Author: Χρήστος Στατεράς

Title: Τα Μαθηματικά (και) ως έναυσμα/παρώθηση στην επιστημονική μέθοδο και στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Abstract: Στην εργασία αυτή αναφέρεται ότι ένα πλήθος επιστημονικών αποκαλύψεων και τεχνολογικών εφαρμογών, έχουν παρωθηθεί από μαθηματικές διατυπώσεις και προβλέψεις. Αναφέρεται επίσης ότι η εμπειρική παρατήρηση δεν είναι πλέον επαρκής για να παρωθήσει εκπαιδευτικά το πλήθος των σύνθετων επιστημονικών επιτευγμάτων και τεχνολογικών εφαρμογών. Αποδεικνύεται δε ότι ολοένα και πιο συχνά, ή σχεδόν αποκλειστικά πλέον, τα Μαθηματικά παρωθούν την επιστημονική έρευνα, κάτι που πρέπει να θυμόμαστε και να αξιοπούμε κατά την εκπαιδευτική διαδικασία.

Creator: HDML

Μαθηματική Επιθεώρηση τ. 52. Έτος 1999

Τα Μαθηματικά (και) ως έναυσμα / παρώθηση στην επιστημονική μέθοδο και στην εκπαιδευτική διαδικασία

Χρήστος Δ. Στατεράς
Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Αθηνών
Σχολικός Σύμβουλος Δ.Ε.

Εισαγωγή

Μια αδρή σχηματοποίηση της ιστορικά καταξιωμένης επιστημονικής μεθόδου, της μεθόδου που χρησιμοποίησε –και χρησιμοποιεί– ο άνθρωπος / ερευνητής για τη μελέτη του φυσικού κόσμου, οδηγεί στη διάκριση των εξής βημάτων της: έναυσμα ενδιαφέροντος, διατύπωση υποθέσεων, πειραματισμός, διατύπωση θεωρίας, διαρκής έλεγχος (επιβεβαίωση ή διάψευση).

Αυτή η επιστημονική μέθοδος χρησιμοποιείται –ή πρέπει να χρησιμοποιείται– και κατά την εκπαιδευτική διαδικασία των επιστημών –και όχι μόνο– ως εκπαιδευτική μέθοδος, με τα ίδια βήματα: έναυσμα / παρώθηση ενδιαφέροντος, διατύπωση υποθέσεων / προβληματισμός, πειραματισμός / δραστηριότητες, διατύπωση συμπερασμάτων, εφαρμογή και γενίκευση.

Κατά την εφαρμογή της, όμως, ο άκρατος εμπειρισμός έχει παρασύρει πολλούς ερευνητές και εκπαιδευτικούς στην αναζήτηση του εναύσματος κάθε εκπαιδευτικής διαδικασίας αποκλειστικά στην παρατήρηση. Αλλά, τόσο η ερευνητική εποποιία του ανθρώπου, όσο και η εκπαιδευτική του πρακτική, τις τελευταίες ιδίως δεκαετίες, βρίθουν παραδειγμάτων φαινομένων και θεματικών στα οποία το ερευνητικό ή και το εκπαιδευτικό ενδιαφέρον δεν είναι δυνατόν να προκληθεί –από τον ερευνητή ή τον εκπαιδευόμενο, αντίστοιχα– από κάποια πρωτογενή παρατήρηση στη φύση.

Πολλά φυσικά φαινόμενα που μελετήθηκαν, ιδίως κατά τις τελευταίες δεκαετίες, αποκαλύφθηκαν με έναυσμα μαθηματικές διατυπώσεις / εκφράσεις ή και προβλέψεις, πριν παρατηρηθούν στη φύση ή αναδειχθούν και πραγματοποιηθούν στο επιστημονικό εργαστήριο.

Αντίστοιχα, κατά την εκπαιδευτική διαδικασία μελέτης τέτοιων φαινομένων, προτείνεται η χρήση της μαθηματικής αποκάλυψής τους, πρώτα, για να ακολουθήσει η εργαστηριακή πραγματοποίησή τους, σύμφωνα με την επιστημονική μέθοδο.

Αυτή η τακτική και πρακτική, αφενός επιτρέπει την ανάδειξη των Μαθηματικών και σε μια ακόμη (πέραν των άλλων) φάση της επιστημονικής έρευνας, αυτής του εναύσματος / παρώθησης, αφετέρου μεταφέρει στην εκπαιδευτική διαδικασία την πορεία που ακολούθησε η επιστημονική έρευνα και αφαιρεί τη συχνά δικαιολογημένη απορία για το πώς ο άνθρωπος έφθασε στη γνώση.

Μια ερευνητική / επιστημονική περίπτωση

Ο James Maxwell, το 1864, συγκέντρωσε και συμπλήρωσε τις τέσσερις –ομώνυμες πλέον– εξισώσεις:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(I)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(III)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(IV)}$$

(όπου $\vec{E}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, $\vec{B}$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου, ε_0 διηλεκτρική σταθερά του κενού, μ_0 μαγνητική σταθερά του κενού, ρ πυκνότητα φορτίων) που απετέλεσαν –και αποτελούν έως σήμερα– μια εκπληκτικά πλήρη και ακριβή –αλλά και λιτή και κομψή– περιγραφή της κλασικής ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας.

Έως τότε, τα –γνωστά μας σήμερα και τόσο άρρηκτα συνδεδεμένα με το σύγχρονο τεχνολογικό μας πολιτισμό– ηλεκτρομαγνητικά κύματα ήταν άγνωστα. Ήταν άγνωστα παρότι το –αρχέγονο– φως είναι, επίσης, ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Ποιος όμως θα μπορούσε, παρατηρώντας το απλώς, να καταλήξει στο –καταπληκτικό– συμπέρασμα ότι είναι –όπως κάθε ηλεκτρομαγνητικό κύμα– μια διαταραχή του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου;

Αρκούσαν απλώς μερικές μαθηματικές πράξεις επί των εξισώσεων Maxwell, καθώς καταγράφηκαν μαζί για πρώτη φορά, για να φθάσει κανείς σε μια σημαδιακή εξίσωση.

Από την εξίσωση (IV) του Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1}$$

και επειδή σύμφωνα με το νόμο του Ohm η πυκνότητα $\vec{j}$ του ρεύματος είναι ανάλογη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ δηλαδή $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, όπου σ η ειδική αγωγιμότητα του υλικού η σχέση (1) γίνεται:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \sigma \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \tag{2}$$

Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την εξίσωση (III) του Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, γράφεται:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{3}$$

Αλλά για τυχαίο διάνυσμα $\vec{A}$ ισχύει η ταυτότητα:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

που εφαρμόζοντάς την στη σχέση (3) θα έχουμε:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - \nabla^2 \vec{B} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{4}$$

Επειδή όμως $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (από την εξίσωση II του Maxwell) θα είναι και $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, οπότε από την (4) προκύπτει η εξίσωση:

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

για το μαγνητικό πεδίο.

Αν μάλιστα υποθέσουμε ότι η περιοχή είναι ελεύθερη κινούμενων φορτίων δηλαδή $\vec{j} = 0$, τότε η εξίσωση (5) γίνεται:

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Ομοίως από την εξίσωση (III) του Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \tag{1'}$$

και εφαρμόζοντας στην (1′) την εξίσωση (IV) του Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ καθώς και την ταυτότητα $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ προκύπτει

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

και για περιοχές ελεύθερες ηλεκτρικών φορτίων, όπου $\rho = 0$ ισχύει $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ και από την εξίσωση IV του Maxwell έχουμε:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

και σύμφωνα με το νόμο του Ohm επειδή το $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{2'}$$

για το ηλεκτρικό πεδίο.

Για περιοχή όπου $\vec{j} = 0$ η σχέση (2') γίνεται:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Αυτές οι εξισώσεις που προέκυψαν θύμισαν στον πρώτο ερευνητή που τις κατέγραψε τη γνωστή –και τότε– εξίσωση των μηχανικών κυμάτων:

$$\nabla^2 \vec{\xi} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = 0, \quad \text{όπου v η ταχύτητα του κύματος}$$

Στη θέση της απομάκρυνσης $\vec{\xi}$ βρίσκονται οι εντάσεις του ηλεκτρικού $\vec{E}$ και μαγνητικού $\vec{B}$ πεδίων. Αυτό σημαίνει ότι εκτός των μηχανικών κυμάτων στη φύση υπάρχουν και ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Αυτά μάλιστα όπως προκύπτει από τις εξισώσεις διαδίδονται στο κενό (!), με μια (μέγιστη για το σύμπαν μας) ταχύτητα $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 300.000\,\text{km/sec}$, την ταχύτητα του φωτός (!).

Αργότερα στο εργαστήριο του Hertz ήρθε και η πειραματική επιβεβαίωση (1884). Εκτός του φωτός, που είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα, δημιουργήθηκαν τεχνητά ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ραδιοφωνικά, τηλεοπτικά, τηλεφωνικά, κ.λπ.).

Το έναυσμα ήταν μια μαθηματική εξίσωση, χωρίς να είναι δυνατό κάποιος να φανταστεί κάτι άλλο, ακόμη και σήμερα.

Η προτεινόμενη εκπαιδευτική εκδοχή

Κατά την εκπαιδευτική διαδικασία αυτού του φυσικού φαινομένου, σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης (εκτός κάποιων εξαιρέσεων στην τριτοβάθμια), η ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εισάγεται περίπου μαγικά, ως κάτι που ήταν πάντα γνωστό. Απλώς –διδάσκουμε– ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δημιουργούνται με τις γνωστές –πια– διαδικασίες (κινήσεις του ηλεκτρικού φορτίου ή ακόμη απλούστερα, από κάποιες ηλεκτρονικές διατάξεις). Φυσικά η αρχική αποκάλυψη παραμένει άγνωστη. Αντί της επιστημονικής πορείας που ακολουθήθηκε (δηλαδή από τις μαθηματικές εκφράσεις στο φυσικό φαινόμενο και στη συνέχεια στην τεχνολογική εφαρμογή), υπονοείται μια αντίστροφη πορεία: από την τεχνολογία (που δεν υπήρχε πάντοτε ...), στην επιστημονική θεωρία, στη μαθηματική περιγραφή.

Ασφαλέστερα στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, όπου και η αναλυτική μαθηματική διαδικασία είναι σε πολλές περιπτώσεις μέσα στις δυνατότητες των φοιτητών, αλλά και με περιγραφική / ποιοτική παρουσίαση στις ανώτερες τάξεις του λυκείου, πρέπει να ακολουθείται η πραγματική ερευνητική πορεία. Η αξιοποίηση των –προβλεπόμενων από το νέο αναλυτικό πρόγραμμα και διδασκόμενων στο Λύκειο– εξισώσεων Maxwell δε θα είναι ποτέ πλήρης αν δεν χρησιμοποιηθούν στην εκπαίδευση (και) γι' αυτό που ακριβώς έδωσαν στην επιστήμη και στην τεχνολογία μέσω των Μαθηματικών.

Γενίκευση - Η πρόταση

Αν επικαλεσθήκαμε μια μόνο περίπτωση όπου το έναυσμα της επιστημονικής έρευνας δόθηκε (προκλήθηκε) από τα Μαθηματικά, και αντίστοιχα αναφερθήκαμε στη δυνατότητα της χρησιμοποίησής του ως παρώθηση / έναυσμα για τη διδασκαλία και πειραματική / εργαστηριακή μελέτη του συγκεκριμένου φαινομένου, η γενίκευση είναι αυτονόητη. Ένα πλήθος επιστημονικών αποκαλύψεων και τεχνολογικών εφαρμογών (laser, κ.λπ.) έχουν παρωθηθεί από μαθηματικές διατυπώσεις και προβλέψεις.

Η πρότασή μας είναι αβίαστη. Η εμπειρική παρατήρηση δεν είναι πλέον επαρκής για να παρωθήσει εκπαιδευτικά το πλήθος των σύνθετων επιστημονικών επιτευγμάτων και τεχνολογικών εφαρμογών. Ολοένα και πιο συχνά –ή σχεδόν αποκλειστικά πλέον– τα Μαθηματικά παρωθούν την επιστημονική έρευνα. Αυτό πρέπει να το θυμόμαστε –και να το αξιοποιούμε– (και) κατά την εκπαιδευτική διαδικασία.

Βιβλιογραφία

1. ALONSO - FINN, Universal Physics, Electromagnetism Vol. II, Fields and Waves vol II, New York 1980.
2. PARSLEY, Electromagnetism Vol IV, Berklen University Series, Berklen, 1975.
3. WEINBERG S, Dreams for a Final Theory, Pantheon Books, 1992.
4. CHELMERS, E. F., What is this thing called Science, University of Queenland Press, 1992.
5. BAKER D., CLAY J., FOX C., Challenging way of knowing, Falmer Press, 1996.