Author: Γ. Δοντάς

Title: Έρευνα πάνω στους Πυθαγόρειους Αριθμούς.

Abstract: Αντικείμενο της μελέτης αυτής είναι η εύρεση της γενικής λύσης της εξίσωσης x^2 + y^2 = z^2, μέσα στο σύνολο των φυσικών αριθμών, και η εύρεση των τιμών των y και z μέσα στο σύνολο N*, που μαζί με το δοσμένο αριθμό x, επίσης του συνόλου N*, αποτελούν διατεταγμένες τριάδες (x, y, z), λύσεις της εξίσωσης x^2 + y^2 = z^2.

Creator: HDML

σήμερα η μαθηματική επιστήμη χρειάζεται να πειραματιστεί με δικής του έμπνευσης κώδικες. Πρέπει να συνειδητοποιήσει ότι το κωδικό σύστημα που χρησιμοποιείται δεν είναι «ουρανόπεμπτο», αλλά αποτέλεσμα των προσπαθειών των μαθηματικών για να εκφράσουν με τον καλύτερο τρόπο τις μαθηματικές αλήθειες και να βρούν μια κοινή παγκόσμια γλώσσα για την καλύτερη μεταξύ τους επικοινωνία. Σ' αυτή την προσπάθεια θα βοηθούσε πολύ η επίδειξη παλαιών μαθηματικών κειμένων. Πρέπει ακόμη ο μαθητής να καταλάβει ότι πολλές φορές η πρόοδος της μαθηματικής επιστήμης είναι συνυφασμένη με τη χρήση ενός επιτυχούς κωδικού συστήματος. Ασκώντας μέσω των Μαθηματικών το μαθητή στις παραπάνω διανοητικές λειτουργίες του εμφυτεύουμε τη «μαθηματική σκέψη». Βέβαια ο όρος αυτός είναι πολύ ευρύτερος και περιλαμβάνει πλήθος διανοητικών λειτουργιών. Όμως σκοπός του αρθριδίου δεν είναι η ανάπτυξη σε εύρος του όλου θέματος, αλλά η προσπάθεια να τοποθετηθεί το μάθημα των Μαθηματικών στο «σωστό δρόμο», ώστε τα Μαθηματικά να γίνουν «εργαλείο σκέψης» για το σύγχρονο άνθρωπο.

«ΕΡΕΥΝΑ ΠΑΝΩ ΣΤΟΥΣ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ»

Γ. Δοντάς
μαθηματικός - πολ. μηχανικός
Αθήνα

Εισαγωγή

Λέμε πως η διατεταγμένη τριάδα (ξ, η, ζ) είναι λύση της εξίσωσης $f(x, y, z) = 0$, όταν για τις τιμές των αγνώστων $x = \xi$, $y = \eta$ και $z = \zeta$ ισχύει $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Αν τα ξ, η, ζ είναι στοιχεία του συνόλου Α, τότε η τριάδα (ξ, η, ζ) θα λέγεται λύσης της $f(x, y, z) = 0$, μέσα στο σύνολο Α.

Τα στοιχεία ξ, η και ζ λέγονται συνιστώσες της τριάδας (ξ, η, ζ), πρώτη, δεύτερη και τρίτη συνιστώσα, αντίστοιχα. Γενική λύση της εξίσωσης $f(x, y, z) = 0$, μέσα στο σύνολο Α, λέγεται το σύνολο των διατεταγμένων τριάδων που ανήκουν στο A^3 και επαληθεύουν αυτή.

Αντικείμενο της μελέτης

Αντικείμενο της παρούσας μελέτης είναι:

1. Η εύρεση της γενικής λύσης της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$, μέσα στο σύνολο των φυσικών αριθμών, και

2. Η εύρεση των τιμών των y και z μέσα στο σύνολο N^*, που μαζί με το δοσμένο αριθμό x, επίσης του συνόλου N*, αποτελούν διατεταγμένες τριάδες (x, y, z), λύσεις της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$.

Επειδή και στα δύο θέματα, που θα απασχολήσουν, αναζητούμε τιμές των x, y και z, μέσα στο σύνολο N*, οι ορισμοί και οι προτάσεις που ακολουθούν, αναφέρονται στα στοιχεία του συνόλου N*, δηλαδή σε ακέραιους θετικούς αριθμούς.

1. Ορισμοί

1.1. Θα λέμε ότι, δύο αριθμοί είναι της ίδιας αρτιότητας, όταν και οι δύο είναι άρτιοι ή και οι δύο είναι περιττοί.

1.2. Θα λέμε ότι, δύο αριθμοί είναι διαφορετικής αρτιότητας, όταν ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.

1.3. Θα λέμε ότι, η διατεταγμένη τριάδα (ξ, η, ζ) είναι βασική λύση της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$, όταν ισχύουν: 1) $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$ και 2) $[\xi, \eta, \zeta] = 1$.

Σημείωση

1. Με $[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu]$ συμβολίζομε το Μ.Κ.Δ. των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$. Όταν γράφομε λοιπόν $[\alpha, \beta, \gamma] = 1$, εννοούμε ότι οι αριθμοί α, β και γ είναι πρώτοι μεταξύ τους.
2. Με $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu)$ συμβολίζομε τη διατεταγμένη νιάδα, με πρώτη συνιστώσα το α_1, δεύτερη το α_2, κ.λπ. και νιοστή συνιστώσα το α_ν.

2. Προτάσεις

2.1. Αν η διατεταγμένη τριάδα (ξ, η, ζ) είναι βασική λύση της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$, τότε $[\xi, \eta] = 1$, $[\xi, \zeta] = 1$ και $[\eta, \zeta] = 1$.

Απόδειξη:

Έστω ότι $[\xi, \eta] = \delta$. Υπάρχουν τότε δύο αριθμοί κ_1 και κ_2 με $[\kappa_1, \kappa_2] = 1$, τέτοιοι ώστε $\xi = \kappa_1\delta$ και $\eta = \kappa_2\delta$, οπότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται: $(\delta\kappa_1)^2 + (\delta\kappa_2)^2 = \zeta^2$, από την οποία έχομε: $\delta^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) = \zeta^2$. Τούτο σημαίνει ότι, ο δ^2 διαιρεί τον ζ^2, ή ότι ο δ διαιρεί το ζ. Αλλά αυτό είναι άτοπο, διότι η τριάδα (ξ, η, ζ) είναι βασική τριάδα, οπότε $[\xi, \eta, \zeta] = 1$. Άρα $[\xi, \eta] = 1$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $[\xi, \zeta] = 1$ και $[\eta, \zeta] = 1$.

2.2. Αν η διατεταγμένη τριάδα (ξ, η, ζ) είναι βασική λύση της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$ τότε οι ξ και η είναι διαφορετικής αρτιότητας και ο ζ περιττός αριθμος.

Απόδειξη:

α. Οι ξ και η δεν μπορεί να είναι άρτιοι και οι δύο, διότι τότε θα έχουν κοινό παράγοντα το 2. Τούτο όμως είναι άτοπο, διότι κατά την πρόταση 2.1., $[\xi, \eta] = 1$.

β. Οι ξ και η δεν μπορεί να είναι και οι δύο περιττοί, διότι αν είναι και οι δύο περιττοί, οπότε ο ζ^2, άρα και ο ζ, θα είναι άρτιος σαν άθροισμα δύο περιττών αριθμών, και θέσομε: $\xi = 2\kappa + 1$, $\eta = 2\lambda + 1$ και $\zeta = 2\rho$, η $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$ γίνεται:

$$(2\kappa + 1)^2 + (2\lambda + 1)^2 = (2\rho)^2, \text{ από την οποία έχομε:}$$

$$4\kappa(\kappa + 1) + 4\lambda(\lambda + 1) + 2 = 4\rho^2 \quad \text{ή}$$

$$4\left[\kappa(\kappa + 1) + \lambda(\lambda + 1)\right] + 2 = 4\rho^2 \quad \text{ή}$$

$$2\left[\kappa(\kappa + 1) + \lambda(\lambda + 1)\right] + 1 = 2\rho^2$$

$2\mu + 1 = 2\nu$ Άτοπο (περιττός = άρτιος).

Οι ξ και η, λοιπόν, δεν μπορεί να είναι και οι δύο άρτιοι, ούτε και οι δύο περιττοί. Άρα ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός, οπότε ο ζ θα είναι περιττός, σαν άθροισμα δύο αριθμών διαφορετικής αρτιότητας.

2.3. Αν η διατεταγμένη τριάδα (ξ, η, ζ) είναι βασική λύση της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$, τότε και τα πολλαπλάσια αυτής είναι λύσεις της ίδιας εξίσωσης.

Απόδειξη:

Αφού η τριάδα (ξ, η ζ) είναι βασική λύση της $x^2 + y^2 = z^2$ θα είναι $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$, εκ της οποίας, δια πολλαπλασιασμού και των δύο μελών επί κ^2, με $\kappa \in N^*$, έχομε:

$$\kappa^2\xi^2 + \kappa^2\eta^2 = \kappa^2\zeta^2 \quad \text{ή} \quad (\kappa\xi)^2 + (\kappa\eta)^2 = (\kappa\zeta)^2.$$

Τούτο σημαίνει ότι η τριάδα (κξ, κη, κζ), που γράφεται και κ(ξ, η, ζ), είναι λύση της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$.

2.4. Αν η διατεταγμένη τριάδα (ξ, η, ζ) είναι λύση της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$ και οι ξ, η και ζ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε η τριάδα (ξ, η, ζ) είναι πολλαπλάσιο μιας βασικής τριάδας λύσης.

Απόδειξη:

Αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των ξ, η και ζ είναι ο κ, δηλαδή [ξ, η, ζ] = κ, τότε θα υπάρχουν τρεις αριθμοί ξ_1, η_1 και ζ_1 πρώτοι μεταξύ τους, τέτοιοι ώστε:

$$\xi = \kappa\xi_1, \quad \eta = \kappa\eta_1 \quad \text{και} \quad \zeta = \kappa\zeta_1,$$

οπότε η σχέση $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$ γίνεται:

$$(\kappa\xi_1)^2 + (\kappa\eta_1)^2 = (\kappa\zeta_1)^2 \quad \text{ή} \quad \kappa^2\xi_1^2 + \kappa^2\eta_1^2 = \kappa^2\zeta_1^2.$$

Τούτο σημαίνει ότι η τριάδα (ξ_1, η_1, ζ_1) είναι βασική τριάδα λύση, αφού [ξ, η, ζ] = 1 αφού [ξ_1, η_1, ζ_1] και η τριάδα (ξ, η, ζ) = κ(ξ_1, η_1, ζ_1), δηλαδή είναι πολλαπλάσιο μιας βασικής τριάδας λύσης.

ΘΕΜΑ ΠΡΩΤΟ

3. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$, μέσα στο σύνολο N^*.

Η πρόταση αυτή θα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής:
«Να βρεθούν οι ακέραιες και θετικές λύσεις της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$» ή ακόμη:
«Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί, που είναι μέτρα των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου».
Σύμφωνα με την πρόταση 2.3., η εύρεση της γενικής λύσης της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$, ανάγεται στην εύρεση των βασικών λύσεων αυτής.

4. Να βρεθούν οι βασικές λύσεις της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$ (1).

Σύμφωνα με τον ορισμό 1.3. και την πρόταση 2.1., αν η διατεταγμένη τριάδα (ξ, η, ζ) είναι βασική λύση της (1), τότε $[\xi, \eta, \zeta] = 1$, $[\xi, \eta] = 1$, $[\xi, \zeta] = 1$ και $[\eta, \zeta] = 1$. $(\xi = p + u + 1)$

Επίσης σύμφωνα με την πρόταση 2.2. οι ξ και η είναι διαφορετικής αρτιότητας, ενώ ο ζ είναι περιττός αριθμός.

Η (1) γράφεται $x^2 = z^2 - y^2$ ή ακόμη:

$$x^2 = (z - y)(z + y) \qquad (2)$$

4.1. Υποθέτομε ότι ο x είναι περιττός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή, ο y είναι άρτιος αριθμός και ο z περιττός, οπότε και η διαφορά $z - y$ και το άθροισμα $z + y$ αυτών, είναι περιττοί αριθμοί.

Αν λοιπόν θέσομε: $z - y = 2\kappa + 1$, $z + y = 2\rho + 1$ (3), οπότε $y = \rho - \kappa$, $z = \rho + \kappa + 1$ (4), η σχέση (2) γίνεται: $x^2 = (2\kappa + 1)(2\rho + 1)$ (5).

Οι αριθμοί $2\kappa + 1$ και $2\rho + 1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, διότι αν

$$[2\kappa + 1, 2\rho + 1] = \delta,$$

τότε θα υπάρχουν δυο αριθμοί κ_1 και ρ_1 τέτοιοι ώστε:
$2\kappa + 1 = \kappa_1 \cdot \delta$ και $2\rho + 1 = \rho_1 \cdot \delta$ (6) με $[\kappa_1, \rho_1] = 1$, οπότε οι σχέσεις (3) γίνονται: $z - y = \kappa_1 \cdot \delta$ και $z + y = \rho_1 \cdot \delta$, από τις οποίες έχομε:

$$y = \frac{\rho_1 - \kappa_1}{2} \cdot \delta \quad \text{και} \quad z = \frac{\rho_1 + \kappa_1}{2} \cdot \delta \qquad (7)$$

Αλλά από τις σχέσεις (6) συμπεραίνομε ότι οι κ_1 και ρ_1 είναι περιττοί αριθμοί, οπότε οι $\rho_1 - \kappa_1$ και $\rho_1 + \kappa_1$ είναι άρτιοι, άρα οι

$$\frac{\rho_1 - \kappa_1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\rho_1 + \kappa_1}{2}$$

είναι ακέραιοι αριθμοί. Αν λοιπόν θέσουμε $\frac{\rho_1 - \kappa_1}{2} = \kappa_2$ και $\frac{\rho_1 + \kappa_1}{2} = \rho_2$, τότε από τις σχέσεις (7) έχομε: $y = \kappa_2 \delta$ και $z = \rho_2 \delta$, που είναι άτοπο αφού $[y, z] = 1$. Επομένως οι $2\kappa + 1$ και $2\rho + 1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Από τη σχέση (5) συμπεραίνομε ότι για να είναι ο x ακέραιος αριθμός, θα πρέπει το γινόμενο $(2\kappa + 1)(2\rho + 1)$ να είναι τέλειο τετράγωνο, και επειδή οι $2\kappa + 1$

και $2\rho + 1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους θα πρέπει: $2\kappa + 1 = \mu^2$ και $2\rho + 1 = \lambda^2$, οπότε $x^2 = \lambda^2\mu^2$ ή $x = \lambda \cdot \mu$, με $[\lambda, \mu] = 1$.

Επίσης οι σχέσεις (3) γίνονται: $z - y = \mu^2$ και $z + y = \lambda^2$ από τις οποίες έχομε: $y = \dfrac{\lambda^2 - \mu^2}{2}$ και $z = \dfrac{\lambda^2 + \mu^2}{2}$.

Οι βασικές λοιπόν λύσεις της (1) δίνονται από τους τύπους:

$$\boxed{x = \lambda \cdot \mu, \quad y = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{2}, \quad z = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}} \qquad (8)$$

όπου λ και μ περιττοί αριθμοί, πρώτοι μεταξύ τους και $\lambda > \mu$.

4.2. Υποθέτομε ότι ο x είναι άρτιος αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή και ο y και ο z είναι κατ' ανάγκην περιττοί αριθμοί, οπότε και η διαφορά τους $z - y$ και το άθροισμά τους $z + y$, είναι άρτιοι αριθμοί.

Αν λοιπόν θέσομε: $z - y = 2\kappa$ και $z + y = 2\rho$ (9), οπότε $y = \rho - \kappa$, $z = \rho + \kappa$ (10), η σχέση (2) γίνεται: $x^2 = 4\kappa\rho$ (11).

Οι αριθμοί κ και ρ είναι διαφορετικής αρτιότητας διότι αν είναι της ίδιας αρτιότητας τότε και η διαφορά τους και το άθροισμά τους θα είναι άρτιοι αριθμοί, δηλαδή οι αριθμοί y και z, που δίνονται από τους τύπους (10), θα είναι και οι δυο άρτιοι, που είναι άτοπο. Επίσης οι αριθμοί κ και ρ είναι πρώτοι μεταξύ τους, διότι αν $[\kappa, \rho] = \delta$, οπότε θα υπάρχουν δυο αριθμοί κ_1 και ρ_1 με $[\kappa_1, \rho_1] = 1$, τέτοιοι ώστε: $\kappa = \kappa_1\delta$ και $\rho = \rho_1\delta$. Τότε οι σχέσεις (10) δίνουν $y = (\rho_1 - \kappa_1)\delta$ και $z = (\rho_1 + \kappa_1)\delta$ που είναι επίσης άτοπο, αφού οι y και z είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Από τη σχέση (11) προκύπτει ότι, για να είναι ο x ακέραιος αριθμός, θα πρέπει το γινόμενο $\kappa \cdot \rho$ να είναι τέλειο τετράγωνο. Επειδή δε οι κ και ρ είναι πρώτοι μεταξύ τους, θα πρέπει και ο κ και ο ρ να είναι τέλεια τετράγωνα. Αν λοιπόν θέσομε $\kappa = \mu^2$ και $\rho = \lambda^2$ τότε από τις σχέσεις (11) και (10) έχομε:

$$\boxed{x = 2\lambda\mu, \quad y = \lambda^2 - \mu^2, \quad z = \lambda^2 + \mu^2} \qquad (12)$$

όπου λ και μ πρώτοι μεταξύ τους και διαφορετικής αρτιότητας, αφού και οι κ και ρ είναι πρώτοι μεταξύ τους και διαφορετικής αρτιότητας. Εξάλλου από τις σχέσεις (9) προκύπτει ότι ο $\rho > \kappa$, οπότε και $\lambda > \mu$.

Παρατήρηση

Είδαμε ότι τα λ και μ των τύπων (8) είναι περιττοί αριθμοί και πρώτοι μεταξύ τους.

Από τον τύπο

$$y = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}, \quad \text{έχουμε:} \quad y = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda + \mu)}{2} \quad \text{ή} \quad y = 2 \cdot \frac{\lambda - \mu}{2} \cdot \frac{\lambda + \mu}{2} \qquad (13).$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι αριθμοί $\frac{\lambda - \mu}{2}$ και $\frac{\lambda + \mu}{2}$ είναι ακέραιοι, διαφορετικής αρτιότητας και πρώτοι μεταξύ τους. Αν λοιπόν εφαρμόσομε του τύπους (12) για τον άρτιο αριθμό y της μορφής (13) θα έχομε:

$$x = \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda - \mu}{2}\right)^2 = \lambda \cdot \mu \quad \text{και}$$

$$z = \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda - \mu}{2}\right)^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}.$$

Επίσης από τους τύπους (12) που οι λ και μ είναι διαφορετικής αρτιότητας και πρώτοι μεταξύ τους, ο $y = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu)$ (14). Οι $\lambda - \mu$ και $\lambda + \mu$ είναι και οι δύο περιττοί και πρώτοι μεταξύ τους, όπως εύκολα αποδεικνύεται.

Αν λοιπόν εφαρμόσομε τους τύπους (8) για τον περιττό αριθμό της μορφής (14), θα έχομε:

$$x = \frac{(\lambda + \mu)^2 - (\lambda - \mu)^2}{2} = 2\lambda\mu \quad \text{και}$$

$$z = \frac{(\lambda + \mu)^2 + (\lambda - \mu)^2}{2} = \lambda^2 + \mu^2.$$

Ο άρτιος λοιπόν y των τύπων (8), με εφαρμογή των τύπων (12) μας δίνει την ίδια τριάδα λύση, και ο περιττός y των τύπων (12) με εφαρμογή των τύπων (8) μας δίνει πάλι την ίδια τριάδα λύση.

Οι τύποι λοιπόν (8) και οι τύποι (12) δίνουν τις ίδιες τριάδες, λύσεις της (1).

Αν συμβολίσομε με λ_8 και μ_8 τα λ και μ των τύπων (8) και με λ_{12} και μ_{12} τα λ και μ των τύπων (12)˙τότε, όπως εύκολα φαίνεται:

$$\lambda_{12} = \frac{\lambda_8 + \mu_8}{2}, \quad \mu_{12} = \frac{\lambda_8 - \mu_8}{2} \quad \text{και}$$

$$\lambda_8 = \lambda_{12} + \mu_{12}, \quad \mu_8 = \lambda_{12} - \mu_{12}.$$

Για να βρούμε λοιπόν τις βασικές τριάδες λύσεις της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$, εφαρμόζομε ή τους τύπους (8) με λ και μ, περιττούς αριθμούς και πρώτους μεταξύ τους ή τους τύπους (12) με λ και μ διαφορετικής αρτιότητας και πρώτους μεταξύ τους.

Η γενική λύση της $x^2 + y^2 = z^2$ λοιπόν θα είναι:

$$\boxed{x = (\lambda\mu)\cdot\nu, \quad y = \left(\frac{\lambda^2 - \mu^2}{2}\right)\cdot\nu, \quad z = \left(\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}\right)\cdot\nu} \qquad (15)$$

που προκύπτει από τους τύπους (8) ή

$$\boxed{x = (2\lambda\mu)\cdot\nu, \quad y = (\lambda^2 - \mu^2)\cdot\nu, \quad z = (\lambda^2 + \mu^2)\cdot\nu} \qquad (16)$$

που προκύπτει από τους τύπους (12).

ΘΕΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ

5. **Να βρεθούν οι τιμές των αγνώστων y και z, μέσα στο σύνολο N^*, που μαζί με το δοσμένο αριθμό x, επίσης του συνόλου N^*, αποτελούν διατεταγμένες τριάδες (x, y, z), λύσεις της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$ (17).**

Σύμφωνα με τις προτάσεις 2.3. και 2.4., οι λύσεις εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$ είναι πολλαπλάσια των βασικών τριάδων, λύσεων αυτής.

Θα αναζητήσομε λοιπόν, στην αρχή, τις βασικές τριάδες λύσεις αυτής, που ο δοσμένος αριθμός x είναι πρώτη συνιστώσα.

6. **Να βρεθούν οι τιμές των αγνώστων y και z, μέσα στο σύνολο N^*, που μαζί με το δοσμένο αριθμό x, επίσης του συνόλου N^*, αποτελούν διατεταγμένες τριάδες (x, y, z), βασικές λύσεις της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$ (18).**

Θα εξετάσομε χωριστά την περίπτωση που ο δοσμένος αριθμός x είναι περιττός και χωριστά την περίπτωση που είναι άρτιος.

6.1. **Ο δοσμένος αριθμός x είναι περιττός.**

Έστω ότι, ο δοσμένος αριθμός x, μετά την ανάλυσή του σε γινόμενο πρώτων παραγόντων παίρνει τη μορφή:

6.1.1. $\boxed{x = q^\rho}$ **(19).**

Σύμφωνα με τους τύπους (8) για να δίνει ο x βασικές τριάδες, λύσεις της εξίσωσης (18), θα πρέπει ο x να έχει τη μορφή $x = \lambda\cdot\mu$ με λ και μ πρώτοι μεταξύ τους και $\lambda > \mu$.

Οι μόνες δυνατές, λοιπόν, τιμές των λ και μ είναι: $\lambda = q^\rho$, δηλαδή $\lambda = x$ και $\mu = 1$, οπότε σύμφωνα πάντα με τους τύπους (8), ο

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} \quad \text{και} \quad z = \frac{\lambda^2 + 1}{2}.$$

Άρα ο x δίνει μια μόνο βασική τριάδα. Την $\left(x, \ \dfrac{x^2-1}{2}, \ \dfrac{x^2+1}{2}\right)$.

6.1.2 $\boxed{x = q_1^{\rho_1} \cdot q_2^{\rho_2}}$ (20).

Αν $q_2^{\rho_2} > q_1^{\rho_1}$, οι δυνατές τιμές των λ και μ είναι: $\lambda = x$, $m = 1$ και $\lambda = q_2^{\rho_2}$, $\mu = q_1^{\rho_1}$ και επομένως οι βασικές τριάδες που δίνει ο x είναι δύο, οι:

$$\left(x, \ \frac{x^2-1}{2}, \ \frac{x^2+1}{2}\right) \quad \text{και} \quad \left(x, \ \frac{q_2^{2\rho_2} - q^{2\rho_1}}{2}, \ \frac{q_2^{2\rho_2} + q^{2\rho_1}}{2}\right),$$

σύμφωνα πάντα με τους τύπους (8).

6.1.3. $\boxed{x = q_1^{\rho_1} \cdot q_2^{\rho_2} \ldots q_\nu^{\rho_\nu}}$ (21).

Για να βρούμε τις βασικές τριάδες που δίνει ο x, θεωρούμε αυτόν υπό τη μορφή $x = \lambda \cdot \mu$ (22), και αναζητούμε τις δυνατές τιμές των λ και μ, με λ και μ πρώτοι μεταξύ τους και $\lambda > \mu$.

Κάθε ζεύγος (λ, μ) μας δίνει μια βασική τριάδα σύμφωνα με τους τύπους (8).

Αρκεί λοιπόν να βρούμε τις δυνατές τιμές της μιας συνιστώσας του ζεύγους (λ, μ), αφού η άλλη θα προκύπτει από τον τύπο (22).

Δηλαδή, η μια συνιστώσα θα είναι ο αριθμός που δίνει ένα σύνολο παραγόντων του x και η άλλη ο αριθμός που δίνει το σύνολο των υπολοίπων παραγόντων αυτού. Έτσι η μια συνιστώσα θα αποτελείται από ένα παράγοντα του τύπου (21), με τον εκθέτη του, αφού οι λ και μ είναι πρώτοι μεταξύ τους, από δυο παράγοντες, από τρεις παράγοντες κ.λπ. ή από όλους τους παράγοντες του x, δηλαδή ολόκληρος ο x.

Πόσες είναι οι δυνατές τιμές της μιας συνιστώσας;

Οι δυνατές λοιπόν τιμές της μιας συνιστώσας είναι ο αριθμός 1, οι συνδυασμοί των ν παραγόντων ανά ένα, των ν παραγόντων ανά δύο, ανά τρεις κ.λπ. και τέλος οι συνδυασμοί των ν παραγόντων ανά ν. Αν συμβολίσομε με Σ΄ το σύνολο των δυνατών τιμών της μιας συνιστώσας και με $\binom{\nu}{0} = 1$, τότε

$$\Sigma' = \binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2} + \ldots + \binom{\nu}{\nu} \qquad (23)$$

Αλλά το δεύτερο μέλος της (23) μας κάνει 2^ν. Άρα: $\Sigma' = 2^\nu$.

Επειδή όμως οι τιμές αυτές ανά δύο, που ικανοποιούν τη σχέση (22), δίνουν ένα ζεύγος (λ, μ).

Και κάθε ζεύγος (λ, μ) μια βασική τριάδα, συμπεραίνομε πως οι βασικές τριάδες, λύσεις της εξίσωσης (18) που δίνει ο δοσμένος αριθμός x, θα είναι: $2^\nu : 2 = 2^{\nu-1}$.

Αν λοιπόν συμβολίσομε με Σ το σύνολο των βασικών τριάδων που δίνει ο x, της μορφής (21), θα έχομε: $\Sigma = 2^{\nu-1}$ (24).

Ο τύπος (24) ισχύει και για τη μορφή (19), που δίνει $\Sigma = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ και για τη μορφή (20) που δίνει $\Sigma = 2^{2-1} = 2^1 = 2$, δηλαδή ισχύει για κάθε περιττό αριθμό.

Πώς θα βρούμε τα ζεύγη (λ, μ).

Σχηματίζομε ένα πίνακα με δυο γραμμές και δυο στήλες.

Στην πρώτη γραμμή βάζομε τους διαιρέτες του $q_1^{\rho_1}$, που είναι οι 1 και $q_1^{\rho_1}$ (πρώτοι μεταξύ τους) και στην πρώτη στήλη τους διαιρέτες του $q_2^{\rho_2}$ που είναι ο 1 και $q_2^{\rho_2}$ (πάλι πρώτοι μεταξύ τους).

Συμπληρώνομε τον πίνακα με το γινόμενο $q_1^{\rho_1} \cdot q_2^{\rho_2}$ των στοιχείων που είναι πάνω του και αριστερά του. Έτσι έχομε τον πίνακα:

1	2
1	$q_1^{\rho_1}$
$q_2^{\rho_2}$	$q_1^{\rho_1} \cdot q_2^{\rho_2}$
2	1

(Π₁)

Αν ο x είχε μόνον τους παράγοντες $q_1^{\rho_1}$ και $q_2^{\rho_2}$ ο πίνακας (Π₁) θα μας έδινε τα ζεύγη (λ, μ) που είναι δύο. Αριθμούμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής και τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής, αρχίζοντας από το τέλος. Τα ζεύγη (1, 1) και (2, 2) δηλαδή $(1, q_1^{\rho_1} q_2^{\rho_2})$ και $(q_1^{\rho_1}, q_2^{\rho_2})$ είναι τα ζεύγη που δίνουν τις βασικές τριάδες.

Αν ο x έχει τρεις παράγοντες, βρίσκομε τα ζεύγη, πολλαπλασιάζοντας τα στοιχεία του πίνακα (Π₁) με τον τρίτο παράγοντα $q_3^{\rho_3}$ και βάζομε τα εξαγόμενα σε επέκταση του πίνακα (Π₁). Έτσι έχομε:

1	2	3	4
1	$q_1^{\rho_1}$	$q_3^{\rho_3}$	$q_1^{\rho_1} q_3^{\rho_3}$
$q_2^{\rho_2}$	$q_1^{\rho_1} q_2^{\rho_2}$	$q_2^{\rho_2} q_3^{\rho_3}$	$q_1^{\rho_1} q_2^{\rho_2} q_3^{\rho_3}$
4	3	2	1

(Π₂)

Αριθμούμε πάλι τις δυο γραμμές με αντίστροφη τάξη και έχομε τα ζεύγη (1, 1), (2, 2), (3, 3) και (4, 4). Τα δυο ζεύγη του (Π₁), με τον τρίτο παράγοντα $q_3^{\rho_3}$, γίνονται άλλα τόσα, δηλαδή $2 \cdot 2 = 2^2$.

Όμοια προχωρούμε από τον (Π₂) στον (Π₃) σε περίπτωση τεσσάρων παραγόντων κ.λ.π. και στον πίνακα ($\Pi_{\nu-1}$) σε περίπτωση των ν παραγόντων.

Φαίνεται και έτσι εύκολα πως το σύνολο των ζευγών (λ, μ), άρα και των βασικών τριάδων, στην περίπτωση που ο x έχει ν παράγοντες θα είναι $2^{\nu-1}$. Το ζεύγος (1, 1) του πίνακα ($\Pi_{\nu-1}$) είναι το (1, x), που σημαίνει ότι ο περιττός αριθμός x δίνει πάντα σαν βασική τριάδα την:

$$\left(x,\ \frac{x^2-1}{2},\ \frac{x^2+1}{2}\right) \qquad (25),$$

ενώ οι υπόλοιπες θα δίνονται από τους τύπους (8), με λ και μ τα ζεύγη που παίρνομε από τον πίνακα ($\Pi_{\nu-1}$) όπως τον περιγράψαμε.

Παρατήρηση

Για την τριάδα (25) που δίνει κάθε περιττός αριθμός, ισχύει:

$$z - y = \frac{x^2+1}{2} - \frac{x^2-1}{2} = 1.$$

Παραδείγματα

Να βρεθούν οι βασικές τριάδες, λύσεις της εξίσωσης (18), που δίνει ο αριθμός:

1. **x = 5.**

Σύμφωνα με τον τύπο (24), το σύνολο των τριάδων είναι $\Sigma = 2^{1-1} = 2^0 = 1$, δηλαδή μία. Αυτή δίνεται από τους τύπους (25) και είναι:

$$\left(5,\ \frac{5^2-1}{2},\ \frac{5^2+1}{2}\right) = (5,\ 12,\ 13).$$

2. **x = 81.**

Ο $81 = 3^4$. Άρα $x = 3^4$. Είναι δηλαδή της μορφής (19). Δίνει πάλι μια βασική τριάδα, αυτή του τύπου (24), την $\left(81,\ \frac{81^2-1}{2},\ \frac{81^2+1}{2}\right) = (81,\ 3280,\ 3281)$.

3. **x = 315.**

Μετά την ανάλυση του 315 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, έχομε: $x = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Ο τύπος (24) μας δίνει $2^{3-1} = 2^2 = 4$ βασικές τριάδες. Κατασκευάζομε τον πίνακα (Π_2) που είναι ο

1	2	3	4
1	3^2	7	$3^2 \cdot 7$
5	$3^2 \cdot 5$	$5 \cdot 7$	$3^2 \cdot 5 \cdot 7$
4	3	2	1

Αριθμούμε την πρώτη και δεύτερη γραμμή και έχομε τα ζεύγη

$$(1,\ 3^2\cdot 5\cdot 7),\quad (3^2,\ 5\cdot 7),\quad (7,\ 3^2\cdot 5)\quad \text{και}\quad (3^2\cdot 7,\ 5)$$

που δίνουν τις βασικές τριάδες:

(315, 49612, 49613), (315, 572, 653), (315, 988, 1037) και (315, 1972, 1997).

6.2. **Ο δοσμένος αριθμός x είναι άρτιος.**

Έστω ότι ο δοσμένος αριθμός x, μετά την ανάλυσή του σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, παίρνει τη μορφή.

6.2.1. $\mathbf{x = 2^{\rho}}$ (26).

Σύμφωνα με τους τύπους (12), για να δίνει ο x βασικές τριάδες, λύσεις της εξίσωσης (18), θα πρέπει να έχει τη μορφή $x = 2\lambda\cdot\mu$ (27) με λ και μ διαφορετικής αρτιότητας και πρώτοι μεταξύ τους.

Η μόνη δυνατή λοιπόν μορφή που παίρνει ο x είναι η

$$x = 2\cdot 2^{\rho-1}\cdot 1 \quad \text{ή}\quad x = 2\cdot\frac{x}{2}\cdot 1$$

και επομένως η μόνη βασική τριάδα που δίνει είναι η:

$$\left(x,\ \frac{x^2}{4}-1,\ \frac{x^2}{4}+1\right)\qquad (28)$$

6.2.2. $\mathbf{x = 2^{\rho}\cdot q_1^{\rho_1}}$ **(29).**

Σύμφωνα με τον τύπο (27) ο x γράφεται: $x = 2\cdot 2^{\rho-1}\cdot q_1^{\rho_1}$.

Οι δυνατές τιμές των λ και μ είναι:

$$\lambda = 2^{\rho-1}\cdot q_1^{\rho_1} = \frac{x}{2},\ \ \mu = 1\quad \text{και}\quad \lambda = 2^{\rho-1},\ \ \mu = q_1^{\rho_1},$$

δηλαδή τα ζεύγη (λ, μ) είναι: $\left(\frac{x}{2},\ 1\right)$ και $(2^{\rho-1},\ q_1^{\rho_1})$, οπότε οι βασικές τριάδες που δίνει ο x της μορφής (29) είναι:

$$\left(x,\ \frac{x^2}{4}-1,\ \frac{x^2}{4}+1\right)\quad \text{και}\quad \left(x,\ 2^{2(\rho-1)}-q_1^{2\rho_1},\ 2^{2(\rho-1)}+q_1^{2\rho_1}\right).$$

6.2.3. $\mathbf{x = 2^{\rho}\cdot q_1^{\rho_1}\cdot q_2^{\rho_2}\ \dots\ q_\nu^{\rho_\nu}}$ (30).

Σύμφωνα με τον τύπο (27) ο x γράφεται: $x = 2\cdot 2^{\rho-1}\cdot q_1^{\rho_1}\cdot q_2^{\rho_2}\ \dots\ q_\nu^{\rho_\nu}$ (31).

Οι συνιστώσες των ζευγών (λ, μ), που δίνουν βασικές τριάδες, λύσεις της (18), είναι όπως είπαμε διαφορετικής αρτιότητας.

Η άρτια λοιπόν συνιστώσα του ζεύγους (λ, μ) θα περιέχει τον παράγοντα $2_{\rho-1}$ και ένα ή δύο κ.λπ. ή όλους τους παράγοντες του περιττού αριθμού

$$Q_1 = q_1^{\rho_1} \cdot q_2^{\rho_2} \dots q_\nu^{\rho_\nu} \qquad (32).$$

Οι δυνατές λοιπόν τιμές της άρτιας συνιστώσας θα είναι όσες δίνει ο τύπος (23), και επομένως το σύνολο των βασικών τριάδων που δίνει ο x της μορφής (30) θα είναι

$$\boxed{\Sigma = 2^\nu} \qquad (33)$$

όπου ν το σύνολο των πρώτων παραγόντων του περιττού μέρους του x.

Ο τύπος (33) ισχύει για κάθε άρτιο αριθμό.

Πώς θα βρούμε τα ζεύγη (λ, μ).

Βρίσκομε τα ζεύγη που δίνει ο περιττός αριθμός Q_1 του τύπου (32), με πίνακα, όπως είπαμε για τον περιττό αριθμό της μορφής (21).

Αν (λ_π, μ_π) είναι ένα ζεύγος του αριθμού Q_1, επειδή ο $2^{\rho-1}$ θα είναι παράγοντας ή του λ_π ή του μ_π θα πάρομε δυο ζεύγη του αριθμού (30), τα $(2^{\rho-1} \cdot \lambda_\pi, \mu_\pi)$ και $(\lambda_\pi, 2^{\rho-1} \cdot \mu_\pi))$

Έτσι βγαίνει και πάλι ότι το πλήθος των ζευγών, άρα και των βασικών τριάδων που δίνει ο x της μορφής (30), θα είναι το διπλάσιο των τριάδων που δίνει ο περιττός αριθμός Q_1, που είναι σύμφωνα με τον τύπο (24) $2^{\nu-1}$, δηλαδή $2 \cdot 2^{\nu-1} = 2^\nu$.

Το ζεύγος (1, 1) το αντίστοιχο του περιττού αριθμού Q_1 μας δίνει σαν

$$\lambda = 2^{\rho-1} \cdot Q_1 = \frac{x}{2} \quad \text{και} \quad \mu = 1,$$

που αντιστοιχεί η τριάδα $\left(x,\ \frac{x^2}{4} - 1,\ \frac{x^2}{4} + 1\right)$ (34), που δίνει κάθε άρτιος αριθμός.

Παρατήρηση 1.

Για την τριάδα (34) ισχύει:

$$z - y = \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) - \left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 2$$

Παρατήρηση 2.

Αν ο δοσμένος αριθμός είναι της μορφής $x = 2 \cdot q_1^{\rho_1} \cdot q_2^{\rho_2} \dots q_\nu^{\rho_\nu}$ (35), δηλαδή $x = 2Q$, όπου Q περιττός, (στην περίπτωση αυτή θα λέμε τον x άρτιο με βαθμό αρτιότητας ένα), δεν μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $2 \cdot \lambda \cdot \mu$ με λ και μ διαφορετικής αρτιότητας, άρα δεν δίνειθ καμιά βασική τριάδα, λύση της (18).

Παρατήρηση 3.

Αν ο δοσμένος αριθμός είναι της μορφής $x = 2^2 \cdot q_1^{\rho_1} \cdot q_2^{\rho_2} \dots q_\nu^{\rho_\nu}$ (36), δηλαδή $x = 4Q$ όπου Q περιττός αριθμός, (δηλαδή είναι άρτιος με βαθμό αρτιότητας 2), δίνει βέβαια, σύμφωνα με τον τύπο (33) 2^ν βασικές τριάδες, αλλά η μία τριάδα είναι πάντοτε η τριάδα (34) και μία άλλη βασική τριάδα είναι η με $\lambda = Q$ και $\mu = 2$ δηλαδή η τριάδα

$$(4Q,\ \ Q^2 - 4,\ \ Q^2 + 4) = \left(x,\ \left(\frac{x}{4}\right)^2 - 4,\ \ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\right) = \left(x,\ \ \frac{x^2}{16} - 4,\ \ \frac{x^2}{16} + 4\right).$$

Παραδείγματα

Να βρεθούν οι βασικές τριάδες, λύσεις της εξίσωσης (18), που δίνει ο αριθμός

1. **$x = 32$.**

Ο $32 = 2^5$. Άρα $x = 2^5$, δηλαδή έχει τη μορφή (26). Γράφομε $x = 2 \cdot 2^4 \cdot 1$, που σημαίνει πως οι μόνες τιμές των λ και μ είναι $\lambda = 2^4$, $\mu = 1$ και άρα η μόνη τριάδα (βασική) που δίνει είναι η $(32,\ 2^8 - 1,\ 2^8 + 1) = (32,\ 255,\ 257)$, που βγαίνει και από τους τύπους (28).

2. **$x = 72$.**

Ο $72 = 2^3 \cdot 3^2$, δηλαδή $x = 2^3 \cdot 3^2$. Είναι λοιπόν η μορφή (29). Γράφομε $x = 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$. Ο περιττός αριθμός 3^2 δίνει ένα μόνο ζεύγος, το $(1,\ 3^2)$, άρα ο άρτιος αριθμός $2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$ θα δώσει δύο ζεύγη, τα $(2^2,\ 3^2)$ και $(1,\ 2^2 \cdot 3^2)$ και επομένως ο 72 δίνει δυο βασικές τριάδες, τις:

$$\left[2^3 \cdot 3^2,\ (2^2 \cdot 3^2)^2 - 1,\ (2^2 \cdot 3^2)^2 + 1\right] \quad \text{και} \quad \left[2^3 \cdot 3^2,\ (3^2)^2 - (2^2)^2,\ (3^2)^2 + (2^2)^2\right]$$

δηλαδή τις τριάδες: (72, 1295, 1297) και (72, 65, 97). Η πρώτη τριάδα είναι η τριάδα του τύπου (34), που δίνει κάθε άρτιος αριθμός.

3. **$x = 360$.**

Ο $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, δηλαδή ο $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Σύμφωνα με τον τύπο (33), οι βασικές τριάδες που δίνει ο 360 είναι $2^2 = 4$.

Βρίσκομε τα ζεύγη που δίνει ο περιττός αριθμός $3^2 \cdot 5$ από τον πίνακα (Π_1) και έχομε:

1	2
1	3^2
5	$3^2 \cdot 5$
2	1

Δηλαδή τα ζεύγη του περιττού αριθμού $3^2 \cdot 5$ είναι: $(1,\ 3^2 \cdot 5)$, $(3^2,\ 5)$ οπότε τα ζεύγη του άρτιου αριθμού $2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ είναι:

$$(2^2,\ 3^2 \cdot 5),\ \ (1,\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5),\ \ (2^2 \cdot 3^2,\ 5) \ \ \text{και} \ \ (3^2,\ 2^2 \cdot 5).$$

Επομένως οι βασικές τριάδες που δίνει ο x είναι:

$$\{360,\ (3^2 \cdot 5)^2 - (2^2)^2,\ (3^2 \cdot 5)^2 + (2^2)^2\} = (360,\ 2009,\ 2041)$$
$$\{360,\ (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 - 1,\ (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 + 1\} = (360,\ 32399,\ 32401)$$
$$\{360,\ (2^2 \cdot 3^2)^2 - 5^2,\ (2^2 \cdot 3^2)^2 + 5^2\} = (360,\ 1271,\ 1321) \quad \text{και}$$
$$\{360,\ (2^2 \cdot 5)^2 - (3^2)^2,\ (2^2 \cdot 5)^2 + (3^2)^2\} = (360,\ 319,\ 481).$$

7. Να βρεθούν οι τιμές των y και z, μέσα στο σύνολο N*, που μαζί με το δοσμένο αριθμό x, επίσης του συνόλου N*, αποτελούν διατεταγμένες τριάδες (x, y, z), λύσεις της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$ (35).

Οι τύποι (24) και 33) μας δίνουν, όπως είπαμε, το σύνολο των βασικών τριάδων, λύσεων της εξίσωσης (35), όταν ο δοσμένος αριθμός x είναι περιττός ή άρτιος, αντίτοιχα.

Εδώ θα αναζητήσομε όλες τις τριάδες λύσεις της εξίσωσης (35), βασικές και μη, τις οποίες ο δοσμένος αριθμός x είναι πρώτη συνιστώσα. Επανερχόμαστε δηλαδή το δεύτερο θέμα της μελέτης μας. Θα εξετάσομε πάλι χωριστά την περίπτωση που ο ɔσμένος αριθμός x είναι περιττός και χωριστά την περίπτωση που είναι άρτιος.

1. **Ο δοσμένος αριθμός x είναι περιττός.**

Έστω ότι, ο δοσμένος αριθμός x, μετά την ανάλυσή του σε γινόμενο πρώτων παɩγόντων έχει τη μορφή:

1.1. $\boxed{x = q^\rho}$ **(36).**

Γράφομε, κατ' αρχήν, το σύνολο των διαιρετών του x, που είναι το

$$\{1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^{\rho-1},\ q^\rho\} \qquad (37)$$

ɔ πλήθος των διαιρετών είναι, προφανώς, ρ + 1. Κάθε στοιχείο του συνόλου (37), ːτός του στοιχείου 1, δίνει μια βασική τριάδα, όπως είδαμε στην παράγραφο 6.1.1.

Αν γράψομε τον x υπό τη μορφή $x = q^{\rho-i} \cdot q^i$ (38), με $i = 1, 2, \ldots, \rho$, θα έɔμε ρ μορφές του x σαν την (38). Και αν συμβολίσομε με $q^{\rho-i}\,(q^i)$ την τριάδα ɔυ δίνει ο περιττός αριθμός q^i, που δίνεται από τον τύπο (25), πολλαπλασιασμένη με ɩν $q^{\rho-i}$, συμπεραίνομε πως, το σύνολο των τριάδων που δίνει ο x είναι:

$$\boxed{\Sigma = \rho} \qquad (39),$$

ɩι ότι, οι τριάδες που δίνει ο x, δια $i = 1, 2, \ldots, \rho$, θα είναι:

$^{-1}(q),\ q^{\rho-2}(q^2),\ \ldots,\ q(q^{\rho-1}),\ 1(q^\rho)$ δηλαδή οι τριάδες:

$$^{-1}\left(q,\ \frac{q^2-1}{2},\ \frac{q^2+1}{2}\right),\ q^{\rho-2}\left(q^2,\ \frac{q^4-1}{2},\ \frac{q^4+1}{2}\right),\ \ldots,$$

$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3$ παράγοντες θα μας δώσουν $2^2 \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3$ τριάδες.

Το σύνολο λοιπόν των τριάδων που δίνει ο αριθμός $x = q_1^{\rho_1} \cdot q_2^{\rho_2} \cdot q_3^{\rho_3}$ είναι:

$$\boxed{\Sigma = 2^0 (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) + 2_1 (\rho_1 \rho_2 + \rho_2 \rho_3 + \rho_1 \rho_3) + 2^2 (\rho_1 \rho_2 \rho_3)} \qquad (44)$$

΄Ομοια σκεπτόμενοι, συμπεραίνουμε πως, από το σύνολο $(\rho_1 + 1)(\rho_2 + 1) \dots (\rho_\nu + 1)$ των διαιρετών του $x = q_1^{\rho_1} q_2^{\rho_2} \dots q_\nu^{\rho_\nu}$ οι $(\rho_1 + 1)(\rho_2 + 1) \dots (\rho_\nu + 1) - 1$ μας δίνουν τριάδες, και ότι οι $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_\nu$ διαιρέτες δίνουν από μια τριάδα, οι $\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \dots + \rho_1 \rho_\nu + \dots + \rho_{\nu-1} \rho_\nu$ δίνουν από δυο τριάδες κ.λπ. και οι $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_\nu$ διαιρέτες δίνουν από $2^{\nu-1}$ τριάδες.

Το σύνολο λοιπόν των τριάδων που δίνει ο x της μορφής (42) είναι:

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma_1 = {} & 2^0 (\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_\nu) + 2^1 (\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \dots + \rho_1\rho_\nu + \rho_2\rho_3 + \dots + \rho_2\rho_\nu + \dots + \rho_{\nu-1}\rho_\nu) \\ & + 2^2 (\rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \dots + \rho_1\rho_2\rho_\nu + \dots + \rho_{\nu-2}\rho_{\nu-1}\rho_\nu) + \dots + 2^{\nu-1} (\rho_1\rho_2 \dots \rho_\nu)\end{aligned}}$$

Οι τύποι (39), (41) και (44) είναι μερικές περιπτώσεις του τύπου (45), δηλαδή ο τύπος (45) ισχύει για κάθε περιττό αριθμό.

Οι διαιρέτες του x, βρίσκονται από τον Π_1 και τις επεκτάσεις του, όπως αναφέραμε παραπάνω.

Παραδείγματα

Να βρεθούν, οι βασικές και μη, τριάδες, λύσεις της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$, στις οποίες πρώτη συνιστώσα είναι ο αριθμός:

1. $x = 81$

΄Εχομε $x = 3^4$. Σύμφωνα με τον τύπο (39), το σύνολο των τριάδων που δίνει ο 81 είναι τέσσερις. Το σύνολο των διαιρετών του 3^4 είναι: $(1, 3, 3^2, 3^3, 3^4)$. Οι διαιρέτες $3, 3^2, 3^3$ και 3^4 δίνουν τριάδες, τις:

3^3, $3^2 (3^2)$, $3 (3^3)$ και $1 (3^4)$, δηλαδή τις:

$$3^3 \left(3, \frac{3^2 - 1}{2}, \frac{3^2 + 1}{2}\right), \quad 3^2 \left(3^2, \frac{3^4 - 1}{2}, \frac{3^4 + 1}{2}\right), \quad 3 \left(3^3, \frac{3^6 - 1}{2}, \frac{3^6 + 1}{2}\right) \quad \text{και}$$

$$1 \left(3^4, \frac{3^8 - 1}{2}, \frac{3^8 + 1}{2}\right), \quad \text{ή}$$

$3^3 (3, 4, 5)$, $3^2 (9, 40, 41)$, $3 (27, 364, 365)$ και $(81, 3280, 3281)$, ή τελικά: $(81, 108, 135)$, $(81, 360, 369)$, $(81, 1092, 1095)$ και $(81, 3280, 3281)$, εκ των οποίων μόνον η τελευταία είναι βασική τριάδα.

. **$x = 675$**

Έχομε $x = 3^3 \cdot 5^2$. Σύμφωνα με τον τύπο (41), το σύνολο των τριάδων που δίνει x είναι:

$$\Sigma = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 + 2 = 17$$

Σχηματίζομε τον πίνακα Π_1 με τα σύνολα των διαιρετών του 3^3 και 5^2, που είναι |, 3, 3^2, 3^3) και (1, 5, 5^2) αντίστοιχα,

1	3	3^2	3^3
5	$3 \cdot 5$	$3^2 \cdot 5$	$3^3 \cdot 5$
5^2	$3 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 5^2$	$3^3 \cdot 5^2$

Οι τριάδες, λοιπόν, που δίνει ο 675 βρίσκονται από τα γινόμενα:

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot (3),\quad 3 \cdot 5^2 \cdot (3^2),\quad 5^2 \cdot (3^3),\quad 3^3 \cdot 5 \cdot (5),\quad 3^3 \cdot (5^2),\quad 3^2 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 5),$$

$$3 \cdot 5 \cdot (3^2 \cdot 5),\quad 5 \cdot (3^3 \cdot 5),\quad 3^2 \cdot (3 \cdot 5^2),\quad 3 \cdot (3^2 \cdot 5^2) \quad \text{και} \quad 1 \cdot (3^3 \cdot 5^2).$$

Οι πέντε πρώτες μορφές γινομένων, δίνουν από μια τριάδα το καθένα, αφού μέσα την παρένθεση υπάρχει ένας παράγοντας, ενώ οι έξι επόμενες μορφές δίνουν από υο τριάδες, αφού μέσα στην παρένθεση υπάρχουν δυο παράγοντες.

Επομένως οι τριάδες που παίρνομε είναι:

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot \left(3, \frac{3^2-1}{2}, \frac{3^2+1}{2}\right),\quad 3 \cdot 5^2 \cdot \left(3^2, \frac{3^4-1}{2}, \frac{3^4+1}{2}\right),\quad 5^2 \cdot \left(3^3, \frac{3^6-1}{2}, \frac{3^6+1}{2}\right),$$

$$3^3 \cdot 5 \cdot \left(5, \frac{5^2-1}{2}, \frac{5^2+1}{2}\right),\quad 3^3 \cdot \left(5^2, \frac{5^4-1}{2}, \frac{5^4+1}{2}\right) \quad \text{και}$$

$$3^2 \cdot 5 \cdot \left(3 \cdot 5, \frac{3^2 \cdot 5^2 - 1}{2}, \frac{3^2 \cdot 5^2 + 1}{2}\right),\quad 3^2 \cdot 5 \cdot \left(3 \cdot 5, \frac{5^2 - 3^2}{2}, \frac{5^2 + 3^2}{2}\right),$$

$$3 \cdot 5 \cdot \left(3^2 \cdot 5, \frac{3^4 \cdot 5^2 - 1}{2}, \frac{3^4 \cdot 5^2 + 1}{2}\right),\quad 3 \cdot 5 \cdot \left(3^2 \cdot 5, \frac{3^4 - 5^2}{2}, \frac{3^4 + 5^2}{2}\right),$$

$$5 \cdot \left(3^3 \cdot 5, \frac{3^6 \cdot 5^2 - 1}{2}, \frac{3^6 \cdot 5^2 + 1}{2}\right),\quad 5 \cdot \left(3^3 \cdot 5, \frac{3^6 - 5^2}{2}, \frac{3^6 + 5^2}{2}\right),$$

$$3^2 \cdot \left(3 \cdot 5^2, \frac{3^2 \cdot 5^4 - 1}{2}, \frac{3^2 \cdot 5^4 + 1}{2}\right),\quad 3^2 \cdot \left(3 \cdot 5^2, \frac{5^4 - 3^2}{2}, \frac{5^4 + 3^2}{2}\right),$$

$$3\cdot\left(3^2\cdot 5^2, \frac{3^4\cdot 5^4 - 1}{2}, \frac{3^4\cdot 5^4 + 1}{2}\right),\quad 3\cdot\left(3^2\cdot 5^2, \frac{5^4 - 3^4}{2}, \frac{5^4 + 3^4}{2}\right),$$

$$1\cdot\left(3^3\cdot 5^2, \frac{3^6\cdot 5^4 - 1}{2}, \frac{3^6\cdot 5^4 + 1}{2}\right),\quad 1\cdot\left(3^3\cdot 5^2, \frac{3^6 - 5^4}{2}, \frac{3^6 + 5^4}{2}\right) \quad \text{ή}$$

$225\cdot(3, 4, 5)$, $75\cdot(9, 40, 41)$, $25\cdot(27, 364, 365)$

$135\cdot(5, 12, 13)$, $27\cdot(25, 312, 313)$, $45\cdot(15, 112, 113)$,

$45\cdot(15, 8, 17)$, $15\cdot(45, 1012, 1013)$, $15\cdot(45, 28, 53)$,

$5\cdot(135, 9112, 9113)$, $5\cdot(135, 352, 377)$, $9\cdot(75, 2812, 2813)$,

$9(75, 308, 317)$, $3\cdot(225, 25312, 25313)$, $3\cdot(225, 272, 353)$,

$1\cdot(675, 227812, 227813)$ και $1\cdot(675, 52, 677)$, ή τελικά:

(675, 900, 1125), (675, 3000, 3075), (675, 9100, 9125),

(675, 1620, 1755), (675, 8424, 8451), (675, 5040, 5085),

(675, 360, 765), (675, 15180, 15195), (675, 420, 795),

(675, 45560, 45565), (675, 1760, 1885), (675, 25308, 25317),

(675, 2772, 2853), (675, 75936, 75939), (675, 816, 1059),

(675, 227812, 227813), και (675, 52, 677).

Το σύνολο λοιπόν των τριάδων, που ο 675 είναι πρώτη συνιστώσα, είναι 17, εκ οποίων οι 15 είναι πολλαπλάσια άλλων βασικών τριάδων και οι δυο βασικές τριά Οι βασικές τριάδες είναι οι δυο τελευταίες.

7.2. Ο δοσμένος αριθμός x είναι άρτιος.

Έστω ότι, ο δοσμένος αριθμός x, μετά την ανάλυσή του σε γινόμενο πρώτων ραγόντων, έχει τη μορφή:

7.2.1. $\mathbf{x = 2^\rho}$ (46)

Εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση 7.1.1.

Το σύνολο των διαιρετών του x είναι: $(1, 2, 2^2, ..., 2^{\rho-1}, 2^\rho)$, πλήθους $\rho + 1$. Ο αιρέτες 1 και 2, δεν δίνουν τριάδες. Άρα το σύνολο των διαιρετών του x, που δίν τριάδες είναι $\rho + 1 - 2 = \rho - 1$. Αλλά καθένας από τους διαιρέτες αυτούς δίνει τριάδα, σύμφωνα με την παράγραφο 6.2.1., την τριάδα του τύπου (28).

ʼο σύνολο λοιπόν των τριάδων που δίνει ο x είναι:

$$\boxed{\Sigma = \rho - 1} \quad (47)$$ και είναι οι τριάδες:

^{2} (2^2), $2^{\rho-3}(2^3)$, ..., $2(2^{\rho-1})$ και $1(2^\rho)$, δηλαδή οι τριάδες:

$^{-2}(2^2, 2^2-1, 2^2+1)$, $2^{\rho-3}(2^3, 2^4-1, 2^4+1)$ ... $2(2^{\rho-1}, 2^{2(\rho-2)}-1, 2^{2(\rho-2)}+1)$

και $(2^\rho, 2^{2(\rho-1)}-1, 2^{2(\rho-1)}+1)$, διότι

$$(2^{\rho-\kappa}) = (2 \cdot 2^{\rho-\kappa-1}) = (2^{\rho-\kappa}, 2^{2(\rho-\kappa-1)}-1, 2^{2(\rho-\kappa-1)}+1).$$

.2. $\mathbf{x = 2^\rho \cdot q_1^{\rho_1} \cdot q_2^{\rho_2} \dots q_\nu^{\rho_\nu}}$ (48)

τομε: $q_1^{\rho_1} \cdot q_2^{\rho_2} \dots q_\nu^{\rho_\nu} = Q$, οπότε ο αριθμός x παίρνει τη μορφή $x = 2^\rho \cdot Q$ (49) ου Q περιττός αριθμός. Για να βρούμε τις τριάδες που δίνει ο x της μορφής (49), ικρίνομε τις περιπτώσεις:

1. Γράφομε τον x υπό τη μορφή $x = 2^\rho \cdot (Q)$. Υπό τη μορφή αυτή, παίρνομε όλες τριάδες που δίνει ο περιττός αριθμός Q, πλήθους Σ_1 όπως δίνονται από τον τύπο ·), και βρίσκονται σαν τριάδες περιττού αριθμού, πολλαπλασιασμένος επί τον α- ϑμό 2^ρ.

2. Γράφομε τον x υπό τη μορφή $Q \cdot (2^\rho)$. Έτσι παίρνομε όλες τις τριάδες που δί- ι ο αριθμός 2^ρ, πολλαπλασιασμένος επί τον αριθμό Q, που είναι πλήθος $\rho - 1$, κα- τον τύπο (47).

3. Γράφομε τον x υπό τη μορφή $x = 2^{\rho-2} \cdot \kappa \cdot (2 \cdot 2\lambda \cdot \mu)$ (50), όπου λ και μ ζεύγη που δίνουν τις τριάδες του Q. Η μορφή λοιπόν (50) θα μας δώσει Σ_1 ιάδες. Αν αλλάξομε τη θέση των λ και μ στη μορφή (50), θα έχομε: $= 2^{\rho-2} \cdot \kappa \cdot (2 \cdot 2\lambda \cdot \mu)$, που μας δίνει πάλι Σ_1 τριάδες. Δηλαδή αν έχομε έξω από ν παρένθεση το $2^{\rho-2}$, παίρνομε $2\Sigma_1$ τριάδες.

Αν γράψομε το x υπό τη μορφή $x = 2^{\rho-3} \cdot (2 \cdot 2^2 \cdot \lambda \cdot \mu)$, παίρνομε πάλι $2\Sigma_1$ τριά- ς. Όμοια προχωρούντες φθάνομε στη μορφή $\kappa \cdot (2 \cdot 2^{\rho-1} \lambda\mu)$ που δίνει επίσης $2\Sigma_1$ ιάδες. Οι μορφές που παίρνει ο x είναι $\rho-1$, άρα οι τριάδες που παίρνομε γράφοντας ν x υπό τη μορφή $x = 2^{\rho-i} \kappa \cdot (2 \cdot 2^{i-1} \lambda\mu)$, όπου $i = 2, 3, \dots, \rho$, που είναι $(\rho-1)$ ορφές θα είναι: $(\rho-1) \cdot 2\Sigma_1$.

Επομένως το πλήθος Σ, των τριάδων που δίνει ο αριθμός x της μορφής (48) είναι:

$$\Sigma_1 + \rho - 1 + (\rho - 1)\, 2\Sigma_1$$ δηλαδή:

$$\boxed{\Sigma = (2\rho - 1)\,\Sigma_1 + \rho - 1} \quad (51)$$

του Σ_1 το πλήθος των τριάδων που δίνει ο περιττός αριθμός Q, που δίνεται από τον τύπο (45). Ο τύπος (51) ισχύει για κάθε άρτιο αριθμό, ανεξάρτητα από το βαθμ αρτιότητας, όπως και για την περίπτωση 7.2.1.

Παραδείγματα

Να βρεθούν, οι βασικές και μη, τριάδες, λύσεις της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$, στις οποίες πρώτη συνιστώσα είναι ο αριθμός:

1 $x = 32$.

Το $32 = 2^5$, άρα $x = 2^5$. Σύμφωνα με τον τύπο (47) οι τριάδες που δίνει ο x θα είναι $5 - 1 = 4$, οι $2^3(2^2)$, $2^2(2^3)$, $2 \cdot (2^4)$ και $1 \cdot (2^5)$, δηλαδή οι τριάδες:

$$2^3 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 1),\quad 2^2 \cdot (2 \cdot 2^2 \cdot 1),\quad 2 \cdot (2 \cdot 2^3 \cdot 1) \quad \text{και} \quad (2 \cdot 2^4 \cdot 1) \quad \text{ή}$$

$$8 \cdot (4, 3, 5),\quad 4 \cdot (8, 15, 17),\quad 2 \cdot (16, 63, 65) \quad \text{και} \quad (32, 255, 257)$$

ή τελικά: (32, 24, 40), (32, 60, 68), (32, 126, 130) και (32, 255, 257) εκ των οποίων μόνον η τελευταία είναι βασική τριάδα.

2. $x = 2700$.

Ο $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, άρα $x = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

Σύμφωνα με τον τύπο (51), το πλήθος των τριάδων, που δίνει ο 2700, θα είναι: $(2 \cdot 2 - 1)\Sigma_1 + 2 - 1 = 3\Sigma_1 + 1$, όπου $\Sigma_1 = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 + 2 = 17$, όπως βγαίνουν από τον τύπο (41) ή τον (45) για τον περιττό αριθμό $3^3 \cdot 5^2$. Δηλαδή

$$\Sigma = 3 \cdot 17 + 1 = 52 \quad \text{τριάδες.}$$

Πως θα βρούμε τις τριάδες.

1. Γράφομε τον x υπό τη μορφή $x = 2^2(3^3 \cdot 5^2)$ και έχομε τις τριάδες του περιττού αριθμού $3^3 \cdot 5^2$, που είναι 17, πολλαπλασιασμένες με τον αριθμό 4.

Ήδη έχομε τις τριάδες του $3^3 \cdot 5^2$ από το παράδειγμα 2 των περιττών αριθμών, που πολλαπλασιασμένες με το 4 μας δίνουν:

(2700, 3600, 4500), (2700, 12000, 12300), (2700, 36400, 36500),

(2700, 6480, 7020), (2700, 33696, 33804), (2700, 2160, 20340),

(2700, 1440, 3060), (2700, 60720, 60780), (2700, 1680, 3180),

(2700, 182240, 182260), (2700, 7040, 7540), (2700, 101232, 101268),

(2700, 11088, 11412), (2700, 303744, 303756), (2700, 3264, 4236),

(2700, 911248, 911252) και (2700, 208, 2708).

2. Γράφομε το x υπό τη μορφή $x = 3^3 \cdot 5^2 \cdot (2^2)$, που σημαίνει, τριάδες του 2^2 επί τον αριθμό $3^3 \cdot 5^2 = 675$.
Αλλά ο 2^2 δίνει μόνον την τριάδα (4, 3, 5), άρα η τριάδα του x είναι η

$$675 \cdot (4, 3, 5) = (2700, 2025, 3375).$$

3. Γράφομε τον x υπό τη μορφή $x = \kappa \cdot (2 \cdot 2\lambda\mu)$, όπου τα λ και μ είναι τα ζεύγη του περιττού αριθμού $3^3 \cdot 5^2$. Έτσι έχομε τις τριάδες:

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot (2, 2 \cdot 3, 1),\quad 3^2 \cdot 5^2 \cdot (2, 2, 3),\quad 3 \cdot 5^2 \cdot (2, 2 \cdot 3^2, 1),\quad 3 \cdot 5^2 \cdot (2, 2, 3^2),$$
$$5^2 \cdot (2, 2 \cdot 3^3, 1),\quad 5^2 \cdot (2, 2, 3^3),\quad 3^3 \cdot 5 \cdot (2, 2 \cdot 5, 1),\quad 3^3 \cdot 5 \cdot (2, 2, 5),$$
$$3^3 (2, 2 \cdot 5^2, 1),\quad 3^3 \cdot (2, 2, 5^2),\quad 3^2 \cdot 5 \cdot (2, 2 \cdot 3 \cdot 5, 1),\quad 3^2 \cdot 5 \cdot (2, 2, 3 \cdot 5),$$
$$3^2 \cdot 5 \cdot (2, 2 \cdot 5, 3),\ 3^2 \cdot 5 \cdot (2, 2 \cdot 3, 5),\ 3 \cdot 5 \cdot (2, 2 \cdot 3^2 \cdot 5, 1),\ 3 \cdot 5 \cdot (2, 2, 3^2 \cdot 5),$$
$$3 \cdot 5 \cdot (2, 2 \cdot 3^2, 5),\quad 3 \cdot 5 \cdot (2, 2 \cdot 5, 3^2),\quad 5 \cdot (2, 2 \cdot 3^3 \cdot 5, 1),\quad 3 \cdot 5 \cdot (2, 2, 3^3 \cdot 5),$$
$$5 \cdot (2, 2 \cdot 3^3, 5),\quad 5 \cdot (2, 2 \cdot 5, 3^3),\quad 3^2 \cdot (2, 2 \cdot 3 \cdot 5^2, 1),\quad 3^2 \cdot (2, 2, 3 \cdot 5^2),$$
$$3^2 \cdot (2, 2 \cdot 3, 5^2),\quad 3^2 \cdot (2, 2 \cdot 5^2, 3),\quad 3 \cdot (2, 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2, 1),\quad 3 \cdot (2, 2, 3^2 \cdot 5^2),$$
$$3 \cdot (2, 2 \cdot 3^2, 5^2),\quad 3 \cdot (2, 2 \cdot 5^2, 3^2),\quad (2, 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2, 1),\quad (2, 2, 3^3 \cdot 5^2),$$
$$(2, 2 \cdot 3^3, 5^2),\quad \text{και}\quad (2, 2, 5^2, 3^3).$$

Βρίσκομε τις τριάδες των παρενθέσεων, με τους τύπους (12), και πολλαπλασιάζομε με τους αριθμούς που είναι έξω απ' αυτές και έχομε τις τριάδες:

(2700, 7875, 8325), (2700, 1125, 2925), (2700, 24225, 24375),

(2700, 5775, 6375), (2700, 72875, 72925), (2700, 18125, 18325),

(2700, 13365, 13635), (2700, 2835, 3915), (2700, 67473, 67527,

(2700, 16767, 16983), (2700, 40455, 40545), (2700, 9945, 10305),

(2700, 4095, 4905), (2700, 495, 2745), (2700, 121485, 121515),

(2700, 30315, 30435), (2700, 4485, 5235), (2700, 285, 2715),

(2700, 364495, 364505), (2700, 91105, 91145), (2700, 14455, 14705),

(2700, 3145, 4145), (2700, 202491, 202509), (2700, 50589, 50661),

(2700, 5301, 5949), (2700, 22419, 22581), (2700, 607497, 607503),

(2700, 151863, 151887), (2700, 903, 2847), (2700, 7257, 7743), (2700, 1822499, 1822501), (2700, 455621, 455629),

(2700, 2291, 3541), και (2700, 1771, 3229).

Σύνολο τριάδων $17 + 1 + 34 = 52$, εκ των οποίων μόνον οι τέσσερις τελευταίες είναι βασικές τριάδες.

Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ΄ ΣΑΣ ΑΠΑΝΤΑ

Επιμέλεια στήλης: *Μ. Κατσοπρινάκης*[1] *και Μ. Λάμπρου*[2].
Διεύθυνση αλληλογραφίας: *Πανεπιστήμιο Κρήτης, Μαθηματικό Τμήμα, τ.χ. 470, Ηράκλειο, Κρήτη.*

Ο σκοπός της στήλης είναι να απαντά σε ερωτήσεις και απορίες μαθηματικού περιεχομένου.

ΕΡΩΤΗΣΗ: (κ.κ. από Θεσσαλονίκη). Πώς και πότε υπολογίστηκαν οι λογάριθμοι (λογαριθμικοί πίνακες);

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η απάντησή μας στο ενδιαφέρον αυτό θέμα θα είναι σε πέντε (άνισα) μέρη: α) Οι λογάριθμοι του Σκώτου μαθηματικού **Napier** (1550-1617), β) η πρόοδος που προέκυψε από τη συνεργασία του **Napier** με τον ΄Αγγλο γεωμέτρη και αστρονόμο **Briggs**, γ) Οι λογάριθμοι του Ελβετού μαθηματικού, αστρονόμου και κατασκευαστή οργάνων **Bürgi** (1552-1632), δ) Οι «σύγχρονοι» υπολογισμοί λογαρίθμων και, τέλος ε) υπολογισμός λογαρίθμων με μέσα προσιτά στους μαθητές Λυκείου.

Η έλλειψη χώρου μας αναγκάζει να περιοριστούμε μόνο σε ορισμένα κύρια σημεία της ιστορίας των λογαρίθμων. Ευτυχώς υπάρχει στην ελληνική βιβλιογραφία το έκτακτο άρθρο του Γ. Θωμαΐδη [1], στο οποίο υπάρχουν πολλές ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες για το τεράστιο θέμα των λογαρίθμων. Για να φτάσει μάλιστα στον αναγνώστη όσο γίνεται περισσότερη πληροφορία πάνω σ' αυτό το θέμα, η απάντησή μας εδώ θα έχει όσο γίνεται μικρότερη επικάλυψη με το [1], όπου φυσικά αυτό δεν αποβαίνει σε βλάβη της ουσίας ή της αυτοτέλειας αυτών που γράφουμε.

α) Napier. Βιογραφικά του Napier μπορεί να βρει κανείς στις εγκυκλοπαίδειες (στο λήμμα Νάπιερ ή στο Νέπερ), καθώς και στις Ιστορίες των Μαθηματικών. Συχνά βλέ-

---

1. Μεταπτυχιακό τμήμα του Παν/μίου Κρήτης.
2. Επίκουρος Καθηγητής στο Παν/μιο Κρήτης.