τη μορφή της αναδρομικής διαδικασίας, ή ενός συνόλου διαφορικών εξισώσεων, και ως τέτοια χρησιμοποιείται προσφέροντας ένα ισχυρό πλαίσιο για την ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης.

Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι η θεωρία του χάους δεν έχει και πρακτικές εφαρμογές. Οι τεχνικές της θεωρίας του χάους χρησιμοποιούνται σήμερα για την κατανόηση μοντέλων για βιολογικά συστήματα, τα οποία είναι βεβαίως τα πλέον χαοτικά συστήματα, που μπορεί να φανταστεί κανείς, για χρηματοοικονομικά και άλλα φαινομένα.

Στο 19ο Διεπιστημονικό Συνέδριο με θέμα το ΧΑΟΣ που πραγματοποιήθηκε πριν 15 ημέρες στο Πανεπιστήμιο Πειραιά αναπτύχθηκαν, εκτός των άλλων θέματα όπως Χάος και Δίκαιο, Χάος και Συνταγματική Τάξη, Χάος και Οικονομία, Χρηματιστηριακό Χάος, Χάος και Θέατρο, Χάος και Ποίηση, Χαοτική Πολυπλοκότητα του Αιγαίου που καταδεικνύουν την εμπλοκή της Θεωρίας του Χάους στην καθημερινή πραγματικότητα.

Τα σχολεία βέβαια, θεωρείται ότι ανήκουν στους πιο συντηρητικούς κοινωνικούς θεσμούς. Απαιτούνται πολλά χρόνια για να εισαχθούν οι νέες επιστημονικές θεωρίες και ιδέες στη δομή και στις διαδικασίες της σχολικής μάθησης. Αλλά τα βήματα της αλλαγής σήμερα επιταχύνονται. Στο 20ο αιώνα παρατηρείται μια ριζική αλλαγή των επιστημονικών αντιλήψεων για τη φύση, την πραγματικότητα και τη γνώση. Ενώ μέχρι τον 20ο αιώνα η αντίληψη του κόσμου ήταν μηχανική, νευτώνεια, η γένεση της θεωρίας της σχετικότητας, της κβαντομηχανικής, η ανακάλυψη του DNA και της θεωρίας του χάους και της πολυπλοκότητας οδηγεί τους επιστήμονες σε μια νέα πιθανο-θεωρητική αντίληψη του κόσμου και στην μελέτη του κόσμου ως σύνολο αλληλοεπιδρόντων οργανικών συστημάτων.

Τα σχολεία δεν έχουν ωστόσο δεχθεί την επίδραση αυτής της αλλαγής. Η εκπαίδευση στα σχολεία αλλά και τα Πανεπιστήμια βασίζεται ακόμη ως προς τη μορφή και την ουσία της στη νευτώνεια αντίληψη του κόσμου η οποία αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της τεχνολογίας και οδήγησε στην Επιστημονική Επανάσταση. Σήμερα παραμένει η ίδια, παρά τις επαναστατικές αλλαγές στη γνώση, που προαναφέραμε.

Αν και υπάρχουν παραλλαγές του σχολικού μοντέλου από χώρα σε χώρα οι διακυμάνσεις αυτές δεν είναι θεμελιακές. Τα Ευρωπαϊκά Πανεπιστήμια χρειάστηκαν πάνω από 100 χρόνια, μετά την ανακάλυψη της τεχνολογίας της ατμομηχανής για να μετασχηματιστούν από κέντρα θεολογικών αναζητήσεων σε οργανωμένα κέντρα επιστημονικής έρευνας και προετοιμασίας μηχανικών. Η εκπαίδευση τέλος του 20ου αιώνα σήμερα συνεχίζει να αγνοεί σε ένα μεγάλο βαθμό τις ανακαλύψεις στη σχετικότητα, στην κβαντική θεωρία και ακόμη περισσότερο στο χάος και την πολυπλοκότητα.

Κάθε ιστορική περίοδος πιστεύει ότι είναι οδηγός μιας συνταρακτικής αλλαγής. Στην αυγή του 21ου αιώνα έχουμε ιδιαίτερους λόγους να το πιστεύουμε. Είναι προφανές ότι οι πρόσφατες αλλαγές στις γνώσεις μας για τη φύση και τον άνθρωπο, στις μεθόδους έρευνας και την τεχνολογία μετασχηματίζουν γοργά τον τρόπο που ζούμε και μαθαίνουμε.

Μια κύρια επιστημονική ιδέα της εποχής μας, που ανακύπτει από την έρευνα σύνθετων συστημάτων που διαθέτουν δυνατότητα προσαρμογής είναι ότι η ανθρώπινη μάθηση είναι η κινητήρια δύναμη της εξέλιξης. Αυτό σημαίνει ότι η μάθηση μετατρέπεται σε κεντρική έννοια της κοινωνικής ανάπτυξης και αυτό θα επιταχύνει τον μετασχηματισμό του παραδοσιακού σχολείου σ' ένα νέο εκπαιδευτικό θεσμό που θα έχει μεγαλύτερες δυνατότητες προσαρμογής στη σύγχρονη πραγματικότητα.

Σ' αυτήν την κατεύθυνση σήμερα έχει αρχίσει να συμβάλει, πέραν από τις νέες προσεγγίσεις της διδακτικής των μαθηματικών, η οποία πρέπει να απαντήσει σε ερωτήματα, όπως:

- Ποια αξία δίνει η κοινωνία στο εκπαιδευτικό περιεχόμενο;
- Ποιος παράγει τα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται στο σχολείο;
- Ποιος διδάσκει και ποιος χρησιμοποιεί τα μαθηματικά;

και η σωστή χρήση της τεχνολογίας στην εκμάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών.

Η τεχνολογία προσφέρει νέους τρόπους διδασκαλίας των μαθηματικών για τις οποίες απαιτείται από τους διδάσκοντες η ικανότητα να χρησιμοποιούν τα εργαλεία της Τεχνολογίας για να αναπτύξουν, να ισχυροποιήσουν και να επεκτείνουν τη δυνατότητα κατανόησης των μαθηματικών από τους μαθητές. Αυτά τα εργαλεία περιλαμβάνουν υπολογιστές, εκπαιδευτικό λογισμικό, βιντεοδίσκους, CD-ROM, δίκτυα υπολογιστών. Επιτυγχάνεται η πρόσβαση και χρήση δεδομένων σε πραγματικό χρόνο, και άλλες εκπαιδευτικές τεχνολογίες. Από μόνη της όμως η τεχνολογία δεν λύνει το πρόβλημα της κατανόησης των μαθηματικών ούτε και είναι πάντοτε σίγουρο ότι αυτή βελτιώνεται και δεν καλλιεργεί απλά μια επιφανειακή μάθηση. Η παρουσία τους στον ευαίσθητο χώρο της εκπαίδευσης μπορεί να γίνει αποδεκτή μόνον όταν παιδαγωγικοί και διδακτικοί λόγοι συνηγορούν σε αυτό. Για παράδειγμα το εκπαιδευτικό λογισμικό το οποίο έχει αρχίσει να κατασκευάζεται για τις ανάγκες πολλών μαθημάτων και στο οποίο βασικό ρόλο παίζει η αξιοπιστία τους. Περισσότερη αξιοπιστία απαιτείται στα προγράμματα που συνθέτουν ένα εκπαιδευτικό λογισμικό, παρά στα προγράμματα ενός διαστημικού ταξιδιού. Οσον και αν αυτό δεν φαίνεται από την πρώτη στιγμή, οι καταστροφές που ενεργούνται σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι διαφορετικές αλλά το ίδιο τελειωτικές.

Παρ' όλο που η φύση των Μαθηματικών και οι κοινωνικές ανάγκες είναι οι δυνάμεις που καθοδηγούν τα πρόγραμματα σπουδών, οι ευκαιρίες που παρουσιάζονται από την τεχνολογία πρέπει να αποτυπώνονται στο περιεχόμενο των σχολικών Μαθηματικών. Οι αναθεωρήσεις στα αναλυτικά προγράμματα επιτρέπουν τη μείωση της έμφασης που αποδίδεται σε κεφάλαια που δεν κρίνονται πλέον σημαντικά, την προσθήκη κεφαλαίων που έχουν αποκτήσει νέα σημασία και την διατήρηση κεφαλαίων που εξακολουθούν να παραμένουν σημαντικά. Κατά την εφαρμογή των αναθεωρημένων αναλυτικών προγραμμάτων, ο χρόνος που αφιερώνεται και η έμφαση που αποδίδεται στα διάφορα κεφάλαια πρέπει να είναι ανάλογος με τη σημασία που έχουν αυτά τα κεφάλαια σε μία εποχή αυξημένης πρόσβασης στην τεχνολογία. Προτεραιότητα πρέπει να δίνεται στην εφαρμογή και την ανάπτυξή εκείνων των εφαρμογών εκπαιδευτικού υλικού που εκμεταλλεύονται τις δυνατότητες της τεχνολογίας. Η μελετημένη και δημιουργική χρήση της τεχνολογίας μπορεί να βελτιώσει κατά πολύ τόσο την ποιότητα του αναλυτικού προγράμματος όσο και την ποιότητα της εκμάθησης των μαθητών.

Οι μαθηματικοί έχουν σήμερα τη δυνατότητα να προγραμματίσουν τη χρήση της τεχνολογίας από μέρους των μαθητών τόσο για την εκμάθηση των Μαθηματικών όσο και για την Μαθηματική χρήση. Μία ανάπτυξη των ιδεών μπορεί να γίνει με τη μετάβαση από συγκεκριμένες εμπειρίες σε αφηρημένες Μαθηματικές ιδέες, εστιάζοντας στη διερεύνηση και ανακάλυψη νέων Μαθηματικών εννοιών και σε διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. Οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν πώς να χρησιμοποιούν την τεχνολογία σαν ένα εργαλείο για την επεξεργασία πληροφοριών, για την εικονική σύλληψη και επίλυση προβλημάτων, για την εξερεύνηση και δοκιμασία υποθέσεων, για την πρόσβαση σε δεδομένα και για την επαλήθευση των λύσεών τους. Η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν πότε και πώς να χρησιμοποιούν την τεχνολογία αποτελεσματικά εξαρτάται από τη διαρκή μελέτη της κατάλληλης Μαθηματικής ύλης.

Οι νέες τεχνολογίες εισάγουν στην εκπαίδευση νέους τρόπους διδασκαλίας όπως είναι η εξ αποστάσεως διδασκαλία- η ασύγχρονη διδασκαλία, διδασκαλία δηλαδή χωρίς δάσκαλο μέσω του διαδυκτίου.

Το Πανεπιστήμιο Πειραιώς ανταποκρινόμενο στις σύγχρονες απαιτήσεις έχει ενεργοποιειθεί, όπως και άλλοι φορείς, στους νέους αυτούς τρόπους διδασκαλίας.

- Συμμετέχει σε πρόγραμμα εξ αποστάσεως διδασκαλίας σε συνεργασία και το Πανεπιστήμιο Αιγαίου με την ΕΜΕ που σκοπό έχει την επιμόρφωση των Μαθηματικών στα νησιά του Αιγαίου Μυτιλήνη - Χίο - Σάμο - Ρόδο, που όπως είναι ευνόητον εξυπηρετεί και εθνικούς σκοπούς. Βέβαια οι δυσκολίες της διδασκαλίας των μαθηματικών στις νέες αυτές συνθήκες είναι μεγάλες.

Οι νέες τεχνολογίες θέλουν εκπαιδευτικούς με τεχνογνωσία με άλλη αντίληψη για τα ηλεκτρονικά μέσα τα οποία πρέπει να γίνουν εργαλεία μάθησης για τους ίδιους και τους μαθητές τους. Η εισαγωγή της νέας αυτής τεχνολογίας έχει και την ψυχολογική παράμετρο, καθόσον μπορούν να δημιουργηθούν προβλήματα στη διδασκαλία γιατί ο δάσκαλος δεν βρίσκεται στον ίδιο χώρο με το μαθητή του.

Η σχέση εκπαιδευόμενου - εκπαιδευτή απαιτεί αυξημένη προσοχή. Πρέπει για τα προηγούμενα να αναπτυχθεί ένας γόνιμος διάλογος μεταξύ των μελών της εκπαιδευτικής κοινότητας. Η εισαγωγή της νέας τεχνολογίας προσφέρει σε αυτούς που συμμετέχουν ένα πλήθος πληροφοριών που στα παλιότερα χρόνια δεν θα ήταν δυνατόν να αποκτηθούν. Ομως πρέπει να προσέξουμε στην αξιοποίηση των πληροφοριών αυτών στη σωστή κατεύθυνση γιατί αν δεν συμβεί αυτό κινδυνεύουμε να καταλήξουμε σε αντίθετα αποτελέσματα. Γιατί όχι μόνο στην εκπαιδευτική διαδιακασία, αλλά και γενικότερα σήμερα ο κόσμος κινδυνεύει να πάθει αυτό που αποκαλείται «πληροφορική συμφόρηση» με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται νέα επαγγελματα όπως αυτό του «ενδιάμεσου» των πληροφοριών, για να βοηθηθούν τα άτομα στην απόκτηση και χρήση της σωστής και απαραίτητης πληροφορίας.

Ετσι, ο ρόλος του εκπαιδευτικού, όπως τεκμηριώνουν σύγχρονες έρευνες, όχι μόνον αναβαθμίζεται αλλά και γίνεται δυσκολότερος.

Κατά συνέπεια όλα τα προγράμματα επιμόρφωσης των Μαθηματικών θα πρέπει να παρέχουν ευκαιρίες ώστε οι μαθηματικοί να αποκτούν την ικανότητα να διδάσκουν μαθηματικά σε περιβάλλοντα που είναι πλούσια σε Τεχνολογία και να μελετούν τη χρήση των υφισταμένων και αναδυόμενων τεχνολογιών. Η προετοιμασία των μαθηματικών απαιτεί ικανότητα να σχεδιάζουν τάξεις με ενσωματωμένη τεχνολογία και εργαστηριακά μαθήματα που προωθούν την αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών, τεχνολογίας και δασκάλων. Η επιλογή, αξιολόγηση και χρήση της τεχνολογίας για διάφορες δραστηριότητες όπως προσομοίωση, δημιουργία και ανάλυση δεδομένων, επίλυση προβλημάτων, γραφική ανάλυση και γεωμετρικές κατασκευές, εξαρτάται από τον δάσκαλο. Ως εκ τούτου, η διαθεσιμότητα διαρκών επιμορφωτικών προγραμμάτων είναι απαραίτητη ώστε να βοηθηθούν οι δάσκαλοι να εκμεταλλευθούν πλήρως τη δύναμη της τεχνολογίας ως εργαλείου των Μαθηματικών.

Ο κόσμος σήμερα έχει μικρύνει και στα μαθηματικά και στη διδακτική τους και η μαθηματική κοινότητα έχει γίνει πιο συνεκτική. Οι κοινωνίες με διαφορετικές κουλτούρες, πολιτισμική και μαθηματική παράδοση τείνουν να γίνουν συγκοινωνούντα δοχεία.

Εδώ υπάρχει ο κίνδυνος της απώλειας της ταυτότητας κάθε κοινωνίας στο όνομα της εξυπηρέτησης της λεγόμενης παγκοσμιότητας. Καθημερινά βλέπουμε να εισάγονται πολλές φορές άκριτοι τρόποι διδακτικής, να γίνεται συρρίκνωση της κλασσικής μαθηματικής παιδείας (Γεωμετρίας) και διδασκαλία νέων κεφαλαίων δηλαδή βλέπουμε συνεχώς τα τελευταία 20 χρόνια η ύλη των μαθηματικών να αυξάνεται δυσανάλογα με το διατιθέμενο χρόνο. Διότι εφόσον η παιδεία και ειδικότερα η Μαθηματική παιδεία έχει ως στόχο αφ' ενός μεν να εφοδιάσει τους μαθητές με την απαραίτητη υποδομή για την κατανόηση και αφομοίωση της σύγχρονης επιστήμης και τεχνολογίας και αφ' ετέρου να καλλιεργήσει το κριτικό πνεύμα των μαθητών, δεν είναι η έκταση της διδασκόμενης ύλης η οποία θα βοηθήσει στους δύο παραπάνω στόχους αλλά πως θα διδαχθεί το αντίστοιχο αντικείμενο.

Κατά συνέπεια η συνεχής μεγένθυση της διδακτέας ύλης και μάλιστα σε βάρος βασικών κλάδων των μαθηματικών όπως για παράδειγμα της γεωμετρίας δεν συνεισφέρει στην όλη προσπάθεια της βελτίωσης της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στην προσπάθεια αυτή μπορούν να βοηθήσουν ακόμη:

- Τα σχολικά βιβλία τα οποία δεν μπορεί να είναι η αποκλειστική πηγή γνώσης για τους μαθητές. Το βιβλίο θα πρέπει να αποτελεί μια μόνο από τις πολλές και διαφορετικές πηγές γνώσεις προσιτή στο μαθητή. Ενα καλό σχολικό μαθηματικό βιβλίο σε συσχετισμό με άλλο πλούσιο υλικό, θα βοηθήσει τους μαθηματικούς να δώσουν έμφαση σε ενδιαφέρουσες μαθηματικές ιδέες, να τους ελευθερώσουν από κουραστικές επαναλήψεις και τους μαθητές να εφαρμόζουν έξυπνες ιδέες σε δύσκολα προβλήματα.
- Μια συντονισμένη εισαγωγή της έρευνας στην εκπαίδευση. Σήμερα γενικά δεν υπάρχει αποτελεσματική συνεργασία μεταξύ των ανθρώπων της εκπαίδευσης και των ανθρώπων της έρευνας με συνέπεια τα προϊόντα της εκπαιδευτικής έρευνας που διεξάγεται ή να μην είναι αυτά που αναμένονται από τους ανθρώπους της καθημερινής πρακτικής ή να μην γίνονται γνωστά και προσιτά σε αυτούς.
- Η συστηματική και οργανωμένη επιμόρφωση των μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί μέσα από επιμορφωτικά προγράμματα έχουν τη δυνατότητα να συνειδητοποιήσουν ότι για να πετύχουν το ρόλο τους θα πρέπει να επιμορφώνονται και να βελτιώνονται συνεχώς. Η διαδικασία μέσω της οποίας οι εκπαιδευτικοί ανανεώνουν τις διδακτικές τους μεθόδους, τη

γνώση και τα «πιστεύω» τους σχετικά με το ρόλο τους και το διδακτικό τους αντικείμενο είναι ουσιαστικά μια μαθησιακή διαδικασία, μέσα από την οποία επιτυγχάνεται η συνεχής βελτιώση των ιδίων και του έργου που επιτελούν.

Στη μαθηματική έρευνα σήμερα, και γενικότερα στη μελέτη θεμάτων των μαθηματικών και θεμάτων μαθηματικής παιδείας και εκπαίδευσης, πέρα από τα Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα και τους ερευνητές τους, που έχουν μια πολύ σημαντική παρουσία στον ελληνικό και διεθνή χώρο, όχι μόνον στα αυστηρά μαθηματικά γνωστικά αντικείμενα αλλά και σε γενικότερα θέματα διδακτικής, φιλοσοφίας και ιστορίας των μαθηματικών, μερικοί από τους οποίους, απ' ότι βλέπω, είναι παρόντες σε αυτό το συνέδριο, η ΕΜΕ και τα παραρτήματα της έχει μια σημαντική συμμετοχή και παρουσία.

Στις δραστηριότητες του Παραρτήματος της Χίου που μας φιλοξενεί αυτές τις ημέρες μπορούμε να συμπεριλάβουμε την έκδοση « Οι μαθηματικοί της Χίου» στους οποίους περιλαμβάνονται δύο μεγάλοι μαθηματικοι της αρχαιότητας, ο Ιπποκράτη ο Χίος, ένας από τους πιο φημισμένους γεωμέτρες της εποχής του και ο Οινοπίδης ο Χίος περίφημος μαθηματικός και αστρονόμος, και οι διακεκριμένοι Χιώτες μαθηματικοί, ο Εμμανουήλ Γλυζούνης , ο Κωνσταντίνος Γορδάτος-Λίλας και ο Κωνσταντίνος Βαρδαλάχος που εμφανίστηκαν κατά την Τουρκοκρατία.

Εξάλλου η βιβλιοθήκη του Κοραή εδώ στη Χίο διαθέτει μια σημαντική συλλογή από σπουδαία βιβλία του 17ου -18ου-19ου αιώνα που εκδόθηκαν σε γνωστούς για την εποχή τους εκδοτικούς οίκους στην Κωνσταντινούπολη, στην Αθήνα, στην Κέρκυρα, στο Παρίσι, στη Βιέννη, στην Τεργέστη, στο Λονδίνο, στη Βοστώνη, στη Φλωρεντία, στο Βερολίνο, στο Μιλάνο, στη Λυών, στο Εδιβούργο και αλλού.

Αγαπητοί Συνάδελφοι,

Εφέτος, εμείς οι μαθηματικοί γιορτάζουμε τα 80 χρόνια της Εταιρείας μας. 80 χρόνια δημιουργικής πορείας και προσπάθειας.

Οι καθηγητές Ιωάννης Χατζιδάκης και Δημήτρης Αιγινίτης ήταν οι πρώτοι επίτιμοι πρόεδροί της που εκλέχθηκαν ομόφωνα από τα 93 ιδρυτικά της μέλη στην πρώτη της γενική συνέλευση που πραγματοποιήθηκε στις 15 Απριλίου 1919.

Στη συνέχεια εκλέχθηκε το πρώτο διοικητικό συμβούλιο με πρόεδρο τον καθηγητή Ν.Χατζιδάκη και αντιπροέδρους τους καθηγητές Γ. Ρεμούνδο και Π. Ζέρβο και Γενικό Γραμματέα τον καθηγητή Ν. Σακελαρίου, ο οποίος από το 1939 μέχρι το 1955 διετέλεσε και πρόεδρος της ΕΜΕ.

Στις 27 Μαΐου του 1918 έγινε η πρώτη δημόσια εμφάνιση της Εταιρείας στην οποία, μίλησαν ο πρόεδρος Ν. Χατζηδάκης με μικρή εισήγηση αναφερόντας μεταξύ άλλων «την ανάγκη ελάττωσης του μεγάλου ποσοστού των στοιχειωδών λεπτομερειών με τις οποίες υπερφορτώνουμε τους παιδικούς εγκεφάλους», ο αντιπρόεδρος Γ. Ρεμούνδος «περί του χαρακτήρος και την χρησιμότητα των μαθηματικών και ο Γενικός Γραμματεάς Ν. Σακελλαρίου «περί του πως θα ενισχύσουμε τη σπουδή των μαθηματικών», θέματα επίκαιρα και σήμερα ακόμη.

Η ΕΜΕ συνεχίζοντας την προσπάθεια που ξεκίνησαν οι πρωτοπόροι μαθηματικοί που αναφέραμε εντείνει σήμερα τις προσπάθειές της με βασικού στόχους μια μαθηματική παιδεία του 21ου αιώνα συντονισμένη με τις ανάγκες της ελληνικής κοινωνίας και τις απαιτήσεις της σύγχρονης ελληνικής πραγματικότητας και δημιουργεί οργανωτικό-λειτουργικές δομές άμεσης επικοινωνίας και συνεργασίας των μελών των επιστημονικών φορέων.

Τέλος, στις πολλές και πολύ σημαντικές δραστηριότητες της ΕΜΕ, το δελτίο, τους πετυχημένους διαγωνισμούς που ξεκίνησαν το 1933, τις εκδόσεις, τα βιβλία, την τράπεζα θεμάτων με εξασφάλιση πρόσβασης σε όλους τους συναδέλφους, μέσω του διαδικτύου Internet, περιλαμβάνεται και το σημερινό 15ο Πανελλήνιο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στις νέες Εκπαιδευτικές συνθήκες, για το οποίο εύχομαι να έχει ΚΑΛΗ ΚΑΙ ΜΕΓΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.

Σας ευχαριστώ