Author: Σ. Γ. Ευριπιώτης

Title: Μέθοδος Προσδιορισμού Ακροτάτων Συνάρτησης με Βάση τη Μονοτονία.

Abstract: Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να αποδείξει οτι η μονοτονία μιας συνάρτησης είναι ένα ικανό κριτήριο για τον εντοπισμό και τον προσδιορισμό των ακροτάτων της συνάρτησης χωρίς τη χρήση της έννοιας της παραγώγου. Η μέθοδος καλύπτει τα τυπικά και ριζικά ακρότατα και αναπτύσσεται παρακάτω με τη μορφή προτάσεων πλαισιωμένων με παραδείγματα.

«ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ»

Σ. Γ. Ευριπιώτης
Μαθηματικός: Αθήνα

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να αποδείξει ότι η μονοτονία μιας συνάρτησης είναι ένα ικανό κριτήριο για τον εντοπισμό και τον προσδιορισμό των ακρότατων της συνάρτησης, χωρίς τη χρήση της έννοιας της παραγώγου. Η μέθοδος καλύπτει τα τυπικά και ολικά ακρότατα και αναπτύσσεται παρακάτω με τη μορφή προτάσεων πλαισιωμένων με παραδείγματα.

. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: A \to B$ $(A, B \subseteq \mathbb{R})$ και ένα ορισμένο στοιχείο x_0 του . Είναι δυνατό η αντίστοιχη τιμή $f(x_0)$ της f στο x_0, να είναι μεγαλύτερη ή μικρόρη:

- Από όλες τις άλλες τιμές της f στο A, ή
- από εκείνες μόνο τις τιμές της που αντιστοιχούν στα στοιχεία ενός συνόλου της μορφής $\pi(x_0, \delta) \cap A$, όπου $\pi(x_0, \delta) \underset{\text{ορ}}{=} (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $\delta > 0$ μια περιοχή του x_0.

Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις του $f(x_0)$ θα λέγεται αντίστοιχα:

- Ολικό ακρότατο της f στο A, ή
- τοπικό ακρότατο της f στο A.

Ειδικότερα έχουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Η συνάρτηση $f: A \to B$ παρουσιάζει στο $x_0 \in A$:

1. Ολικό μέγιστο $\overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \in A,\ f(x) \leqslant f(x_0)$.
2. Ολικό ελάχιστο $\overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \in A,\ f(x) \geqslant f(x_0)$.
3. Τοπικό μέγιστο $\overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, \delta > 0$ τέτοιο, ώστε $\forall x \in \pi(x_0, \delta) \cap A,\ f(x) \leqslant f(x_0)$.
4. Τοπικό ελάχιστο $\overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, \delta > 0$ τέτοιο, ώστε $\forall x \in \pi(x_0, \delta) \cap A,\ f(x) \geqslant f(x_0)$.

αραδείγματα

1ο Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 2$ έχει στο $x_0 = 0$ ολικό ελάχιστο το $f(x_0) = f(0) = 2$, διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(0) = 2 \leqslant x^2 + 2 = f(x), \quad \text{οπότε} \quad f(0) \leqslant f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2ο Η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 1 \\ 2 - x, & \text{αν } x \geqslant 1, \end{cases}$ έχει:

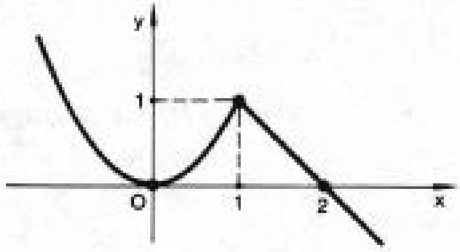
α) Στο $x_0 = 0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$, διότι για $\delta = 1$ ορίζεται η περιοχ $\pi(0, 1) = (0 - 1, 0 + 1) = (-1, 1)$ του στοιχείου 0, για την οποία ισχύει:

$$\forall x \in \pi(0, 1) \cap \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \geqslant 0 = f(0).$$

β) Στο $x_0 = 1$ τοπικό μέγιστο το $f(1) = 2 - 1 = 1$, διότι υπάρχει η περιοχ $\pi(1, 1) = (1 - 1, 1 + 1) = (0, 2)$ του στοιχείου 1, με ακτίνα $\delta = 1$, ώστε:

$$\forall x \in (0, 2) \cap \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant f(1).$$

Πράγματι, για το οποιοδήποτε x από το διάστημα $(0, 2) \cap \mathbb{R} = (0, 2)$, θα έχουμ (βλέπε σχ. 1):



Σχ. 1

$0 < x < 1$, οπότε $x^2 < 1$ και επομένως $f(x) < f(1)$

ή $1 \leqslant x < 2$, οπότε $-1 \geqslant -x > -2 \Leftrightarrow 2 - 1 \geqslant 2 - x > 2 - 2$

και επομένως πάλι είναι: $1 = f(1) \geqslant f(x)$.

Β. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ

Από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται ότι στην αναζήτηση των ακρότατων μια δοσμένης συνάρτησης έχουμε να αντιμετωπίσουμε δυο κυρίως επί μέρους προβλήμα τα:

α) Τον προσδιορισμό της θέσης x_0 όπου έχουμε ακρότατο, και

β) τον καθορισμό του είδους του ακρότατου (ολικό ή τοπικό).

Παρακάτω θα δούμε ότι η λύση αυτών των προβλημάτων μπορεί να στηριχθεί στο καθορισμό των διαστημάτων μονοτονίας της συνάρτησης (εφόσον υπάρχουν) διατυ πώνοντας και αποδεικνύοντας ορισμένες προτάσεις, που καλύπτουν όλες τις δυνατέ περιπτώσεις.

Στο τέλος αυτής της ενότητας δίνεται συγκεντρωτικός πίνακας με τα συμπεράσμα τα από τη μελέτη όλων των περιπτώσεων.

Πρόταση 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ (με $\alpha < \beta$) και ένα στοιχείο x_0 του διαστήματος (α, β). Ισχύουν οι συνεπαγωγές:

$$\alpha)\ \left.\begin{array}{l} f \uparrow \ \text{στο } (\alpha, x_0] \ \text{και} \\ f \downarrow \ \text{στο } [x_0, \beta) \end{array}\right| \Rightarrow f(x_0) \ \text{ολικό μέγιστο.}$$

$$\beta)\ \left.\begin{array}{l} f \downarrow \ \text{στο } (\alpha, x_0] \ \text{και} \\ f \uparrow \ \text{στο } [x_0, \beta) \end{array}\right| \Rightarrow f(x_0) \ \text{ολικό ελάχιστο.}$$

Απόδειξη: α) Από την υπόθεση η f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα (α, x_0), οπότε για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ θα είναι $x \leqslant x_0$ και $f(x) \leqslant f(x_0)$ (1).

Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0, \beta)$, οπότε για κάθε

$$x \in [x_0, \beta) \ \text{θα είναι} \ x \geqslant x_0 \ \text{και} \ f(x) \leqslant f(x_0) \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι: $\forall x \in (\alpha, \beta), \ f(x) \leqslant f(x_0)$.

Επομένως το $f(x_0)$ είναι ολικό μέγιστο για την f στο (α, β).

β) Όμοια.

Πρόταση 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ μη μονότονη στο (α, β) και ένα στοιχείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Τότε ισχύουν οι συνεπαγωγές:

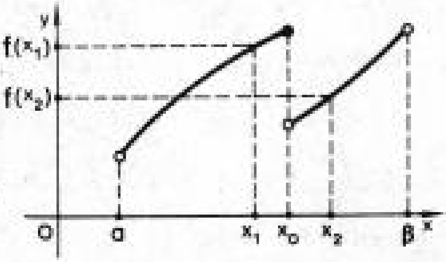
$$\alpha)\ \left.\begin{array}{l} f \uparrow \ \text{στο } (\alpha, x_0] \ \text{και} \\ f \uparrow \ \text{στο } (x_0, \beta) \end{array}\right| \Rightarrow f(x_0) \ \text{τοπικό μέγιστο.}$$

$$\beta)\ \left.\begin{array}{l} f \downarrow \ \text{στο } (x_0, \beta] \ \text{και} \\ f \downarrow \ \text{στο } (x_0, \beta) \end{array}\right| \Rightarrow f(x_0) \ \text{τοπικό ελάχιστο.}$$

Απόδειξη: α) Επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(\alpha, x_0]$ θα ισχύει: $f(x) \leqslant f(x_0), \ x \in (\alpha, x_0]$ (1).

Επίσης, επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα στα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και (x_0, β), αλλά όχι και στο (α, β) θα υπάρχουν δυο στοιχεία $x_1 \in (\alpha, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, \beta)$, ώστε να είναι:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (2) (βλέπε σχ. 2)*



Σχ. 2

(*) Για απλοποίηση του σχήματος πήραμε $\alpha, \beta > 0$, ενώ δεν είναι απαραίτητο.

Τώρα περιορίζουμε την f στο διάστημα $[x_1, x_2] \subseteq (\alpha, \beta)$ όπου ισχύουν:

$$f \uparrow \text{ στο } [x_1, x_0] \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0), \quad x \in [x_1, x_0] \qquad (3)$$

$$\text{και} \quad f \uparrow \text{ στο } (x_0, x_2] \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_2), \quad x \in (x_0, x_2] \qquad (4)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3), (4) μπορούμε να ενισχύσουμε την (2) ως εξής:

$$f(x_0) \geqslant f(x_1) \geqslant f(x_2) \geqslant f(x), \quad x \in [x_1, x_2]$$

Αν ονομάσουμε $\delta > 0$ το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$, τότε ορίζεται η περιοχή $\pi(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [x_1, x_2] \subset (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε να είναι $f(x_0) \geqslant f(x)$, $x \in \pi(x_0, \delta)$, οπότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο για την f.

β) ΄Ομοια.

Σχόλιο. Είναι φανερό ότι αν η f ήταν γνησία μονότονη και στο (α, β) δεν θα είχε ακρότατο στο (α, β).

Πρόταση 3.

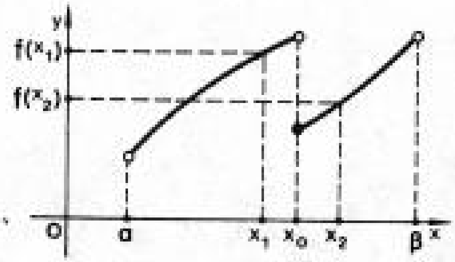
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ μη μονότονη στο (α, β) και ένα στοιχείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Τότε ισχύουν οι συνεπαγωγές:

α) $f \uparrow$ στο (α, x_0) και $f \uparrow$ στο $[x_0, \beta)$ $\Rightarrow$ $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο.

β) $f \downarrow$ στο (α, x_0) και $f \downarrow$ στο $[x_0, \beta)$ $\Rightarrow$ $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο.

Απόδειξη. α) Η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στα διαστήματα (α, x_0) και $[x_0, \beta)$, αλλά όχι και στο (α, β), οπότε θα υπάρχουν δυο στοιχεία $x_1 \in (\alpha, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, \beta)$, ώστε να είναι

$$f(x_1) \geqslant f(x_2) \qquad (1)$$ (βλέπε σχ. 3).



Σχ. 3

Αν περιορίσουμε τώρα την f στο $[x_1, x_2] \subset (\alpha, \beta)$ θα έχουμε:

$$f \uparrow \text{ στο } [x_1, x_0] \text{ άρα } f(x_1) \leqslant f(x), \quad x \in [x_1, x_0] \qquad (3)$$

$$\text{και} \quad f \uparrow \text{ στο } [x_0, x_2] \text{ άρα } f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \quad x \in [x_0, x_2] \qquad (4)$$

Με βάση τις σχέσεις (3), (4) η σχέση (1) ενισχύεται ως εξής:

$$f(x) \geqslant f(x_1) \geqslant f(x_2) \geqslant f(x_0), \quad x \in [x_1, x_2] \qquad (5)$$

Θεωρούμε το θετικό αριθμό $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$ και την περιοχή

$$\pi(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [x_1, x_2] \subset (\alpha, \beta) \quad \text{του στοιχείου } x_0.$$

Τότε σύμφωνα με τη σχέση (5) θα είναι $f(x) \geqslant f(x_0)$, $x \in \pi(\chi_0, \delta)$, δηλ. το $f(x_0)$ θα είναι τοπικό ελάχιστο της f.

β) Όμοια.

Πρόταση 4.

Αν είναι $\alpha < x_0 < \beta$ και $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, τότε ισχύουν οι συνεπαγωγές:

α) $f \uparrow$ στο $(\alpha, x_0]$ και
$f \downarrow$ στο (x_0, β), αλλά όχι και στο $[x_0, \beta)$ $\Rightarrow$ $f(x_0)$ όχι ακρότατο

β) $f \downarrow$ στο $(\alpha, x_0]$ και
$f \uparrow$ στο (x_0, β), αλλά όχι και στο $[x_0, \beta)$ $\Rightarrow$ $f(x_0)$ όχι ακρότατο

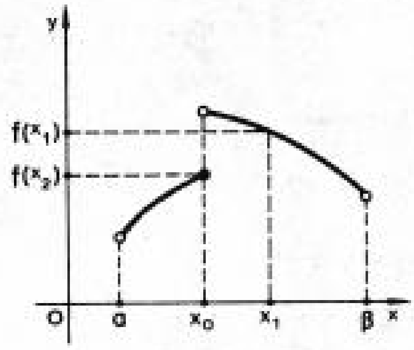
Απόδειξη: α) Από την υπόθεση είναι:

$f \uparrow$ στο $(\alpha, x_0]$, άρα $f(x) \leqslant f(x_0)$, $x \in (\alpha, x_0]$ (1)

Επίσης η f είναι γνήσια φθίνουσα στο (x_0, β), αλλά όχι και στο $[x_0, \beta)$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο $x_1 \in (x_0, \beta)$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(x_1) > f(x_0)$ (βλέπε σχ. 4).

Έτσι ορίζεται το διάστημα $(x_0, x_1]$, που είναι υποσύνολο του (x_0, β), οπότε θα είναι $f \downarrow$ στο $(x_0, x_1]$, που είναι υποσύνολο του (x_0, β), οπότε θα είναι $f \downarrow$ στο $(x_0, x_1]$ και επομένως

$$f(x) \geqslant f(x_1) > f(x_0), \quad x \in (x_0, x_1] \qquad (2)$$



Σχ. 4

Τώρα εύκολα συμνπεραίνουμε ότι στο διάστημα $(\alpha, x_1]$, άρα και στο υπερσύνολο του (α, β), το $f(x_0)$ δεν μπορεί να είναι μέγιστο ή ελάχιστο λόγω των σχέσεων (2) και (1) αντίστοιχα.

β) Όμοια.

Πρόταση 5.

Έστω ο αριθμός $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και η συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $(\alpha < \beta)$.
Ισχύουν οι συνεπαγωγές:

α) $f \downarrow$ στο (α, x_0), αλλά όχι και στο (α, x_0) και
$f \uparrow$ στο (x_0, β), αλλά όχι και στο $[x_0, \beta)$ $\Rightarrow$ $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο

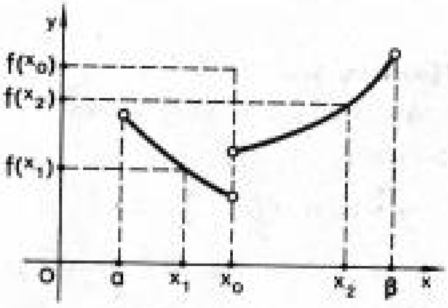
β) $f \uparrow$ στο (α, x_0), αλλά όχι και στο $(\alpha, x_0]$ και
$f \downarrow$ στο (x_0, β), αλλά όχι και στο $[x_0, \beta)$ $\Rightarrow$ $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο

Απόδειξη: α) Αφού η f είναι γνήσια φθίνουσα στο (α, x_0) και όχι στο $(\alpha, x_0]$, θα υπάρχει στοιχείο

$$x_1 \in (\alpha, x_0) \quad \text{με} \quad f(x_1) < f(x_0) \quad (1)$$

Επίσης η f είναι γνήσια αύξουσα στο (x_0, β) αλλά όχι στο $[x_0, \beta)$, οπότε θα υπάρχει $x_2 \in (x_0, \beta)$, τέτοιο, ώστε να είναι: $f(x_2) < f(x_0)$ (2)

Αν περιορίσουμε την f στο διάστημα $[x_1, x_2]$ (σχ. 5) θα έχουμε με βάση τις σχέσεις (1), (2) ότι:



Σχ. 5

$$f \downarrow \text{ στο } [x_1, x_0) \text{ άρα } \forall x \in [x_1, x_0), \; f(x) \leqslant f(x_1) < f(x_0) \quad (3)$$

$$\text{και } f \uparrow \text{ στο } (x_0, x_2] \text{ άρα } \forall x \in (x_0, x_2], \; f(x) \leqslant f(x_2) < f(x_0) \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι: $\forall x \in [x_1, x_2]$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
Επομένως το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.

β) Όμοια.

Παρατηρήσεις.

α) Η τοπικά μέγιστη ή ελάχιστη τιμή $f(x_0)$ της συνάρτησης συγκρίνεται, όπου είναι δυνατό, με τις άλλες τιμές της f για να εξεταστεί αν είναι και ολικά μικρότατη στο D(f), και αντίστροφα.

β) Ήδη έχει διαπιστώσει ο αναγνώστης ότι και στις δέκα περιπτώσεις, που αναφέρονται στις πέντε προηγούμενες προτάσεις, δίνονται κάποιες συνθήκες μονοτονίας της f σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0] \cup [x_0, \beta)$ και εξετάζουμε αν το $f(x_0)$ είναι ή όχι ακρότατο της f. Βέβαια οι δυνατές περιπτώσεις είναι 16 και δίνονται, με τα συμπεράσματά τους, στον επόμενο πίνακα:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(α, x_0)	↗	↗			↗	↗			↘	↘			↘	↘		
(α, x_0)			↗	↗			↗	↗			↘	↘			↘	↘
$[x_0, \beta)$	↘		↘		↗		↗		↘		↘		↗		↗	
(x_0, β)		↘		↘		↗		↗		↘		↘		↗		↗
$f(x_0)$	Ο.Μ.	—	—	Τ.Ε.	—	Τ.Μ.	Τ.Ε	—	—	Τ.Ε.	Τ.Μ.	—	Ο.Ε.	—	—	Τ.Μ.
Πρόταση	1α	4α		5β		2α	3α			2β	3β		1β	4β		5α

Εύκολα μπορεί να αποδείξει ο αναγνώστης (εργαζόμενος όπως στην πρόταση 4) ότι στις περιπτώσεις 3, 5, 8, 9, 12 και 15 του πίνακα δεν αντιστοιχούν ακρότατα.

Γ. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Η πρακτική σημασία των προτάσεων φαίνεται καθαρά στα επόμενα παραδείγματα.

1ο: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{αν} \quad x < -2 \\ -\dfrac{1}{4}x^2 + 2, & \text{αν} \quad x \geqslant -2 \end{cases}$

Θα προσδιορίσουμε τα ακρότατά της βρίσκοντας τα διαστήματα μονοτονίας της.
Είναι φανερό ότι η f είναι (σχ. 6):

α) Γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, -2)$, αλλά και στο $(-\infty, -2]$ διότι για κάθε $x \in (-\infty, -2)$ είναι

$$f(x) = -x-1 > -(-2)-1 = 1 = f(-2), \quad \text{δηλ.} \quad f(x) > f(-2), \quad x < -2.$$

β) Γνήσια αύξουσα στο $[-2, 0]$, διότι αν είναι

$$-2 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0, \quad \text{τότε} \quad x_1^2 > x_2^2 \quad \text{και} \quad f(x_1) < f(x_2) \quad \text{και}$$

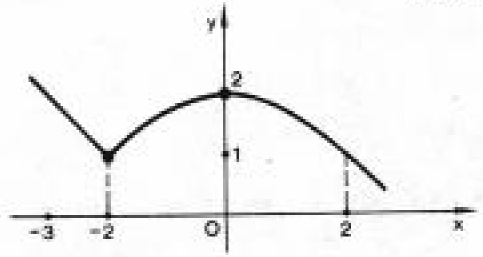
γ) Γνήσια φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, καθώς προκύπτει συνθετικά.

Έτσι, στα σημεία $x_1 = -2$ και $x_2 = 0$ που είναι «οριακές θέσεις» για τη μονοτονία της f, πιθανόν να αντιστοιχούν ακρότατα.

Σχ. 6

Πράγματι, έχουμε: $f \downarrow$ στο $(-\infty, -2]$
και $f \uparrow$ στο $[-2, 0]$

οπότε σύμφωνα με την πρόταση 1β, το $f(-2) = 1$ είναι ολικό ελάχιστο της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$.



Επίσης είναι: $f \uparrow$ στο $[-2, 0]$
και $f \downarrow$ στο $[0, +\infty)$

οπότε (πρόταση 1α) το $f(0) = 2$ είναι ολικό μέγιστο της f στο $[-2, +\infty)$.

Εδώ είναι απαραίτητο να εξετάσουμε αν τα ολικά ακρότατα που προέκυψαν είναι τέτοια και στο πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ της f. Όμως το $f(-2) = 1$, που είναι ολικό ελάχιστο της f στο $(-\infty, 0]$ δεν είναι ολικό και στο $\mathbb{R}$, διότι υπάρχει τιμή της f (π.χ. $f(4) = -2$) στο $\mathbb{R}$ μικρότερη από το $f(-2)$. Ακόμη, το $f(0) = 2$ δεν είναι ολικό μέγιστο της f και στο $\mathbb{R}$, διότι (π.χ.) $f(-4) = 3 > 2 = f(0)$.

2ο Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{με } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+4), & \text{αν } x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{αν } x \in (0, 2) \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$ η f είναι γνήσια αύξουσα, ενώ για το διάστημα $(0, 2)$ έχουμε:

Αν $x_1, x_2 \in (0, 2)$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1^2 < x_2^2$ και $\frac{1}{2}x_1^2 < \frac{1}{2}x_2^2$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$, γεγονός που σημαίνει ότι η f είναι $\uparrow$ στο $(0, 2)$.

Για τη μονοτονία της στο $[0, 2]$ παρατηρούμε ότι (σχ. 7):

α) Για $x = 1 \in (0, 2)$, είναι $0 < 1$, ενώ: $f(0) = 1 > \frac{1}{2} = f(1)$, και

β) Για $x = \frac{10\sqrt{3}}{9} \in (0, 2)$ είναι $\frac{10\sqrt{3}}{9} < 2$, ενώ $f\left(\frac{10\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{50}{27} > \frac{3}{2} = f(2)$

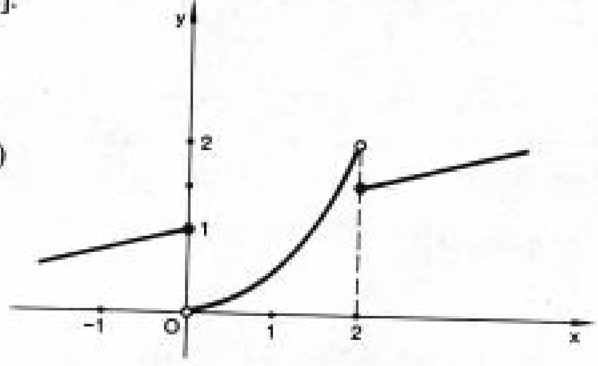
Επομένως η f δεν είναι $\uparrow$ και στο $[0, 2]$.

Συνοψίζοντας έχουμε:

$f \uparrow$ στο $(-\infty, 0]$
και $f \uparrow$ στο $(0, 2)$ οπότε (πρότ. 2α) το $f(0) = 1$ είναι τοπικό μέγιστο.

Ακόμη είναι $f \uparrow$ στο $(0, 2)$
και $f \uparrow$ στο $[2, +\infty)$

οπότε (πρότ. 3α) το $f(2) = \frac{3}{2}$ είναι τοπικό ελάχιστο.



Σχ. 7

Συγκρίνοντας τα τοπικά ακρότατα που προέκυψαν με τις άλλες τιμές της f παρατηρούμε ότι:

$$f(2) = \frac{3}{2} > 1 = f(0) \quad \text{και} \quad f(-4) = 0 < \frac{3}{2} = f(2)$$

οπότε τα ακρότατα f(0) και f(2) δεν είναι ολικά.

3ο: Θα αναζητήσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f: [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \to \mathbb{R}$

$$\text{με} \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5, & \text{αν} \quad x \in [-\sqrt{5}, 0) \cup [2, \sqrt{5}] \\ -\frac{8}{3}x + 4, & \text{αν} \quad x \in [0, 2) \end{cases}$$

Ελέγχουμε τη μονοτονία της f στα διαστήματα $[-\sqrt{5}, 0]$ και $[2, \sqrt{5}]$.

Έχουμε:

α) Αν $x_1, x_2 \in [-\sqrt{5}, 0)$, τότε από $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow -x_1^2 < -x_2^2 \Rightarrow$

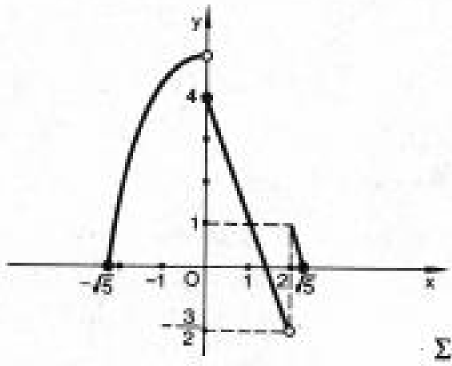
$-x_1^2 + 5 < -x_2^2 + 5$ δηλ. $f(x_1) < f(x_2)$ που σημαίνει ότι f ↑ στο $[-\sqrt{5}, 0)$

Για να είναι ↑ και στο $[-\sqrt{5}, 0]$ πρέπει για κάθε $x \in [-\sqrt{5}, 0)$ να είναι

$$f(x) < f(0) \quad (\Sigma\chi.\ 8).$$

Όμως $f(x) < f(0) \Leftrightarrow -x^2 + 5 < 4$
$\Rightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$ που είναι αδύνατη

(π.χ.) για $x = -\frac{1}{2} \in [-\sqrt{5}, 0)$.



Σχ. 8

β) Αν $x_1, x_2 \in [2, \sqrt{5}]$, τότε από
$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \Rightarrow$

$-x_1^2 + 5 > -x_2^2 + 5$ δηλ. $f(x_1) > f(x_2)$, που σημαίνει ότι f ↓ στο $[2, \sqrt{5}]$.

Στο διάστημα [0, 2) είναι φανερό ότι η f είναι f ↓, όχι όμως και στο [0, 2], διότι ενώ είναι $\frac{3}{2} < 2$ το $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ δεν είναι μεγαλύτερο του $f(2) = 1$.

Συνοψίζουμε τα συμπεράσματα και έχουμε:

f ↑ στο $[-\sqrt{5}, 0)$

και f ↓ στο $[0, 2)$ | οπότε (περίπτωση 3 του πίνακα) το $f(0) = 4$ δεν είναι ακρότατο.

Ακόμη είναι $f \downarrow$ στο $[0, 2)$ και $f \downarrow$ στο $[2, \sqrt{5}]$ οπότε το $f(2) = 1$ είναι τοπικό μέγιστο, σύμφωνα με την πρόταση 3β.

Παρατηρήσεις:

α) Επειδή $f(0) = 4 > 1 = f(2)$ το $f(2)$ δεν είναι ολικό μέγιστο.

β) Σύμφωνα με τον ορισμό του τοπικού ελάχιστου συμπεραίνουμε εύκολα ότι τα $f(-\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = 0$ είναι τοπικά ελάχιστα της f.

4ο: Αφού εξετάσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}x^2 + 1, & \text{αν } x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \\ -\frac{2}{3}x^2 + 4x, & \text{αν } x \in (0, 4) \end{cases}$$

Θα προσδιορίσουμε τα ακρότατά της.

α) Υποθέτουμε ότι $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow \frac{3}{16}x_1^2 > \frac{3}{16}x_2^2 \Rightarrow \frac{3}{16}x_1^2 + 1 > \frac{3}{16}x_2^2 + 1,$$

δηλ. $f(x_1) > f(x_2)$ που σημαίνει ότι $f \downarrow$ στο $(-\infty, 0]$.

β) Όμοια, αν $x_1, x_2 \in [4, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$ και επομένως η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[4, +\infty)$.

γ) Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν $x_1, x_2 \in (0, 4)$ με $x_1 < x_2$, τότε ο λόγος μεταβολής λ της f που αντιστοιχεί στα x_1, x_2 είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{θετικός, όταν } x_1, x_2 \in (0, 3]\cdot \text{ άρα } f \uparrow \text{ στο } (0, 3] \\ \text{αρνητικός, όταν } x_1, x_2 \in [3, 4)\cdot \text{ άρα } f \downarrow \text{ στο } [3, 4) \text{ (σχ. 9).} \end{array} \right\}$$

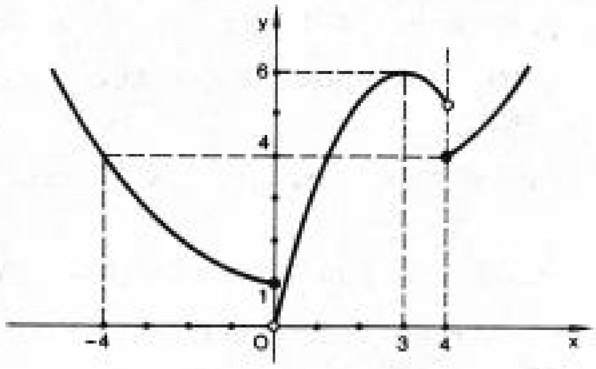
Για τη μονοτονία της f στο κλειστό διάστημα $[0, 3]$ πρέπει $\forall x \in (0, 3]$ να ισχύει: $f(0) < f(x)$

$$\Leftrightarrow 1 < -\frac{2}{3}x^2 + 4x \Leftrightarrow 3 < -2x^2 + 12x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{6-\sqrt{30}}{2}, \frac{6+\sqrt{30}}{2}\right),$$

η οποία είναι ψευδής για ορισμένα x από το $(0, 3]$ $\left(\text{π.χ. } x = \frac{6-\sqrt{30}}{2}\right)$.



Σχ. 9

Αυτό σημαίνει ότι η f δεν είναι $\uparrow$ και στο $[0, 3]$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι: $\forall x \in [3, 4),\ f(x) > f(4)$, οπότε η f είναι $\downarrow$ και στο $[3, 4]$.

Συνοψίζοντας έχουμε:

f $\downarrow$ στο $(-\infty, 0]$
και f $\uparrow$ στο $(0, 3]$ | οπότε (πρόταση 4β) το $f(0) = 1$ δεν είναι ακρότατο.

f $\uparrow$ στο $(0, 3]$
και f $\downarrow$ στο $(3, 4]$ | οπότε (πρόταση 1α) το $f(3) = 6$ είναι ολικό μέγιστο στο $(0, 4]$.

Επίσης:

f $\downarrow$ στο $(3, 4]$
και f $\uparrow$ στο $(4, +\infty]$ | οπότε (πρότ. 1β) το $f(4) = 4$ είναι ολ. ελάχιστο στο $(3, +\infty]$.

Τέλος παρατηρούμε ότι:

$f(-6) = \frac{31}{4} > 6 = f(3)$, οπότε το f(3) δεν είναι ολικό και στο $\mathbb{R}$.

και $f(0) = 1 < 4 = f(4)$, οπότε και το f(4) δεν είναι ολικό στο $\mathbb{R}$.

5ο: Θα μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{|x|}, & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \\ \sqrt{x}, & \text{αν } x \in (0, 4) \\ \frac{5}{2}, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } 4 \end{cases}$$

α) Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι $x < 0$ άρα $|x| = -x$ και $f(x) = -x + 1$, οπότε $f \downarrow$ στο $(-\infty, 0)$. Όμως $f(-1) = 2 < \frac{5}{2} = f(0)$, επομένως δεν είναι γνήσια φθίνουσα και στο $(-\infty, 0]$.

β) Αν $x_1, x_2 \in (0, 4)$ με $x_1 < x_2$, τότε $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ δηλ. $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε $f \uparrow$ στο $(0, 4)$.

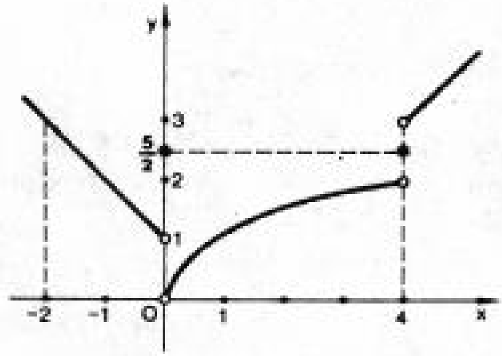
Επειδή είναι $f(0) = \frac{5}{2} > f(x)$, $x \in (0, 4)$ η f δεν είναι $\uparrow$ και στο $[0, 4)$, ενώ είναι $\uparrow$ στο $(0, 4]$, διότι $f(x) < f(4) = \frac{5}{2}$, $x \in (0, 4)$.

γ) Στο διάστημα $(4, +\infty)$ είναι $x > 0 \Rightarrow |x| = x$ και $f(x) = x - 1$, οπότε είναι $f \uparrow$ στο $(4, +\infty)$. Αλλά $f(4) = \frac{5}{2} < f(x)$ για κάθε $x \in (4, +\infty)$, οπότε η f είναι $\uparrow$ και στο $[4, +\infty)$ (σχ. 10).

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα από τη μονοτονία της f έχουμε:

$f \downarrow$ στο $(-\infty, 0)$
και $f \uparrow$ στο $(0, 4]$ | οπότε (πρόταση 5α) το

$f(0) = \frac{5}{2}$ είναι τοπικό μέγιστο.



Σχ. 10

Επίσης,

$f \uparrow$ στο $(0, 4)$
και $f \uparrow$ στο $[4, +\infty)$ | οπότε (περίπτωση 5 του πίνακα) το $f(4) = \frac{5}{2}$ δεν είναι ακρότατο.

Τέλος, παρατηρούμε ότι $f(-2) = 3 > \frac{5}{2}$, οπότε το τοπικό μέγιστο $f(0) = \frac{5}{2}$ της f δεν είναι και ολικό.