Author: Π. Σίδερης

Title: Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού.

Abstract: Ορισμένες παρατηρήσεις για την διδασκαλία της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού στην Α΄ Λυκείου με αφορμή τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να χειρίζονται παραστάσεις με απόλυτες τιμές.

Creator: HDML

Ερωτήσεις		Απαντήσεις			
1. Αν β = σταθερή τότε	Α.	Τα ποσά	Ε, β	είναι	ανάλογα
2. Αν υ = σταθερό »	Β.	»	Ε, β	»	αντ. ανάλογα
3. Αν Ε = σταθερό »	Γ.	»	β, υ	»	ανάλογα
	Δ.	»	β, υ	»	αντ. ανάλογα
	Ε.	»	Ε, υ	»	ανάλογα
	Ζ.	»	Ε, υ	»	αντ. ανάλογα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Γ. ΦΛΟΥΡΗ: Η Αρχιτεκτονική της διδασκαλίας, άρθρο στο περιοδικό «Διάλογος», Ένωσης Φιλολόγων Ν. Ηρακλείου, τεύχος 4.
2. Γ. ΦΛΟΥΡΗ - R. GAGNE: Θεμελιώδεις αρχές της μάθησης και της διδασκαλίας, Αθήνα 1980.
3. Μ. ΚΑΣΣΩΤΑΚΗ: Η αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών, εκδόσεις Γρηγόρη 1981.
4. Gagné R.M. και Briggs L.J. Principles of instractionale Design, 2nd ed. New York: Holt, Rinehart and wiston 1979.
5. Σ. ΚΑΠΕΤΑΝΟΥ - ΜΑΚΡΙΝΟΥ: Θεωρίες μάθησης και διδακτική πράξη, περιοδικό Νεοελληνική παιδεία, Απρίλης 1985.
6. Σ. ΔΕΡΒΙΣΗ: Σύγχρονη Γενική Διδακτική, Θεσσαλονίκη 1989.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Π. Σίδερης
Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

Στον πρόσφατο **Πανελλήνιο Μαθηματικό Διαγωνισμό** της Ε.Μ.Ε. (6-11-87) δόθηκε για τους μαθητές της Α΄ Λυκείου το θέμα: «Δίδονται τέσσερις αριθμοί x_1, x_2, x_3, x_4 μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός και μικρότεροι από τη μονάδα. Να αποδείξετε ότι δυο τουλάχιστον απ' αυτούς έχουν απόλυτη τιμή διαφοράς μικρότερη από 1/3».

Αν ο μαθητής ταυτίζει τους πραγματικούς αριθμούς με τα σημεία του άξονα και την απόλυτη τιμή της διαφοράς με την απόσταση των δυο σημείων, η απάντηση έρχεται πολύ απλά, αφού τουλάχιστον δυο θα βρεθούν σε διάστημα μήκους, μικρότερου του 1/3, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Με αφορμή το παραπάνω και επειδή είναι γνωστό πόσο δύσκολα οι μαθητές μας μπορούν να χειρίζονται παραστάσεις με απόλυτες τιμές, γράφονται οι παρακάτω παρατηρήσεις για τη διδασκαλία της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού στην Α΄ Λυκείου.

Βέβαια στο 3ο Κεφάλαιο του σχολικού διδακτικού βιβλίου, τόσο ο ορισμός της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού όσο και η επεξεργασία των σχετικών προτάσεων δίνονται με συνέπεια. Πάντα όμως η έκφραση κάποιας θεωρίας με κάτι το πραγματικό ή εποπτικό βοηθά και στην κατανόηση και τη χρήση της θεωρίας.

Ο μαθητής της Α΄ Λυκείου ταυτίζει πλέον τους πραγματικούς αριθμούς με τα σημεία του άξονα. Θάταν χρήσιμο ο διδάσκων να μπορούσε να πει συμπληρωματικά και πέρα από αυτά που αναφέρονται στο βιβλίο, ότι τελικά απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού είναι ο αριθμός που εκφράζει την απόστασή του από το μηδέν. Με την παρατήρηση αυτή θα μπορούσε να εξηγήσει και εμπεδώσει εποπτικά διάφορες ιδιότητες.

1) Οι αντίθετοι αριθμοί αφού είναι συμμετρικά σημεία ως προς το μηδέν φυσικά θα ισαπέχουν από το μηδέν και έτσι έχουμε $|x| = |-x|$.

2) Εύκολα ο μαθητής βλέπει ότι για τη μεταβλητή x που $|x| < 4$ (που λέει πως απέχει από το μηδέν ο x λιγότερο από 4) θα πρέπει να βρίσκεται μεταξύ -4 και 4. Μια πρώτη έννοια της περιοχής του μηδενός με ακτίνα 4.

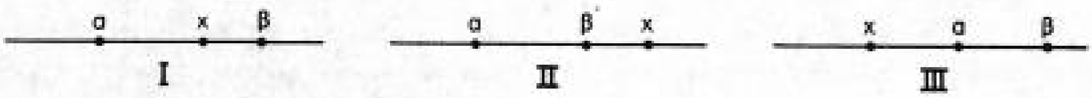
Παρόμοια δίνει εύκολη απάντηση στο τι σημαίνει $|x| > \alpha$ $(\alpha > 0)$ χωρίς να θυμάται τη γνωστή ισοδυναμία.

3) Στη συνέχεια επειδή η απόσταση δυο αριθμών (σημείων) α και β είναι $\alpha - \beta$ ή $\beta - \alpha$ (εξαρτάται από το αν είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha > \beta$) εύκολα καταλήγουμε ότι απόσταση εκφράζεται με το $|\alpha - \beta|$.

Τώρα μπορεί να ερμηνεύσει τι σημαίνει $|x - \alpha| < \beta$ και έχουμε την περιοχή του α με ακτίνα β.

4) Μπορούμε να δίνουμε παραδείγματα και προβλήματα και οι μαθητές να τα εκφράζουν με απόλυτες τιμές. Π.χ. αριθμός x βρίσκεται μεταξύ των αριθμών α και β. Πώς θα εκφραστεί με αποστάσεις; Φυσικά από την εποπτεία έχουμε:

$$|\alpha - x| + |\beta - x| = |\alpha - \beta|$$



\ν x είναι εκτός των α και β έχουμε ανάλογα το II ή III και αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|\alpha - x| - |\beta - x| = |\alpha - \beta| \quad \text{και} \quad |x - \beta| - |x - \alpha| = |\alpha - \beta|.$$

Στη συνέχεια μπορούμε να αποδείξουμε τις παραπάνω σχέσεις και σύμφωνα με τον ρισμό της απόλυτης τιμής.

Ακόμη μπορούμε να εξετάσουμε και να συγκρίνουμε τις $|x-\psi|$ και $|x| - |\psi|$.

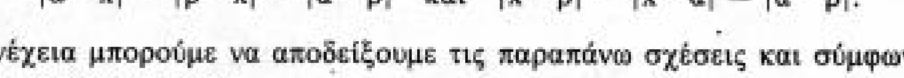
Είναι φανερό ότι διδάσκεται για πρώτη φορά θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας πως ιυτό θα το συναντήσει μελλοντικά ο μαθητής, γιατί τα μαθηματικά διδάσκονται σε :πειροειδή μορφή και γιατί πρέπει να εξυπηρετούν και κάποιους μελλοντικούς σκο-:ούς.

Οι παραπάνω νύξεις και παρατηρήσεις ετοιμάζουν και το έδαφος για τη σύγκλιση, ιπου εκεί γίνεται χρήση της απόλυτης τιμής. Ανάλογα με την τάξη που έχουμε μπο-ιούμε αν έχουμε και χρόνο, θα θέσουμε το εξής πρόβλημα: Τι πληροφορίες μας δίνει ι πρόταση:

«Για κάθε $\varepsilon > 0$ έχω μια μεταβλητή X που παίρνει τιμές ώστε να είναι $|x| < \varepsilon$».

Βέβαια μπορεί η μεταβλητή να παίρνει μόνο την τιμή 0 και να επαληθεύεται η πα-ιαπάνω πρόταση. Αν όμως $x \neq 0$ τότε εποπτικά αν πάρω αρχικά ένα ε, σύμφωνα με ην πρόταση θα υπάρχει τουλάχιστον μια τιμή του x στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$ έστω x_1.

Αν πάρω για ε τώρα το $|x_1|$, στο $(-|x_1|, |x_1|)$ θά έχω άλλο x έστω x_2, κ.ο.κ.



'ελικά θα έχουμε μια πρώτη πληροφορία ότι για κάθε ε στην περιοχή $(-\varepsilon, \varepsilon)$ υπάρ-:ουν άπειρες τιμές του x. Αλλά και μια δεύτερη πληροφορία: αφού πήρα ένα x, μετά να x_2 κ.ο.κ. βρίσκουμε ότι υπάρχει μια (ακολουθία) σημείων $x_1, x_2, x_3 \ldots$ που πλη-ιάζει το μηδέν. Αν είχα πάρει για αρχικό άλλο x_1 θα έβρισκα πιθανόν άλλη ακο-ουθία.

Όλες αυτές τις συμπεριφορές που βλέπει εποπτικά ο μαθητής εκφράζονται με το :ολύ «λιτό» $\forall \varepsilon > 0, \ |x| < \varepsilon$ που θα συναντήσει αργότερα. Φυσικά ανάλογα ιπορούμε να ζητήσουμε τι σημαίνει: «για κάθε $\varepsilon > 0$ να είναι $|x-\alpha| < \varepsilon$.

Τελειώνοντας θα προσθέσουμε ότι:

— Αν ο μαθητής συναντήσει μελλοντικά το $|z|$ στο επίπεδο Gaus θα δει πάλι ότι z| είναι η απόσταση του σημείου z από το μηδέν. Και πάλι επίσης το $|z_1 - z_2|$ εί-ιαι η απόσταση δυο σημείων.

— Το μήκος διανύσματος που χρησιμοποιούμε το σύμβολο $|\vec{\alpha}|$, αφού διάνυσμα ίναι διατεταγμένο ζεύγος σημείων, και το σύμβολο αυτό εκφράζει πάλι απόσταση.

— Η τριγωνική ιδιότητα εκφράζεται με απόλυτες τιμές. Οι ασκήσεις λύνονται πο-ύ ευκολότερα αν η απόλυτη τιμή θεωρηθεί σαν μήκος.

— Τέλος οι μαθητές μπορεί να συνειδητοποιήσουν ότι απόλυτη τιμή είναι ένας θε-ικός αριθμός αφού είναι μήκος.