Author: Κ. Ζώης

Title: Η Αξιωματική Μέθοδος στη Γεωμετρία.

Abstract: Γίνεται μια προσπάθεια να διαφωτιστεί η Αξιωματική Μέθοδος, η εφαρμογή της στη Γεωμετρία και ποιές ιδιότητες οφείλουν να ικανοποιούν τα αξιώματα ενός αποδεικτικού Αξιωματικού συστήματος.

«Η συνήθης δ᾽ αφ᾽ ετέρου συντηρητικότης των Πανεπιστημίων απομάχεται πάντοτε την αφιέρωσιν εις την Ιστορίαν της Επιστήμης μιας έδρας καθηγεσίας ισοτίμου προς τα άλλα μαθήματα της ανωτέρας εκπαιδεύσεως» (Ημερολ. της Μεγάλης Ελλάδος, 1931, σελ. 526), και σε ένα άλλο σημείο.

«Η Ιστορία των Επιστημών ως ιδιαιτέρα επιστήμη και ως ειδικόν μάθημα της Φυσικομαθηματικής Σχολής: Αλλά τι κοινόν μεταξύ της συγχρόνου επιστημονικής ζωής και του παρελθόντος; Αλλ᾽ η διδασκαλία των παλαιών δεν είναι επιστήμη, της επιστήμης δε την μάθησιν επαγγελλέται το Πανεπιστήμιον, την μύησιν δηλονότι εις την αλήθειαν της συγχρόνου επιστημονικής ερεύνης. Αυτοί ήταν οι στερεότυποι αφορισμοί κατά των ιστορικών σπουδών της επιστήμης», (από το βιβλίο «Εισαγωγή εις την Ιστορίαν των Φυσικών Επιστημών», 1938, σελ. γ).


ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΙΣ ΤΗΝ

ΙΣΤΟΡΙΑΝ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΥΠΟ

ΜΙΧΑΗΛ Κ. ΣΤΕΦΑΝΙΔΟΥ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

1938

Ο Μιχαήλ Στεφανίδης παρά τις όχι και τόσο ευνοϊκές συνθήκες έριξε γόνιμο σπόρο που σίγουρα θα φέρει καρπούς όταν γίνει συνείδηση και στη χώρα μας ότι το κατανοώ δεν είναι συνώνυμο του καταπίνω.

Η ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κ. Ζώης

Μαθηματικός: Θεσσαλονίκη

Μια προσπάθεια να διαφωτιστεί η Αξιωματική μέθοδος, η εφαρμογή της στη Γεωμετρία και ποιες ιδιότητες οφείλουν να ικανοποιούν τ᾽ Αξιώματα ενός αποδεκτού Αξιωματικού συστήματος.

Η Γεωμετρία στην αρχική της μορφή ήταν μια συλλογή από σκόρπιες, ασύνδετες φαινομενικά μεταξύ τους, εμπειρικές γνώσεις που συνιστούσαν την τεχνική της μέτρησης τμημάτων της γήινης επιφάνειας και όγκων. Η συσσώρευση όμως εμπειρικών γνώσεων έφτασε κάποτε σε σημείο που νομοτελειακά έπρεπε να προκύψουν ποιοτικές εταβολές που συνδέθηκαν με τον τροπο θεμελίωσης, διάρθρωσης και έρευνας της 'εωμετρίας. Το ποιοτικό αυτό άλμα πραγματοποιήθηκε από τους αρχαίους Έλληνες οφούς και κορυφώθηκε με τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που θεμελίωσε την απαγωγιή ή παραγωγική ή αξιωματική μέθοδο για τη σπουδή της Γεωμετρίας, που πήρε έσι τη μορφή λογικού οικοδομήματος απαλλαγμένου από τα δεσμά της εποπτείας. Τα Στοιχεία» του Ευκλείδη ήταν για 2000 περίπου χρόνια το βασικό σύγραμμα της Γεμετρίας. Στους νεότερους όμως χρόνους τα «Στοιχεία» δέχτηκαν ισχυρή κριτική, την προσπάθεια των γεωμετρών να απαλειφτούν τα ασθενή σημεία που παρουσιάζοται σ' αυτά. Σαν αποτέλεσμα της προσπάθειας αυτής έχουμε από το ένα μέρος μια αυστηρότερη θεμελίωση της Ευκλείδιας Γεωμετρίας που πραγματοποιήθηκε από τον Hilbert κυρίως, με το βιβλίο του «Grundhagen der Geometrie» και από το άλλο την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων Γεωμετριών, όπως η Γεωμετρία του Lobatchevsky και η Γεωμετρία του Riemann, που γεννήθηκαν κυρίως από την άκαρπη για πολλούς αιώνες προσπάθεια των γεωμετρών ν' αποδείξουν το 5ο Αξίωμα των παραλλήλων του Ευκλείδη. Οι ανακαλύψεις αυτές αποτέλεσαν ορόσημο στην Ιστορία της Γεωμετρίας και στη μαθηματική σκέψη γενικότερα.

Η Γεωμετρία, όπως διαμορφώθηκε στις μέρες μας, είναι μια αλληλουχία από προτάσεις (ο όρος πρόταση χρησιμοποιείται με την έννοια που τον δέχεται η Λογική δηλ. μια έκφραση αληθής ή ψευδής) έτσι ώστε η αλήθεια κάθε μιας ν' απορρέει λογικά, δηλ. με τη βοήθεια των νόμων της Λογικής, από προηγούμενες, που η αλήθεια τους είναι ήδη αποδεκτή. Τη διαδικασία αυτή ονομάζουμε απόδειξη. Πρόταση της οποίας την αλήθεια εδραιώνουμε με τη διαδικασία της απόδειξης λέγεται Θεώρημα ή μερικές φορές Λήμμα, στην περίπτωση που προηγείται ενός σπουδαίου Θεωρήματος και βοηθάει στην απόδειξή του, ή Πόρισμα, αν η αλήθεια του απορρέει άμεσα από ένα θεώρημα, οπότε το ακολουθεί. Τα Θεωρήματα της Γεωμετρίας και γενικότερα κάθε μαθηματική πρόταση διατυπώνεται υπό μορφή υποθετικής πρότασης κατά το σχήμα:

αν ... (υπόθεση), τότε .... (συμπέρασμα)

π.χ. «αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες» είναι ίσες.

Συνηθέστατα, όμως, ένα Θεώρημα εκφράζεται σαν διατύπωση ενός συμπεράσματος, π.χ. «οι γωνίες οι προσκείμενες στη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες».

Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε, αν θέλουμε να το ξαναδιατυπώσουμε υπό μορφή υποθετική.

Αν προσπαθήσουμε ν' αποδείξουμε κάθε γεωμετρική πρόταση γρήγορα θ' αντιληφθούμε ότι δεν μπορούμε να τις αποδείξουμε όλες. Μοιραία θα καταλήξουμε σε προτάσεις που δεν μπορούν να στηριχτούν λογικά σε άλλες προγενέστερες και φυσικά αυτές πρέπει ν' αποτελέσουν τη βάση ολόκληρου του Γεωμετρικού μας οικοδομήματος. Τις βασικές αυτές προτάσεις ονομάζουμε Αξιώματα και τις θεωρούμε «εξ υποθέσεως» αληθείς. Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε ότι, εκφράζουν εμπειρικές αλήθειες που επαληθεύονται μόνο σε περιορισμένες περιοχές του χώρου. Η ανάγκη της ύπαρξη Αξιωμάτων είχε γίνει αντιληπτή από τον Ευκλείδη, που προσπάθησε να στηρίξει ολό κληρο το οικοδόμημα της Γεωμετρίας στα παρακάτω πέντε Αξιώματα:

α΄ Ηιτήσθω από παντός σημείου επί παν σημείον ευθείαν γραμμήν αγαγείν

β΄ και πεπερασμένην ευθείαν κατά το συνεχές επ᾽ ευθείας εκβαλείν

γ΄ και παντί κέντρω και διαστήματι κύκλου γράφεσθαι

δ΄ και πάσας τας ορθάς γωνίας ίσας αλλήλαις είναι.

ε΄ και εάν τις δυο ευθείας ευθεία εμπίπτουσα τας εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίας δυο ορθών ελάσσονας ποιή, εκβαλλομένας τας δυο ευθείας επ᾽ άπειρον συμπίπτουν εφ᾽ α μέρη εισίν αι των ορθών ελάσσονες.

Τ᾽ Αξιώματα και γενικότερα κάθε πρόταση, αναφέρονται σ᾽ ένα αριθμό αντικειμένων και σε σχέσεις μεταξύ αυτών. Τ᾽ αντικείμενα αυτά, που είναι σε τελευταία ανάλυση εξιδανικεύσεις αντικειμένων του φυσικού κόσμου, αποτελούν τις γεωμετρικές έννοιες ή γεωμετρικούς όρους, που βρισκόμαστε στην ανάγκη να ορίσουμε. Όμως, αν επιχειρήσουμε να ορίσουμε όλες τις γεωμετρικές έννοιες γρήγορα θ᾽ αντιληφθούμε ότι μερικές δεν είναι δυνατόν να οριστούν, μια και για να ορίσουμε κάποια έννοια χρειαζόμαστε άλλες που ήδη έχουμε ορίσει. Τις απλούστατες αυτές γεωμετρικές έννοιες (όρους) που δεν ορίζονται ονομάζουμε πρωταρχικές(ους). Με τον ίδιο συλλογισμό καταλήγουμε σε σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών εννοιών που δεν μπορούμε να ορίσουμε. Μπορούμε λοιπόν να μιλάμε και για πρωταρχικές σχέσεις.

Ο Ευκλείδης, αν και είχε αντιληφθεί την ανάγκη των Αξιωμάτων, δεν είχε αντιληφθεί την ανάγκη των πρωταρχικών όρων και σχέσεων. Προσπάθησε να ορίσει τα πάντα και φυσικά απέτυχε. Αναφέρουμε μερικούς ορισμούς παρμένους από τα «Στοιχεία».

α΄ Σημείον εστι ου μέρος ουδέν

β΄ Γραμμή δε μήκος απλατές

γ΄ Γραμμής δε πέρατα σημεία

δ΄ Ευθεία γραμμή εστι, ήτις εξ ίσου τοις αφ᾽ ευατοίς σημείοις κείται.

....

Σήμερα έχει κατανοηθεί η ανάγκη ύπαρξης πρωταρχικών εννοιών και σχέσεων που το περιεχόμενό τους καθορίζεται από τ᾽ Αξιώματα και όχι από τη διαίσθηση. Έτσι σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις για τη θεμελίωση της Γεωμετρίας και γενικότερα κάθε μαθηματικού συστήματος σύμφωνα με την Αξιωματική μέθοδο είναι απαραίτητα τα εξής στοιχεία:

1. Οι πρωταρχικές έννοιες και οι πρωταρχικές σχέσεις.

2. Οι οριζόμενοι όροι (έννοιες).

3. Τ᾽ Αξιώματα.

4. Τα Θεωρήματα.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, αναχωρούμε από τις πρωταρχικές έννοιες και σχέσεις

:αι τ' Αξιώματα και με τη βοήθεια των νόμων της Λογικής καταλήγουμε σε συμπερα-σματα που διατυπώνουμε με τη μορφή Θεωρημάτων. Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται Αξιωματικό σύστημα (Α.σ.) ή Λογικό σύστημα (Λ.σ.).

Πότε ένα Λογικό σύστημα είναι συνεπές;

Τ' Αξιώματα ενός Λ.σ. δεν εκλέγονται τυχαία, αλλ' οφείλουν να ικανοποιούν την διότητα της συνέπειας. Ένα Α.σ. λέγεται συνεπές, αν δεν οδηγεί σε Θεωρήματα που α έρχονται σε αντίφαση με Αξιώματα ή Θεωρήματα που η αλήθεια τους έχει απο-δειχτεί ή ισοδύναμα, κάθε Θεώρημα του συστήματος είναι αληθές ή ψευδές. Αλλά εννιέται το ερώτημα: «πώς μπορούμε ν' αποφασίσουμε για το αν ένα σύστημα Αξι-ωμάτων είναι ή δεν είναι συνεπές;».

Μία και γενική μέθοδος για ν' απαντήσουμε στο καίριο αυτό ερώτημα δεν υπάρ-χει, ένας τρόπος είναι να περιμένουμε μέχρι ν' ανακαλύψουμε ένα Θεώρημα που να ρχεται σε αντίφαση με κάποιο από τα γνωστά Θεωρήματα ή Αξιώματα. Αυτό όμως ίναι καθαρή ματαιοπονία, γιατί δεν ξέρουμε αν και πότε θ' ανακαλυφθεί ένα τέτοιο Θεώρημα. Άλλος τρόπος, που κατά προτίμηση ακολουθούμε είναι, να δείξουμε ότι πάρχει ένα σύνολο, που τ' ονομάζουμε μοντέλο, τέτοιο ώστε, αφού δώσουμε με τη οήθεια των στοιχείων του μοντέλου, περιεχόμενο στις πρωταρχικές έννοιες και σχέ-σεις του δοσμένου συστήματος, να μεταφράσουμε τ' Αξιώματα του συστήματος σε ροτάσεις που ισχύουν για τα στοιχεία του μοντέλου. Έτσι, αν το μοντέλο είναι συ-νεπές, δεχόμαστε ότι και το Α.σ. που για τη συνέπειά του αμφιβάλλουμε είναι συνε-πές. Φυσικά, ούτε αυτός ο τρόπος εξασφαλίζει απόλυτα τη συνέπεια του Α.σ. αφού ποτέ δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι για τη συνέπεια του μοντέλου, π.χ. η συνέπεια ου Α.σ. της επίπεδης Γεωμετρίας του Lobatchevsky ανάγεται στη συνέπεια του Α.σ. ης επίπεδης Ευκλείδιας Γεωμετρίας, αφού με τη βοήθεια των στοιχείων της τελευ-ταίας κατασκευάσουμε μοντέλο, που το λέμε μοντέλο του Poincaré.

Τέλος η συνέπεια του Α.σ. της Ευκλείδιας Γεωμετρίας ανάγεται στη συνέπεια του Α.σ. των πραγματικών αριθμών. Ακόμη, οφείλουμε να τονίσουμε ότι, η συνέπεια εί-ναι μια απαραίτητη ιδιότητα ενός Α.σ. ενώ δε συμβαίνει το ίδιο για τις ιδιότητες που ' αναφέρουμε στη συνέχεια.

Πότε ένα Λογικό σύστημα είναι ανεξάρτητο;

Ένα Α.σ. λέγεται ανεξάρτητο, αν κάθε Αξίωμα του συστήματος είναι ανεξάρτητο, που σημαίνει ότι, ούτε αυτό ούτε η άρνησή του μπορούν να προκύψουν λογικά από α υπόλοιπα Αξιώματα του συστήματος. Για να διαπιστώσουμε την ανεξαρτησία ενός Αξιώματος, ενός Α.σ. θεωρούμε το σύστημα των Αξιωμάτων που αποτελείται από την άρνηση του υπό κρίση Αξιώματος και τα υπόλοιπα Αξιώματα του συστήματος. Αν το Α.σ. που προκύπτει είναι συνεπές, τότε το υπό κρίση Αξίωμα είναι ανεξάρτητο.

Μ' άλλα λόγια, για να εξακριβώσουμε, αν το Αξίωμα Δ ενός Α.σ. {Α, Β, Γ, Δ
είναι ανεξάρτητο, θεωρούμε το σύστημα {Α, Β, Γ, όχι Δ} και αν διαπιστώσου
ότι το σύστημα αυτό είναι συνεπές, τότε το Αξίωμα Δ είναι ανεξάρτητο. Πραγματικ
αν υποθέσουμε ότι το Δ δεν είναι ανεξάρτητο, τότε προκύπτει λογικά από τα Α,
Γ. Αλλά τότε το σύτημα {Α, Β, Γ, όχι Δ} περιλαμβάνει το Δ και μια πρόταση
ντιφατική της Δ, την όχι Δ, που σημαίνει ότι, το σύστημα {Α, Β, Γ, όχι Δ} δεν ε
ναι συνεπές αντίθετα με την υπόθεση.

Κλασσικό παράδειγμα στην Ιστορία των Μαθηματικών είναι το πρόβλημα της αν
ξαρτησίας του Αξιώματος των παραλλήλων του Ευκλείδη: «από σημείο εκτός ευθεί
μπορούμε να φέρουμε μια μόνο παράλληλη στη δοσμένη ευθεία». Η διατύπωση αυ
(Playfair) είναι ισοδύναμη με το ε΄ Αξίωμα των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Για πο
λούς αιώνες η ανεξαρτησία του Αξιώματος των παραλλήλων αμφισβητήθηκε απ
τους μαθηματικούς των επιχειρήσεων, χωρίς όμως να το κατορθώσουν, να πετύχου
απόδειξη της πρότασης αυτής. Η ανεξαρτησία του Αξιώματος των παραλλήλων καθ
ερώθηκε με την ανακάλυψη της Γεωμετρίας του Lobatchevsky και τη διαπίστωση τ
συνέπειας της Γεωμετρίας αυτής, μια και η Γεωμετρία του Lobatchevsky διατηρεί
λα τ' Αξιώματα της Ευκλείδιας Γεωμετρίας και αρνείται μόνο το Αξίωμα των π
ραλλήλων ή καλύτερα δέχεται την άρνηση του Αξιώματος των παραλλήλων δημ
ουργώντας έτσι ένα νέο Α.σ.

Ο μαθηματικός ενδιαφέρεται βεβαίως ένα Α.σ. να ικανοποιεί την ιδιότητα της αν
ξαρτησίας, γιατί επιθυμεί να στηρίξει το λογικό του σύστημα στον ελάχιστο δυνα
αριθμό Αξιωμάτων. Πολλές φορές όμως δεν απιτούμε την ιδιότητα αυτή για διδ
κτικούς κυρίως λόγους, όταν π.χ. η απόδειξη ενός Θεωρήματος που πρέπει να διδ
χτεί νωρίς είναι πολύ δύσκολη, δεχόμαστε το Θεώρημα αυτό προσωσινά σαν Αξίω
κι αργότερα, όταν οι σπουδαστές αποχτήσουν την απαιτουμένη μαθηματική ωριμότ
τα, μπορούμε να δείξουμε ότι το «Αξίωμα» αυτό δεν είναι ανεξάρτητο δηλ. είναι Θ
ώρημα.

Πότε ένα Λογικό σύστημα είναι πλήρες;

Μια άλλη ιδιότητα που επιθυμούμε να ικανοποιεί ένα Α.σ. είναι η πληρότητα. '
να Λ.σ. λέγεται πλήρες, αν κάθε πρόταση που εκφράζεται με όρους του συστήματ
και που δεν είναι Αξίωμα μπορεί ν' αποδειχτεί σαν αληθής ή ψευδής (δεν είναι αν
ξάρτητη). Π.χ. το σύστημα των Αξιωμάτων του Ευκλείδη δεν είναι πλήρες, γιατί
πρόταση: «η ευθεία που ενώνει ένα σημείο εσωτερικό του κύκλου μ' ένα εξωτερι
σημείο του τέμνει τον κύκλο» δεν είναι δυνατόν ν' αποδειχτεί αν είναι αληθής ή ό
με τη βοήθεια των πέντε αυτών Αξιωμάτων μόνο. Επίσης, αν το Αξίωμα των παρα
λήλων του Ευκλείδη παραληφθεί από το Α.σ. του Hilbert, τότε το σύστημα των Αξ
ωμάτων που απομένουν δεν είναι πλήρες, γιατί η πρόταση: «το άθροισμα των γωνι
τριγώνου είναι 180°» δεν μπορεί ν' αποδειχτεί σαν αληθής ή ψευδής. Για να γίνει

να μη πλήρες σύστημα πλήρες πρέπει να επισυνάψουμε σ' αυτό νέο ή νέα Αξιώματα χωρίς να προσθέσουμε νέες πρωταρχικές έννοιες. Είναι συχνά πολύ δύσκολο ν' αποδείξουμε με άμεσο τρόπο την πληρότητα ενός Α.σ. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος βασίζεται στην κατηγορικότητα του Α.σ. Για να γίνει όμως κατανοητή η έννοια της κατηγορικότητας είναι απαραίτητο να δώσουμε πρώτα την έννοια του ισομορφισμού δυο μαθηματικών συστημάτων. Αν υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων δυο συστημάτων έτσι ώστε να διατηρούνται όλες οι σχέσεις που υπάρχουν στο κάθε σύστημα, η αντιστοιχία λέγεται ισομορφισμός και τα δυο συστήματα ισόμορφα. Μπορούμε να λέμε ότι δυο ισόμορφα συστήματα είναι ταυτόσημα και μόνο τα ονόματα των στοιχείων τους διαφέρουν. Ένα Α.σ. λέγεται κατηγορικό, αν δυο οποιαδήποτε μοντέλα του είναι ισόμορφα. Μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι: «αν ένα Α.σ. είναι κατηγορικό, είναι πλήρες». Πραγματικά, ας δούμε τι θα συμβεί αν ένα Α.σ. είναι κατηγορικό, αλλ' όχι πλήρες. Υπάρχει στην περίπτωση αυτή μια πρόταση που δεν μπορούμε ν' αποδείξουμε αν αυτή ή η άρνησή της είναι αληθής. Ας θεωρήσουμε δυο μοντέλα του δοσμένου συστήματος έτσι ώστε στο ένα η πρόταση είναι αληθής, ενώ στο άλλο όχι. Αφού το δοσμένο Α.σ. είναι κατηγορικό, τα δυο μοντέλα είναι ισόμορφα, γεγονός που αποκλείει στο ένα η πρόταση να είναι αληθής, ενώ στο άλλο όχι. Άρα το σύστημα είναι πλήρες.

Όπως η ανεξαρτησία και η πληρότητα έτσι και η κατηγορικότητα δεν είναι μια απαραίτητη ιδιότητα ενός Α.σ. π.χ. αν G είναι τυχαίο σώμα και Q, R τα σώματα των ρητών και πραγματικών αριθμών ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, μπορούν να θεωρηθούν σαν μοντέλα του G που όμως δεν είναι ισόμορφα. Άρα το G δεν είναι κατηγορικό.

Μια εφαρμογή

Για να γίνουν κατανοητά τα παραπάνω, ας μελετήσουμε ένα απλό Α.σ.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο τύπους μη οριζομένων αντικειμένων, τα x και τα y και μια πρωταρχική σχέση που την εκφράζουμε με τη φράση: «ανήκει στο», που ικανοποιούν τ' Αξιώματα:

A_1. Για κάθε ζευγάρι αντικειμένων x, υπάρχει τουλάχιστον ένα y που ν' ανήκει σ' αυτά.

A_2. Για κάθε ζευγάρι αντικειμένων x, υπάρχει το πολύ ένα y που ν' ανήκει σ' αυτά.

A_3. Για κάθε ζευγάρι αντικειμένων y, υπάρχει τουλάχιστον ένα x που ν' ανήκει σ' αυτά.

A_4. Σε κάθε y ανήκουν τουλάχιστον τρία x.

A_5. Για κάθε y υπάρχει ένα τουλάχιστον x που δεν ανήκει σ' αυτό.

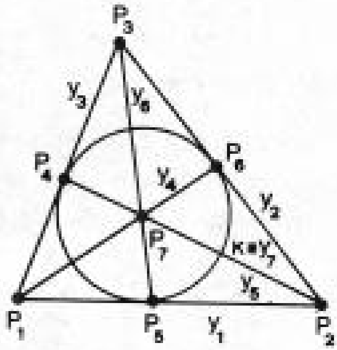
A_6. Υπάρχει τουλάχιστον ένα y.

Σε αντικείμενα x και y μπορούμε να δώσουμε όποια ερμηνεία θέλουμε. Μπορούμε τα x να τα λέμε «σημεία» και τα y «ευθείες» ή για να μη γίνει σύγχυση με τα σημεία και τις ευθείες της Ευκλείδιας Γεωμετρίας, μπορούμε τα x να τα λέμε «χάντρες» και τα y «σύρματα». Για να αισθητοποιήσουμε μ΄ ένα «σχήμα» τα παραπάνω, καταλήγουμε ύστερα από μερικούς πειραματισμούς στο (σχ. 1). Παρατηρούμε ότι το «σχήμα», περιέχει επτά ακριβώς «σημεία», τα P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 και επτά ακριβώς «ευθείες» $y_1 = P_1P_2$, $y_2 = P_2P_3$, $y_3 = P_1P_3$, $y_4 = P_1P_6$, $y_5 = P_2P_4$, $y_6 = P_3P_5$, $y_7 =$ ο κύκλος κ που ανήκουν τα $P_4P_5P_6$.

Ας υποθέσουμε ότι τα x είναι «παίκτες» και τα y «αθλητικοί όμιλοι», έχουμε ένα άλλο μοντέλο του δοσμένου Α.σ. που αισθητοποιείται από τον πίνακα 1.

	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η
I	ε	ε	ε				
II	ε			ε	ε		
III	ε					ε	ε
IV		ε		ε		ε	
V		ε			ε		ε
VI			ε	ε			ε
VII			ε		ε	ε	

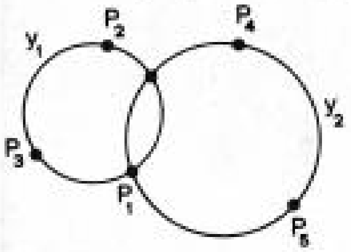
Πιν. 1



Σχ. 1

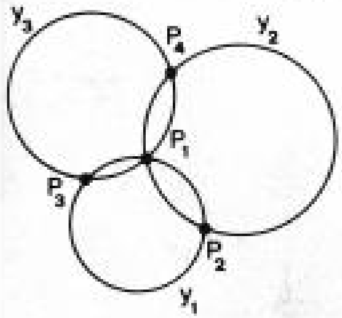
Στον πίνακα 1 με τα κεφαλαία γράμματα παριστάνουμε τους «παίκτες», ενώ με τους Λατινικούς αριθμούς τους «αθλητικούς ομίλους». Από το μοντέλο προκύπτει άμεσα η συνέπεια του Α.σ. αφού αναφέρεται σε αντικείμενα του φυσικού κόσμου και δεν υπάρχει σ΄ αυτόν ασυνέπεια.

Για να δείξουμε την ανεξαρτησία των Αξιωμάτων A_1, A_2, ..., A_6 καταφεύγουμε στη χρήση μοντέλων. Για να δείξουμε π.χ. ότι το A_1 είναι ανεξάρτητο αναζητούμε ένα μοντέλο, όπου τα A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 είναι αληθή ενώ το A_1 είναι ψευδές. Τέτοιο μοντέλο υπάρχει, είναι αυτό που περιγράφεται από το (σχ. 2), όπου τα x είναι τα σημεία P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 και y οι δυο κύκλοι κ_1, κ_2. Προφανώς το A_1 δεν ικανοποιείται, αφού δεν υπάρχει κύκλος στον οποίο ν' ανήκουν τα P_3 και P_4. Κατά συνέπεια το A_1 είναι ανεξάρτητο, αφού σ' ενάντια περίπτωση περίπτωση έπρεπε να είναι αληθές σαν απόρροια των άλλων Αξιωμάτων που είναι αληθή κι επομένως ν' αληθεύει για κάθε μοντέλο του συστήματος.



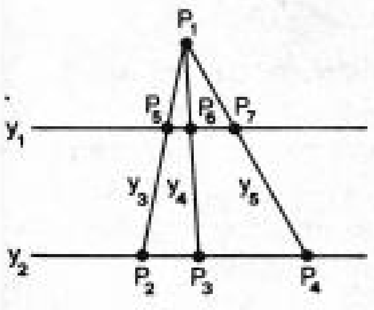
Σχ. 2

Για να δείξουμε την ανεξαρτησία του A_2 χρησιμοποιούμε το μοντέλο του (σχ. 3), όπου τα x είναι τα σημεία P_1, P_2, P_3, P_4 και y οι κύκλοι y_1, y_2, y_3. Στο μοντέλο αυτό το A_2 δεν ικανοποιείται, αφού υπάρχουν δυο κύκλοι, οι y_1 και y_2, που περιέχουν τα P_1, P_2, ενώ όλα τ' άλλα Αξιώματα ικανοποιούνται. Άρα το A_2 είναι ανεξάρτητο.



Σχ. 3

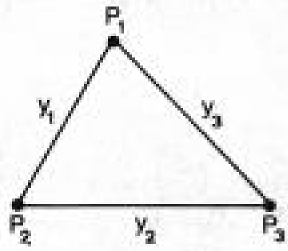
Για να δείξουμε την ανεξαρτησία του A_3 χρησιμοποιούμε το μοντέλο που περιγράφεται από το (σχ. 4), όπου $y_1 \parallel y_2$. Παρατηρούμε ότι το A_2 δεν ικανοποιείται (y_1, y_2 δεν έχουν κοινό σημείο, ενώ όλα τ' άλλα ικανοποιούνται.



Σχ. 4

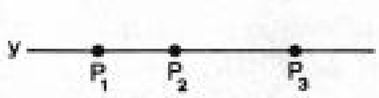
Για να δείξουμε την ανεξαρτησία του A_4 χρησιμοποιούμε το μοντέλο του (σχ. 5). Προφανώς το A_4 δεν ισχύει, ενώ όλα τ' άλλα Αξιώματα ισχύουν.

Για να δείξουμε ότι το A_5 είναι ανεξάρτητο χρησιμοποιούμε το μοντέλο του (σχ. 6). Προφανώς το A_5 δεν ισχύει, ενώ όλα τ' άλλα ικανοποιούνται. Άρα το A_5 είναι ανεξάρτητο.



Σχ. 5

Τέλος για να δείξουμε ότι το A_6 είναι ανεξάρτητο χρειαζόμαστε ένα μοντέλο που αποτελείται από ένα μόνο σημείο (σχ. 7). Στο μοντέλο αυτό το A_6 προφανώς δεν ικανοποιείται, ενώ όλα τ' άλλα ικανοποιούνται, αφού πρόκειται για υποθέσεις της μορφής $p \Rightarrow q$ με p ψευδές. Άρα το A_6 είναι ανεξάρτητο.



Σχ. 6

Σχ. 7

Για να εξετάσουμε την πληρότητα του δοσμένου Α.σ. εξετάζουμε την κατηγορικότητα του συστήματος. Ας ονομάσουμε τα μοντέλα που περιγράφονται από τον πίνακα

Ι και το σχ. 1 M_1, M_2 αντίστοιχα. Θεωρούμε την 1-1. και επί αντιστοιχία μεταξύ των «παικτών» του M_1 και των «σημείων» του M_2, έτσι ώστε:

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
P_2	P_3	P_6	P_5	P_1	P_7	P_4

Η σχέση: «οι παίκτες Α, Β, Γ ανήκουν στον «όμιλο» Ι, μεταφράζεται: «στα σημεία P_2, P_3, P_6 ανήκουν στην ευθεία y_2», κ.λπ.

Επίσης θεωρούμε την 1-1. και επί αντιστοιχία μεταξύ των «ομίλων» ου M_1 και των «ευθειών» του M_2, έτσι ώστε:

I	II	III	IV	V	VI	VII
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_2	y_1	y_5	y_6	y_3	y_7	y_4

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε σχέση ισχυρή στο M_1 μεταφράζεται σε σχέση ισχυρή στο M_2, επομένως τα μοντέλα M_1 και M_2 είναι ισόμορφα.

Θα μπορούσαμε να παρασυρθούμε και να συμπεράνουμε ότι, το Α.σ. είναι κατηγορικό και κατά συνέπεια πλήρες, αφού τα παραπάνω μοντέλα είναι ισόμορφα. Αυτό όμως δεν συμβαίνει γιατί υπάρχει μοντέλο, ας το πούμε M_3 του Α.σ. που δεν είναι ισόμορφο με τα προηγούμενα. π.χ. ας θεωρήσουμε τον πίνακα.

P_1	P_3	P_2	P_3	P_2	P_1	P_1	P_2	P_3	P_1	P_4	P_7	P_{10}
P_6	P_5	P_4	P_4	P_6	P_5	P_4	P_5	P_6	P_2	P_5	P_8	P_{11}
P_7	P_8	P_9	P_7	P_8	P_9	P_8	P_7	P_9	P_3	P_6	P_9	P_{12}
P_{10}	P_{10}	P_{10}	P_{11}	P_{11}	P_{11}	P_{12}	P_{12}	P_{12}	P_{13}	P_{12}	P_{13}	P_{13}

όπου P_i αντιπροσωπεύουν τα αντικείμενα x Α.σ. ενώ οι στήλες του πίνακα τ' αντικείμενα y. Παρατηρούμε ότι τ' Αξιώματα A_1, A_2, A_3, A_4; A_5, A_6 ικανοποιούνται δηλ. έχουμε πραγματικά ένα νέο μοντέλο του Α.σ. που προφανώς δεν είναι ισόμορφο με τα δυο προηγούμενα μοντέλα του συστήματος, αφού αυτό έχει περισσότερα x από τα άλλα. Άρα το δοσμένο Α.σ. δεν είναι κατηγορικό και κατά συνέπεια δεν είναι πλήρες. Πραγματικά, ας θεωρήσουμε την πρόταση: «σε κάθε y ανήκουν τρία ακριβώς x». Η πρόταση αυτή είναι αληθής στα μοντέλα M_1 και M_2, δεν ισχύει όμως στο μοντέλο M_3. Άρα η πρόταση αυτή δεν μπορεί ν' αποδειχθεί σαν αληθής ή ψευδής στο δοσμένο Α.σ. Αν σ' αυτό επισυνάψουμε σαν Αξίωμα την παραπάνω πρόταση διαπιστώνουμε ότι το νέο Α.σ. είναι κατηγορικό κι επομένως πλήρες.

Σύγχρονες αντιλήψεις για την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας

Απ᾽ όσα εκτέθηκαν γίνεται κατανοητή η ανάγκη μιας Αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας απαλλαγμένης από τις ατέλειες του Αξιωματικού συστήματος, όπως το διατύπωσε ο Ευκλείδης. Για το σκοπό αυτό εργάστηκαν κορυφαίοι μαθηματικοί των νεότερων χρόνων και διατυπώθηκαν πολλά Αξιωματικά συστήματα, ανάμεσα στα οποία το Α.σ. του Hilbert επεκράτησε σαν το πρόσφορο για τη διδασκαλία της Ευκλείδιας Γεωμετρίας στη Μέση Εκπαίδευση και γιατί είναι πλησιέστερο στο πνεύμα του Ευκλείδη.

Σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις για τη Γεωμετρία, δεχόμαστε την ύπαρξη τριών πρωταρχικών εννοιών, που τις λέμε «σημείο», «ευθεία» και «επίπεδο» και τριών πρωταρχικών σχέσεων, όπως η σχέση «ανήκει», «είναι (βρίσκεται)» και «είναι ίσο (ισούται)». Οι τρεις πρωταρχικές έννοιες και οι τρεις πρωταρχικές σχέσεις, αποχτούν περιεχόμενο από τ᾽ Αξιώματα που υποχρεώνονται να ικανοποιούν». Τ᾽ Αξιώματα που δίνουν περιεχόμενο στις παραπάνω έξι πρωταρχικές έννοιες και σχέσεις θεμελιώνουν μαζί μ᾽ αυτές το συνεπές Λογικό σύστημα που ονομάζουμε Ευκλείδια Γεωμετρία (Ε.Γ.). Ο Hilbert χώρισε τ᾽ Αξιώματα της Ε.Γ. στις παρακάτω πέντε ομάδες.

α) Αξιώματα θέσης ή σύνδεσης.
β) Αξιώματα διάταξης.
γ) Αξιώματα ισότητας.
δ) Αξιώματα συνέχειας.
ε) Αξίωμα των παραλλήλων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

1. Στοιχειώδης Γεωμετρία από ανώτερη σκοπιά. Ν. Αρτεμιάδη.
2. Ευκλείδου Γεωμετρία. Ε. Σταμάτη.
3. Foundations of Geometry C. R. Wylie, Jr.
4. The Foundations of Euclidean Geometry Henry George Forder.