Author: Δημήτρης Μάγειρας

Title: Μαθηματικά μοντέλα φυσικών και κοινωνικών συστημάτων_

Creator: HDML

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ὑπὸ Δημητρίου Γ. Μαγείρου

Πρόλογος

Τὸ βιβλίον αὐτὸ βασίζεται εἰς σειρὰν μαθημάτων μου ἐντὸς τῆς General Electric co, διαλέξεών μου ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν Ἀμερικῆς, ὅπως καὶ εἰς τὴν μελέτην προσφάτων ἐπιστημονικῶν δημοσιευμάτων.

Παρέχει μίαν συστηματικὰ ὀργανωμένην γνῶσιν, ἐκ τῆς ὁποίας καὶ φαίνεται ἡ ἀξία τῶν μαθηματικῶν ὡς μεθόδου ἐρεύνης τῶν φαινομένων, καὶ ἐκ τῆς ὁποίας δεικνύεται ἡ πραγματικὴ οὐσία τῶν ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν, τὰ ὁποῖα χαρακτηρίζουν τὸν αἰῶνα μας.

Ὅ,τι γράφεται εἰς τὸ βιβλίον αὐτό, ὑπῆρξεν ὁδηγός μου εἰς ὅ,τι ἐπιστημονικῶς ἐπεδίωξα, καὶ ἀποτελεῖ τῆς ἐπιστημονικῆς ζωῆς μου τὴν πεῖραν, αὐτὴν δὲ τὴν πεῖραν μου θέτω τώρα ὑπ' ὄψιν τοῦ Ἕλληνος σπουδαστοῦ καὶ ἐρευνητοῦ, μὲ τὴν ἐλπίδα, ὅπως τοῦ φανῇ δι' αὐτοῦ τοῦ τρόπου χρήσιμος.

Philadelphia, PA—U.S.A. Δημήτριος Γ. Μάγειρος

Φεβρουάριος, 1975

Εἰσαγωγή

Τὰ μαθηματικὰ σήμερον δεσπόζουν τῆς ἐπιστημονικῆς ζωῆς. Μὲ μαθηματικὰς μεθόδους δύναται κανεὶς νὰ μελετήσῃ τὴν φύσιν τῶν φαινομένων φυσικῶν καὶ τεχνολογικῶν καὶ τῶν φαινομένων τῆς ζωῆς, καὶ μὲ μαθηματικὰ μοντέλα δύναται νὰ περιγράψῃ καὶ ἐξηγήσῃ τὰ φαινόμενα, νὰ προΐδῃ, ἢ ἐνίοτε ἀκόμη καὶ νὰ κατευθύνῃ, τὴν ἐξέλιξίν των.

Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ θὰ περιγράψωμεν μίαν «κλασσικὴν μέθοδον» εὑρέσεως καταλλήλων μαθηματικῶν μοντέλων εἰς φυσικὰ φαινόμενα, τεχνολογικὰ συστήματα καὶ φαινόμενα τῆς πραγματικῆς ζωῆς, θὰ κάμωμεν παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς μεθόδου, καὶ θὰ δώσωμεν παραδείγματα ἀπὸ διάφορα ἐπιστημονικὰ πεδία ὡς ἐφαρμογὰς τῆς μεθόδου. Αἱ ἑπόμεναι ἔννοιαι καὶ ὁρισμοὶ εἶναι χρήσιμοι ὡς εἰσαγωγικὴ γνῶσις.

Καταστάσεις φαινομένων, τῶν ὁποίων αἱ μεταβληταὶ ποσότητες ἐπηρεάζονται καὶ ἐπιδροῦν μεταξύ των κατὰ τρόπον ὠργανωμένον, θὰ ὀνομάζωμεν «πραγματικὰ συστήματα» ἢ ἁπλῶς «συστήματα».

Ὁ κύριος σκοπὸς τῆς ἐρεύνης ἑνὸς συστήματος εἶναι: ἡ περιγραφὴ τοῦ συστήματος, ἡ κατανόησις καὶ πρόγνωσις τῆς πορείας καὶ ἐξελίξεώς του· καὶ ἡ τροποποίησις τοῦ συστήματος, ὅπου τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον καὶ δυνατὸν κατὰ τρόπον ὥστε ἡ συμπεριφορὰ τοῦ συστήματος νὰ γίνεται σύμφωνα πρὸς τὴν βούλησιν τοῦ ἐρευνητοῦ.

Ὁ ἀνωτέρω σκοπὸς τῆς ἐρεύνης θὰ δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ, ὅταν δημιουργηθοῦν τὰ κατάλληλα μοντέλα τῶν συστημάτων.

Διὰ νὰ περιγράψωμεν ποσοτικῶς καὶ ἐξηγήσωμεν τὸν μηχανισμὸν τῆς συμπεριφορᾶς ἑνὸς συστήματος, χρειάζεται, νὰ κάμωμεν μερικὰς ὑποθέσεις καὶ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψει μερικὰ ἀρχικὰ δεδομένα τοῦ συστήματος, βάσει δὲ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν προτάσεις, αἱ ὁποῖαι νὰ δίδουν τὴν συμπεριφορὰν τοῦ συστήματος. Ὅταν τοῦτο κατορθωθῇ, θὰ ἔχωμεν δημιουργήσῃ μίαν «θεωρίαν» τοῦ συστήματος, ἡ δὲ θεωρία αὐτὴ θὰ ὁδηγῇ εἰς μαθηματικὰς σχέσεις τῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος, αἱ ὁποῖαι σχέσεις ἀποτελοῦν ἕνα «μαθηματικὸν μοντέλον» τοῦ συστήματος.

Αἱ ἀρχικαὶ πληροφορίαι ἐπὶ τοῦ συστήματος λέγονται «δεδομένα» τοῦ συστήματος.

Ἐὰν ἡ λύσις τοῦ μοντέλου «διερμηνεύῃ τὴν πραγματικότητα κατὰ ἱκανοποιητικὸν τρόπον», θὰ εἶναι λύσις «φυσικῶς δεκτή», καὶ θὰ λέγεται «πραγματικὴ λύσις» τοῦ συστήματος.

Μὴ πραγματικαὶ λύσεις θὰ λέγωνται «τυπικαὶ λύσεις», καὶ τὰ ἀντίστοιχα μοντέλα «τυπικὰ μοντέλα» τοῦ συστήματος.

Μοντέλα μὲ πραγματικὰς λύσεις θὰ ὀνομάζωνται «καταλλήλως τοποθετημένα». Τὰ «μὴ καταλλήλως τοποθετημένα» μοντέλα θὰ ἔχουν «τυπικὰς λύσεις».

Κλασσικὴ μέθοδος εὑρέσεως μαθηματικῶν μοντέλων

Θὰ περιγράψωμεν κλασσικὴν μέθοδον εὑρέσεως μαθηματικῶν μοντέλων τῶν συστημάτων. Ἡ πορεία τῆς μεθόδου ἀκολουθεῖ τὰ ἑπόμενα στάδια. [1(α), 10(α), 12]

1. *Στάδιον I. «Διαμορφώνομεν τὸ σύστημα εἰς καλῶς ἐκπεφρασμένον σύστημα».*

Τὸ στάδιον αὐτὸ τῆς ἐρεύνης ἀφορᾷ τὸ σύστημα ὡς σύστημα. Σημεῖον ἀναχωρήσεως διὰ τὴν εὕρεσιν μοντέλου τοῦ συστήματος εἶναι ἡ γνῶσις τῶν «ἀρχικῶν δεδομένων» τοῦ συστήματος, δηλαδὴ ἡ γνῶσις ἀκριβῶν μετρήσεων, παρατηρήσεων καὶ πειραματικῶν γεγονότων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὸ σύστημα καὶ τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται μὲ πληρότητα καὶ εἶναι γνωστὰ μὲ προσέγγισιν λάθους δεκτοῦ, ὁπότε λέγονται «δεκτὰ δεδομένα».

Ἐπίσης εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν τοὺς νόμους, οἱ ὁποῖοι διέπουν τὸ σύστημα, ὅπως καὶ πᾶν ὅ,τι εἰσέρχεται εἰς τὴν φύσιν τοῦ συστήματος, ὁπότε τὸ σύστημα θὰ λέγεται «καλῶς ἐκπεφρασμένον» (well expressed).

2. *Στάδιον II. «Διαμορφώνομεν τὸ ὀρθῶς διατυπωμένον σύστημα».*

Ἡ διάκρισις τῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος εἰς κυρίας καὶ δευτερευούσας, ἡ δημιουργία θεωρίας καὶ ἀντιστοίχου μοντέλου τοῦ συστήματος, εἶναι ἐργασία τοῦ δευτέρου σταδίου τῆς ἐρεύνης.

2.1. *Κύριαι καὶ δευτερεύουσαι μεταβληταί.*

Ὅταν τὸ σύστημα εἶναι καλῶς ἐκπεφρασμένον, δύναται κανεὶς νὰ ἐκλέξῃ ἀπὸ τὰς μεταβλητὰς τοῦ συστήματος καταλλήλους ἐξ αὐτῶν καὶ εἰς κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε βάσει αὐτῶν νὰ δύναται νὰ γίνῃ ἡ ἔρευνα τοῦ συστήματος. Αὐτὰς τὰς μεταβλητὰς θὰ ὀνομάζωμεν «κυρίας μεταβλητὰς» ἢ «γενικὰς συντεταγμένας» τοῦ συστήματος, καὶ μὲ αὐτὰς ὡς συνιστώσας θὰ γίνῃ ἡ μελέτη τῆς «καταστάσεως» (state) τοῦ συστήματος.

Ἡ φύσις τῶν κυρίων μεταβλητῶν τοῦ συστήματος ἐπιβάλλει ἐν γένει κάποιον περιορισμὸν εἰς τὰ μέγεθός των, ὁπότε θὰ ἔχωμεν ἕνα «χωρίον τῶν κυρίων μεταβλητῶν».

Αἱ ἄλλαι μεταβληταὶ τοῦ συστήματος θὰ λέγωνται «δευτερεύουσαι» μεταβληταὶ ἢ «παράμετροι» τοῦ συστήματος, καὶ μὲ τὸν περιορισμὸν τοῦ μεγέθους των θὰ ἔχωμεν τὸ «χωρίον τῶν παραμέτρων» τοῦ συστήματος.

2.2. *Θεωρία καὶ μοντέλον τοῦ συστήματος.*

Μετὰ τὴν ἐκλογὴν τῶν «δεκτῶν δεδομένων» καὶ τῶν «κυρίων μεταβλητῶν» τοῦ συστήματος, χρειάζεται νὰ εὕρωμεν ἐκφράσεις, αἱ ὁποῖαι νὰ παρέχουν τὴν συμπεριφορὰν τῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος μεταξύ των, ὁπότε θὰ παρέχωνται σχέσεις μεταξὺ τῶν κυρίων μεταβλητῶν βασισμέναι εἰς τὰς μεταξύ των ἐκφράσεις καὶ εἰς ὑποθέσεις, ποὺ θὰ δεχθῶμεν. Ὅλα τ' ἀνωτέρω ἀποτελοῦν τὴν λεγομένην «θεωρίαν» τοῦ συστήματος, καί, ὅταν ἡ θεωρία εἶναι ἱκανοποιητική, θὰ ὁδηγῇ ἐν γένει εἰς μαθηματικὰς ἐκφράσεις, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸ «μαθηματικὸν μοντέλον» τοῦ συστήματος, αὐτὸ δὲ τὸ μοντέλον δίδει τὴν συμπεριφορὰν τοῦ συστήματος κατὰ ποσοτικὸν τρόπον.

Τὸ μοντέλον ἑνὸς συστήματος περιέχει, ἐν γένει, αὐξήσεις τῶν μεταβλητῶν καὶ ἑπομένως ἐκφράζεται, ἐν γένει, μὲ διαφορετικὰς ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι συνδέονται μὲ κατάλληλα δεκτὰ δεδομένα τοῦ συστήματος, τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ «ἀρχικαί», ἢ «ὁριακαί», ἢ «μικταί» συνθῆκαι τοῦ μοντέλου.

Συστήματα διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν εὕρει μοντέλον, βασισμένον εἰς μίαν θεωρίαν, θὰ καλοῦμεν «ὀρθῶς διατυπωμένα» (correctly stated), καὶ τ' ἀντίστοιχα μοντέλα «ὀρθῶς διατυπωμένα».

3. *Στάδιον III. «Ἐκλέγομεν τὸ καταλλήλως τοποθετημένον μοντέλον».*

Ἡ ἀνάπτυξις τῆς θεωρίας τοῦ συστήματος καὶ ἡ δημιουργία τοῦ ἀντιστοίχου μοντέλου ἐστηρίχθησαν εἰς ὑποθέσεις καὶ παραδοχάς, αἱ ὁποῖαι ἐνίοτε εἶναι αὐθαίρετοι, καὶ εἶναι δυνατὸν δι' ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα ν' ἀναπτύξωμεν διαφόρους θεωρίας καί, ἀντιστοίχως, νὰ ἔχωμεν διάφορα μοντέλα, ἑπομένως διαφόρους μαθηματικὰς λύσεις διὰ τὸ σύστημα

Τὸ πρόβλημα τώρα εἶναι: πῶς θὰ γίνῃ ἡ κατάλληλος ἐκλογὴ θεωρίας καὶ μοντέλου, ὥστε ἡ λύσις «νὰ διερμηνεύῃ τὴν πραγματικότητα κατὰ τὸν ἱκανοποιητικώτερον τρόπον», δηλαδή: πῶς, μεταξὺ τῶν «ὀρθῶς διατυπωμένων μοντέλων», θὰ ἐκλέξωμεν τὸ πλέον «καταλλήλως τοποθετημένον μοντέλον».

Ἕνας τρόπος διὰ τὴν ἀνωτέρω ἐκλογὴν εἶναι νὰ ἐλέγξωμεν κατὰ πόσον ἡ λύσις τοῦ ὑπὸ μελέτην μοντέλου ἱκανοποιεῖ τοὺς περιορισμούς:

(ι): ἡ λύσις τοῦ μοντέλου νὰ ὑπάρχῃ,

(ιι): ἡ λύσις νὰ εἶναι μοναδική, καὶ

(ιιι): ἡ λύσις νὰ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῶν δεδομένων.

Οἱ ἀνωτέρω περιορισμοὶ τῆς λύσεως τοῦ μοντέλου ἀποτελοῦν τὰ λεγόμενα «ἐπιτάγματα τοῦ Hadamard», καὶ ἕνα μοντέλον μὲ λύσιν, ἡ ὁποία νὰ ἱκανοποιῇ τ' ἀνωτέρω ἐπιτάγματα, θὰ καλοῦμεν «καταλλήλως τοποθετημένον» κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ Hadamard.

Ὅταν τὸ μοντέλον ἔχῃ τὴν μορφὴν «κανονικοῦ συστήματος διαφορικῶν ἐξισώσεων», τότε εἶναι δυνατὸν νὰ ἐλέγξωμεν ἂν ἡ λύσις ἱκανοποιῇ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ Hadamard, ἔστω καὶ ἐὰν ἡ λύσις εἶναι ἄγνωστος, ἀπὸ ἐξέτασιν καὶ μόνον τῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων τοῦ μοντέλου, βάσει τῶν γνωστῶν θεωρημάτων ὑπάρξεως, μοναδικότητος καὶ συνεχείας τῆς λύσεως.

Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι μία λύσις ἑνὸς «καταλλήλως τοποθετημένου» μοντέλου κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ Hadamard εἶναι «πραγματικὴ λύσις» τοῦ συστήματος, ἤτοι λύσις «φυσικῶς δεκτή».

Ὅταν ἡ λύσις τοῦ μοντέλου δὲν ἱκανοποιῇ ἔστω καὶ ἕνα ἀπὸ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ Hadamard, εἶναι λύσις «τυπική», ὁπότε τὸ πρόβλημα εἶναι «μὴ καταλλήλως τοποθετημένον» κατὰ Hadamard.

Σημειώνομεν ὅτι ἡ ὕπαρξις καὶ ἡ μοναδικότης τῆς λύσεως τοῦ μοντέλου ἐκφράζουν τὴν πίστιν τοῦ ἐρευνητοῦ εἰς τὸν «ντετερμινισμόν», ὁ ὁποῖος εἶναι μία «ἀρχή» σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἐκτελῇ πειράματα μὲ τὴν πεποίθησιν ὅτι τὰ πειράματα θὰ εἶναι συνεπῆ (consistent).

Ὡς πρὸς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ Hadamard παρατηροῦμεν ὅτι: τὰ «δεδομένα», ὡς ἀποτέλεσμα μετρήσεων, παρατηρήσεων καὶ πειραμάτων, περιέχουν λάθη, ὁπότε ἡ λύσις, ἐφ' ὅσον θὰ περιέχῃ λάθος, θὰ παρέχεται μὲ ἀβεβαιότητα. Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ λύσις ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ δεδομένα κατὰ συνεχῆ τρόπον, τότε: ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ λάθος εἰς τὰ δεδομένα, τόσον μικρότερον θὰ εἶναι τὸ λάθος εἰς τὴν λύσιν, ὁπότε εἰς «δεδομένα δεκτὰ» θ' ἀντιστοιχοῦν «λύσεις φυσικῶς δεκταί».

4. *Στάδιον IV. «Προσδιορίζομεν τὴν πραγματικὴν λύσιν τοῦ συστήματος».*

Ἔχομεν ἤδη καταλήξει εἰς μοντέλον «καταλλήλως τοποθετημένον», τοῦ ὁποίου ἡ λύσις εἶναι «φυσικῶς δεκτή». Ὑπολείπεται νὰ προσδιορισθῇ ἡ λύσις αὐτή.

Εἰς πολύπλοκα μοντέλα, ὁ προσδιορισμὸς τῆς λύσεως δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ μὲ τὴν γνῶσιν τῆς ἰδιότητος τῆς «συνεχείας τῆς λύσεως» καὶ ἐφαρμογὴν τῆς «ἀρχῆς τῆς προσεγγίσεως».

Ἐνίοτε, διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς λύσεως A ἑνὸς «καταλλήλως τοποθετημένου» μοντέλου M, εὑρίσκομεν ἕνα κατάλληλον ἁπλοῦν «κατὰ προσέγγισιν» μοντέλον M_n, ἀντίστοιχον τοῦ M, ὁπότε, ἐὰν A_n εἶναι ἡ λύσις τοῦ M_n, τότε ἡ λύσις τοῦ M θὰ εἶναι: $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

5. *Περίληψις.*

Εἴδομεν ὅτι ἡ ἔρευνα πρὸς ἀναζήτησιν φυσικῶς δεκτῶν μαθηματικῶν λύσεων ἑνὸς συστήματος δύναται νὰ γίνῃ εἰς τέσσαρα στάδια, ὅπως δεικνύεται εἰς τὸ Σχῆμα 1.

— Κατὰ τὸ πρῶτον στάδιον, φροντίζομεν ὅπως τὸ πραγματικὸν σύστημα Σ_π γίνῃ «καλῶς ἐκπεφρασμένον», Σ_k, ἀφοῦ ἐκλέξωμεν «δεκτὰ δεδομένα», εὕρωμεν τοὺς φυσικοὺς νόμους, οἱ ὁποῖοι διέπουν τὸ σύστημα, καὶ συγκεντρώσωμεν κάθε πληροφορίαν σχετικὴν μὲ τὴν φύσιν τοῦ συστήματος.

— Κατὰ τὸ δεύτερον στάδιον, δημιουργοῦμεν θεωρίαν καὶ ἀντίστοιχον μοντέλον τοῦ Σ_k. Βασισμένοι εἰς κατάλληλον ἐκλογὴν τῶν κυρίων μεταβλητῶν τοῦ συστήματος καὶ εἰς καταλλήλους ὑποθέσεις, προσδιορίζομεν τὰ χωρία μεταβολῆς τῶν μεταβλητῶν, εὑρίσκομεν σχέσεις τῶν κυρίων μεταβλητῶν, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς μαθηματικὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸ μοντέλον, καὶ τὸ σύστημα γίνεται «ὀρθῶς διατυπωμένον», Σ_o.

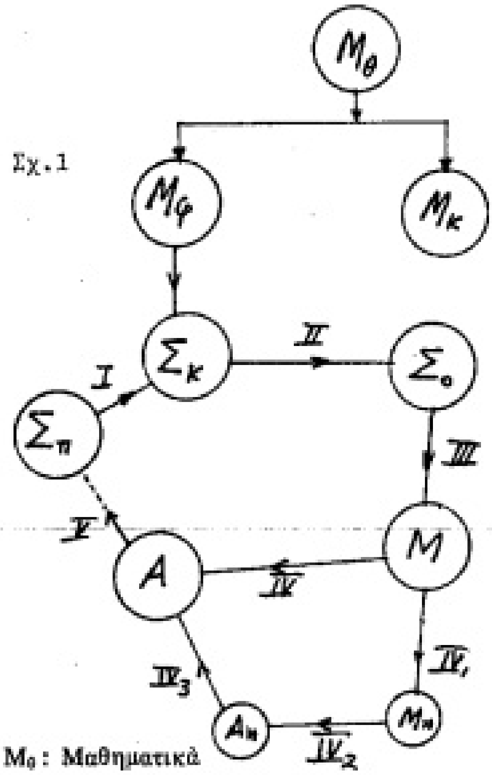
Τὸ στάδιον αὐτὸ εἶναι τὸ ἀποφασιστικώτερον, ἀπαιτεῖ δὲ φυσικὰς γνώσεις τοῦ συστήματος, μαθηματικὴν καὶ ἐρευνητικὴν πεῖραν.

— Κατὰ τὸ τρίτον στάδιον γίνεται ἡ ἐκλογὴ τοῦ καταλληλοτέρου μοντέλου M, μεταξὺ ὅλων τῶν πιθανῶν μοντέλων Σ_o τοῦ συστήματος. Ἡ παραδοχὴ τῶν ἐπιταγμάτων τοῦ Hadamard διὰ τὴν λύσιν τοῦ μοντέλου κάμνει τὸ μοντέλον «καταλλήλως τοποθετημένον» κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ Hadamard, ὁπότε ἡ λύσις τοῦ μοντέλου εἶναι «φυσικῶς δεκτή».

— Τέλος, κατὰ τὸ τέταρτον στάδιον, εὑρίσκομεν τὴν λύσιν A τοῦ μοντέλου M. Ἐὰν τὸ M εἶναι πολύπλοκον, εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ εὑρεθῇ ἡ λύσις A ὡς τὸ ὅριον: $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, ὅπου A_n εἶναι ἡ λύσις τοῦ βοηθητικοῦ μοντέλου M_n.

Τὸ τελευταῖον αὐτὸ στάδιον προϋποθέτει γνῶσιν τῶν μαθηματικῶν καταλλήλων διὰ τὰ ὑπὸ ἐξέτασιν μοντέλα.

Σχ.1



M_θ : Μαθηματικὰ
M_φ : Ἐφηρμοσμένα μαθηματικὰ
M_k : Καθαρὰ μαθηματικὰ
Σ_π : Πραγματικὸν σύστημα
Σ_k : Καλῶς ἐκπεφρασμένον σύστημα
Σ_o : Ὀρθῶς ἐκπεφρασμένον σύστημα
M : Καταλλήλως τοποθετημένον σύστημα
M_n : Βοηθητικὸν σύστημα
A_n : Λύσις τοῦ M_n
$A = \lim_{n\to\infty} A_n$: Λύσις τοῦ M

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς κλασσικῆς μεθόδου

Ἡ μέθοδος διὰ τὴν εὕρεσιν μαθηματικῶν μοντέλων πραγματικῶν συστημάτων, ὅπως περιεγράφη εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, δίδει συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ὕλην ἀναγκαίαν πρὸς περαιτέρω ἔρευναν. Αἱ ἀκόλουθοι παρατηρήσεις δύνανται νὰ διευκρινίσουν καὶ συμπληρώσουν πολλὰ σημεῖα τῆς μεθόδου, ὅπως καὶ νὰ θέσουν ὑπ' ὄψιν τοῦ ἐρευνητοῦ ἀπόψεις πρὸς ἐξέτασιν καὶ προβλήματα πρὸς λύσιν.

1. *Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ὑποθέσεων.* [1(α), 2, 14(a, b)]

Ἡ ὑπόθεσις παίζει ἕνα θεμελιώδη ρόλον εἰς τὴν ἔρευναν καὶ εἶναι ἕνα σπουδαῖον ὅπλον εἰς χεῖρας τοῦ ἐρευνητοῦ.

Ὅμως, ἡ χρήσιμος ὑπόθεσις, ἐμπειρικὴ ἢ ἐπιστημονική, πρέπει νὰ εἶναι δεκτικὴ πειραματικοῦ ἐλέγχου. Ὡς πειραματικὸν ἔλεγχον ἐννοοῦμεν τὴν συμφωνίαν τῶν λογικῶν συνεπειῶν, ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὰς ὑποθέσεις, πρὸς τὴν κατάστασιν, ποὺ ἐμφανίζει ἡ πραγματικότης. Ὑπόθεσις μὴ δεκτικὴ πειραματικοῦ ἐλέγχου δὲν δύναται νὰ γίνῃ δεκτὴ δι᾽ ἐπιστημονικοὺς σκοπούς. Ἡ ὑπόθεσις εἶναι ἔργον τῆς φαντασίας, καὶ εἶναι δημιουργική, ἐὰν δύναται νὰ εἶναι βάσις πρὸς ἀνακάλυψιν τῆς ἀληθείας καὶ καθοδήγησιν εἰς παρατηρήσεις καὶ πειράματα. Ἐὰν ἐμπειρικαὶ παρατηρήσεις ὁδηγοῦν εἰς ἐπιβεβαίωσιν ἢ διάψευσιν μιᾶς ὑποθέσεως, τότε ἡ ὑπόθεσις ἔχει ἤδη φέρει σημαντικὴν συμβολὴν εἰς τὴν ἐπιστήμην, ἀφ᾽ ὅσον ἐνέπνευσεν καὶ καθωδήγησεν μίαν σημαντικὴν ἔρευναν.

Μία γόνιμος ὑπόθεσις ὁδηγεῖ εἰς γενικοποίησιν, καὶ μία γενικοποίησις ὁδηγεῖ εἰς μαθηματικὴν μορφήν, ἡ ὁποία εἶναι ἱκανὴ πρὸς πρόγνωσιν.

3. *Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν.* [5]

Εἰς πολλὰ συστήματα, ἰδίως βιολογικά, ἡ μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος ἐκλογὴ τῶν κυρίων μεταβλητῶν εἶναι δύσκολος ἢ ἀπατηλή, διότι ὅλαι αἱ μεταβληταὶ τοῦ συστήματος ἐξαρτῶνται ἐν γένει ἀπὸ τὸν χρόνον.

Εἰς τοιαῦτα συστήματα ἡ ἐκλογὴ τῶν κυρίων μεταβλητῶν εἶναι κάπως αὐθαίρετος, ἐνδέχεται δὲ νὰ διευκολυνθῇ, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν «αὔξησιν τῶν μεταβλητῶν ὡς συνάρτησιν τοῦ χρόνου».

Ἐὰν ἕνα σύστημα, μετὰ μικρὰν διαταραχήν, ἐπανέρχεται εἰς τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν κατάστασιν, τοῦτο εἰς τὴν πρᾶξιν θὰ γίνεται εἰς χρόνον πεπερασμένον, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν «χρόνον ἀποκαταστάσεως» (relaxation time) τοῦ συστήματος.

Σύστημα μὲ μικρὸν (μεγάλον) χρόνον ἀποκαταστάσεως θὰ ὀνομάζωμεν «ταχὺ» (βραδὺ) σύστημα.

Ὁ χρόνος ἀποκαταστάσεως τῶν μεταβλητῶν ἑνὸς συστήματος δὲν εἶναι ἐν γένει ὁ ἴδιος διὰ κάθε μεταβλητήν. Μεταβληταὶ τῶν ὁποίων αἱ «αὐξήσεις» εἶναι «ταχεῖαι» (βραδεῖαι) συναρτήσεις τοῦ χρόνου, δύνανται νὰ ληφθοῦν ὡς «κύριαι μεταβληταὶ» (παράμετροι).

Ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ φαινόμενον, μετὰ δύο διαφόρους ἐκλογὰς τῶν κυρίων μεταβλητῶν, ὁδηγεῖ εἰς δύο συστήματα (μοντέλα) μὲ διάφορον «χρόνον ἀποκαταστάσεως» ἕκαστον. Εἰς τὸ ταχύτερον ἐξ αὐτῶν ἡ ἐκλογὴ τῶν κυρίων μεταβλητῶν εἶναι περισσότερον ἐπιτυχὴς παρὰ εἰς τὸ ἄλλο.

Εἰς ἕνα ταχὺ σύστημα, αἱ κύριαι μεταβληταὶ (παράμετροι) ἔχουν ταχεῖαν (βραδεῖαν) αὔξησιν, ἤ, ἄλλως, μία ἐπιτυχὴς ἐκλογὴ τῶν κυρίων μεταβλητῶν κάμνει τὸ σύστημα ὅσον τὸ δυνατὸν ταχύτερον.

Εἰς ἕνα σύστημα πάντοτε ἐπιδιώκεται, ὅπως ὁ ἀριθμὸς τῶν κυρίων μεταβλητῶν εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μικρότερος.

Τὸ σύστημα γίνεται πολὺ πεπλεγμένον, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν κυρίων μεταβλητῶν εἶναι μεγάλος.

3. *Ἐπὶ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων. Συστήματα ντετερμινιστικὰ καὶ στοχασικά.* 1(α), 2, 14

Τὰ ἀρχικὰ «δεδομένα» τοῦ συστήματος ἐθεωρήθησαν ἕως τώρα πλήρως δεδομένα, πρὸς τὸν σκοπὸν ὅπως μορφωθῇ τὸ πρόβλημα καὶ ἐκτεθῇ ἡ μέθοδος.

Μὲ τὴν παραδοχὴν τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς διὰ τὰ δεδομένα ἡ πορεία τῆς μεθόδου ὁδηγεῖ εἰς ἀποτελέσματα βέβαια, καὶ ἡ ἀρχὴ τῆς αἰτιότητος, τῆς ἀλληλουχίας αἰτίων καὶ αἰτιατῶν καὶ τῆς ἀναγκαιότητος, γίνεται ὁδηγὸς εἰς τὴν ἐξέλιξιν τοῦ συστήματος, ὁπότε τὸ σύστημα λέγεται «ντετερμινιστικόν».

Τὰ λάθη ὅμως εἰς τὰ δεδομένα εἶναι ἀναπόφευκτα, ἡ δὲ ἀβεβαιότης καὶ ἀπροσδιοριστία εἰς τὰ δεδομένα δίδει ἀβεβαιότητα καὶ εἰς τὸ ἀποτέλεσμα καὶ τὴν πρόγνωσιν. Εἰς τὸ σύστημα εἰσέρχονται στοιχεῖα στατιστικὰ καὶ στοχαστικά, ὅπως καὶ πιθανότητες, τὸ σύστημα γίνεται «στοχαστικόν», δηλαδὴ «μὴ-ντετερμινιστικόν», ἡ «ἀρχὴ τοῦ ντετερμινισμοῦ» ἀντικαθίσταται ἀπὸ τὴν «ἀρχὴν τῆς πιθανότητος καὶ τοῦ ἀπροσδιορίστου», ἡ ἀβεβαιότης καὶ ἀπροσδιοριστία κάμνει τὸ ντετερμινιστικὸν ἀποτέλεσμα ἕνα «πιθανὸν αἰτιατὸν» (probabilistic causalitn), μίαν προσέγγισιν χρήσιμον πρὸς ἐπεξεργασίαν διὰ στοχαστικῶν μεθόδων.

Ἕνα στοχαστικὸν μοντέλον εἶναι ἡ μαθηματικοποίησις μιᾶς ἐμπειρικῆς πορείας, τῆς ὁποίας τὸ βάδισμα διέπεται ἀπὸ τοὺς νόμους τῶν πιθανοτήτων. Ὅπου, κυρίως, εἰσέρχεται ἡ συμπεριφορὰ ζώντων ὀργανισμῶν, αἱ ἀντιδράσεις καὶ τὸ περιβάλλον ἔχουν τὸν χαρακτῆρα τοῦ τυχαίου (raundom), τὰ μαθηματικὰ μοντέλα θὰ εἶναι στοχαστικοῦ τύπου, καὶ ἡ θεωρία τῶν πιθανοτήτων καὶ τῆς στατιστικῆς θὰ παίζουν πρωτεύοντα ρόλον.

4. *Ἐπὶ τῶν ἐν ἀπομονώσει συστημάτων.*

Ἔχομεν μέχρις ἐδῶ θεωρήσει συστήματα ἐν ἀπομονώσει, δηλαδὴ ἔχομεν ὑποθέσει ἀνύπαρκτον κάθε ἐκ τῶν ἔξω ἐπίδρασιν πρὸς τὸ ὑπὸ ἔρευναν σύστημα. Τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει ἐν γένει εἰς τὴν πρᾶξιν, διότι πράγματι δὲν ὑφίστανται συστήματα τελείως ἀπομονωμένα. Ἡ συσχέτισις τοῦ ὑπὸ μελέτην συστήματος μὲ ἄλλα συστήματα, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι τοῦ ἀμέσου ἐνδιαφέροντος τοῦ ἐρευνητοῦ, εἶναι ἀναπόφευκτος καὶ ἀνεξέλεγκτος. Π.χ., εἶναι δυνατὸν βιολογικοὶ παράγοντες νὰ ἔχουν διαφορετικὰ χαρακτηριστικὰ δράσεως, ὅταν θεωροῦνται ἐν ἀπομονώσει, παρὰ ὅταν σχετίζωνται μὲ ἄλλα συστήματα. Μέρη ἑνὸς συστήματος μελετῶνται πρῶτον ἐν ἀπομονώσει, καὶ κατόπιν ἔρχεται ἡ μελέτη τῶν ἰδιοτήτων, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται κατὰ τὴν ἀντίδρασιν τῶν μερῶν τοῦ συστήματος.

5. *Ἐπὶ τῆς θεωρίας ἑνὸς συστήματος.* [2]

Ἡ θεωρία ἑνὸς συστήματος εἶναι ἕνα σύνολον προτάσεων ἐπὶ τῆς συμπεριφορᾶς τοῦ συστήματος, βασίζεται δὲ ἐπάνω εἰς δεδομένα τοῦ συστήματος καὶ εἰς ὑποθέσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἄλλαι μὲν ἐπαληθεύονται πειραματικῶς, ἄλλαι δὲ γίνονται δεκταὶ ἀλλὰ μὲ ἐπιφύλαξιν.

Ἡ θεωρία εἶναι μία ἀνθρωπίνη δημιουργία, τῆς ὁποίας τὸ πλεῖστον μέρος εἶναι ἐργασία τῆς φαντασίας, τίποτε δὲ τὸ ἀνθρώπινον δὲν εἶναι μόνιμον.

Ὡς προϊὸν τοῦ ἀνθρωπίνου νοῦ, ἡ θεωρία εἶναι δεκτικὴ συζητήσεως, τροποποιήσεως, ἀνασκευῆς, ἐνίοτε δὲ καὶ ἀρνήσεως, ὅταν τελειοποιήσεις εἰς τὰς παρατηρήσεις, τὰς μετρήσεις καὶ τὰ πειράματα ἐμφανίσουν νέα ἐμπειρικὰ γεγονότα ἀντιτιθέμενα εἰς τὴν θεωρίαν.

Μία θεωρία θὰ θεωρῆται ἀκριβὴς καὶ θὰ γίνεται δεκτή:

(i): ἐὰν εἶναι ἱκανὴ νὰ παραγάγῃ μοντέλον πρὸς διάγνωσιν·

(ii): ἐὰν ἡ πρόγνωσις, μετὰ ὑπολογισμὸν διὰ διαφόρων μεθόδων, δίδῃ τὰ αὐτὰ συμπεράσματα·

(iii): ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ χωρίον, ὅπου ἡ θεωρία ἐφαρμόζεται καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι χρήσιμον διὰ προγνώσεις· ὅσον δὲ μεγαλύτερον εἶναι τὸ χωρίον αὐτό, τόσον περισσότερον ἡ θεωρία θὰ εἶναι καλυτέρα καὶ θὰ δίδῃ περισσοτέρας εὐκαιρίας πρακτικῆς τῆς χρήσεως· καὶ

(iv): ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ ὅρια τῶν λαθῶν, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ χωρία ἐφαρμογῆς τῆς θεωρίας.

6. *Ἐπὶ τῶν μοντέλων ἑνὸς συστήματος.* [6, 12, 14]

Οἱ ὁρισμοὶ συστήματος καὶ μοντέλου, ποὺ ἔχουν δοθῆ εἰς τὰ προηγούμενα, ἱκανοποιοῦν τὰς ἀνάγκας τῆς παρούσης ἐργασίας. Οἱ ὁρισμοὶ ὅμως συστήματος καὶ μοντέλου δίδονται κατὰ γενικὸν καὶ ἀφῃρημένον τρόπον εἰς τοὺς νεωτέρους ἐπιστημονικοὺς κλάδους «θεωρίαν μοντέλων» καὶ «θεωρίαν συστημάτων».

Ἡ κατασκευὴ μοντέλου ἑνὸς συστήματος συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν σχέσεων μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος, καὶ προϋποθέτει μίαν θεωρίαν. Ἕνα μοντέλον γίνεται δεκτόν, ἐὰν ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς αὐτὸ θεωρία εἶναι δεκτή, δηλαδὴ ἐὰν ἡ θεωρία ἱκανοποιῇ τ' ἀνωτέρω ἐπιτάγματα i)- iv). Ἀκόμη καὶ ἐὰν τὸ μοντέλον γίνῃ δεκτόν, ἡ ἀκρίβειά του πρέπει νὰ ἐλέγχεται ἀπὸ νέα πειράματα καὶ νέας παρατηρήσεις. Τὰ νέα πειράματα πρέπει νὰ ὑποβοηθοῦν τὴν ἐκλογὴν τῆς μαθηματικῆς κατασκευῆς τοῦ τελειοποιημένου μοντέλου, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διευκολύνῃ μίαν συμπερασματικὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ συστήματος, ποὺ ἐνδιαφέρουν τὸν ἐρευνητήν.

Ἕνα μοντέλον εἶναι μοντέλον κατὰ προσέγγισιν καὶ μοντέλον πιθανόν, καὶ θ' ἀντικαθίσταται μὲ ἄλλο πιθανότερον, μέχρις ὅτου ἡ ἐπιστημονικὴ πρόοδος προωθήσῃ τὴν πιθανότητα τοῦ μοντέλου εἰς βεβαιότητα.

Εἰς πεπλεγμένα συστήματα ὁ ἐρευνητής, διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ μοντέλου του, κατ' ἀνάγκην θὰ περιορίζεται εἰς τὰ πλέον σημαντικὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ συστήματος, καί, διὰ μίαν περιγραφὴν μὲ εὔκολον χειρισμόν, πρέπει ν' ἀγνοῇ εἰδικὰς λεπτομερείας.

Εἰς τὴν πρᾶξιν, τὸ βάδισμα διὰ τὴν κατασκευὴν μοντέλου ἀπαιτεῖ ἀλλαγὴν εἰς τὰς ὑποθέσεις, ἡ δὲ ἀλλαγὴ αὐτὴ συνεπάγεται ἀλλαγὴν εἰς τὴν θεωρίαν, ἀλλαγὴν εἰς τὸ ἀντίστοιχον μοντέλον, πάντοτε ὅμως τ' ἀποτελέσματα τοῦ νέου μοντέλου πρέπει νὰ συμφωνοῦν μὲ τὰ πειραματικὰ δεδομένα καὶ νὰ δίδουν τὴν κατάλληλον ἀπάντησιν εἰς τὰ ἐρωτήματα τοῦ ἐρευνητοῦ.

Ἡ ἐπιστημονικὴ γνῶσις βασίζεται ἐπάνω εἰς ἐμπειρικὰ γεγονότα καὶ θεωρητικὴν ἑρμηνείαν. Καὶ τὰ δύο αὐτὰ ἐξελίσσονται βῆμα πρὸς βῆμα εἰς μίαν ἀξιοσημείωτον συμβίωσιν.

Δὲν πρέπει νὰ λησμονῇ κανεὶς ὅτι τὸ μοντέλον δὲν εἶναι ἡ πραγματικότης, ἀλλὰ εἶναι μέσον βοηθητικὸν διὰ τὴν ἔρευναν τῆς πραγματικότητος, εἶναι μέθοδος ἐρεύνης τῆς πραγματικότητος, ἡ σπουδαιοτέρα ἴσως.

Τὰ μοντέλα διὰ τὴν πραγματικότητα εἶναι ὅπως οἱ γεωγραφικοὶ χάρται διὰ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐδάφους, ποὺ ἀπεικονίζουν. Καὶ τὰ δύο δίδουν μεθόδους πρὸς ἔρευναν τῆς πραγματικότητος διὰ νὰ ἱκανοποιήσουν τοῦ ἐρευνητοῦ τὸν μόχθον.

7. *Ἐπὶ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου εἰς διάφορα πεδία ἐρεύνης.*

Ἡ κλασσικὴ μέθοδος, ὅπου δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ, δίδει καλὰ ἀποτελέσματα. Ὑπάρχουν ὅμως ἐπιστημονικὰ πεδία, ὅπου ἡ μέθοδος ἢ εἶναι δύσκολον νὰ ἐφαρμοσθῇ, ἢ δὲν δύναται κἂν νὰ ἐφαρμοσθῇ. Ἐὰν δὲν εἶναι πλήρως γνωστοὶ οἱ ἀκριβεῖς νόμοι, ποὺ διέπουν τὸ ὑπὸ ἔρευναν σύστημα, τότε δὲν εἶναι δυνατὴ μία θεωρητικὴ περιγραφὴ τοῦ συστήματος, ὁπότε ἡ ἐκτεθεῖσα κλασσικὴ μέθοδος εἶναι ἀνεφάρμοστος. Αὐτὸ συμβαίνει, π.χ., εἰς προβλήματα ἀτομικῆς καὶ μοριακῆς κατασκευῆς, ὅπου εἶναι μὲν γνωσταὶ αἱ ἀντιδράσεις, ἀλλὰ ἡ δομὴ εἶναι πεπλεγμένη.

Εἰς προβλήματα τῆς κλασσικῆς δυναμικῆς τῶν συμπιεστῶν ρευστῶν, αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις ὡς μοντέλα των, ἔστω καὶ ἂν συνοδεύωνται μὲ ὁριακὰς συνθήκας, δὲν εἶναι ἐν γένει ἀρκεταὶ νὰ περιγράφουν τὴν φυσικὴν πραγματικότητα κατὰ τρόπον ἱκανοποιητικόν.

8. *Ἐπὶ νέων ἀντιλήψεων τῆς ὀρθῆς διατυπώσεως τῶν προβλημάτων.* 6, 8, 11

Ἡ ἀναπτυχθεῖσα κλασσικὴ μέθοδος διὰ τὴν εὕρεσιν «καταλλήλως τοποθετημένων» μοντέλων καὶ «πραγματικῶν λύσεων» τῶν συστημάτων, ὑποδεικνύει ἕνα γενικὸν προσανατολισμὸν τῆς σκέψεως διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Βασίζεται ἐπάνω εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ Hadamard διὰ τὸ «καταλλήλως τοποθετημένον» τοῦ προβλήματος, καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ «ἐπιτάγματα τοῦ Hadamard» εἶναι ἀναγκαῖα καὶ ἀρκετὰ διὰ μοντέλα ντετερμινιστικοῦ τύπου.

Ἡ ἀντίληψις τοῦ «καταλλήλως τοποθετημένου» προβλήματος παίζει σπουδαῖον ρόλον εἰς τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος. Ἡ ἀντίληψις αὐτὴ εἰσήχθη ὑπὸ τοῦ Hadamard εἰς τὰς ἀρχὰς τοῦ αἰῶνος μας καὶ πολλὰ σημαντικὰ προβλήματα δύνανται ἐπιτυχῶς νὰ ἐρευνηθοῦν δι' αὐτῆς. Ἔχει ὅμως ἀποδειχθῆ ὅτι ὁ ὁρισμὸς τοῦ «καταλλήλως τοποθετημένου» προβλήματος ἐμφανίζει ὡς «μὴ καταλλήλως τοποθετημένα» σημαντικὰ προβλήματα, ὡς π.χ. προβλήματα γεωφυσικῆς.

Μερικοὶ ἐρευνηταὶ σήμερον δίδουν νέους ὁρισμοὺς διὰ τὸ «καταλλήλως τοποθετημένον» τῶν προβλημάτων, καὶ παρουσιάζουν τρόπους ἐρεύνης εἰς προβλήματα «μὴ καταλλήλως τοποθετημένα» κατὰ Hadamard. Οἱ Tychonou καὶ Lavrentiev ἔχουν συστηματικὰ πραγματευθῆ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ. Μέθοδοι τῆς θεωρίας πιθανοτήτων χρησιμοποιοῦνται κατὰ τὴν ἔρευνάν των.

9. *Ἡ ὠφέλεια τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ τὴν μοντελοποίησιν τῶν φαινομένων.* 4, 10(a, d)

Ἔχομεν ἤδη κατανοήση τὴν χρησιμότητα τῶν μαθηματικῶν ὡς μέθοδον ἐρεύνης εἰς φυσικά, τεχνολογικὰ καὶ κοινωνικὰ φαινόμενα.

Ἀντιστρόφως, ἡ μοντελοποίησις τῶν φαινομένων πολλάκις ὠφέλησαν τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν. Ὁ ἐρευνητὴς κατὰ τὴν ἔρευναν τῶν μοντέλων πολλάκις ἀντιμετώπισεν πολυπλόκους καὶ ἀγνώστους μαθηματικὰς καταστάσεις, αἱ ὁποῖαι τὸν ὡδήγησαν εἰς νέας ἀντιλήψεις καὶ νέα συμπεράσματα ἐπὶ τῶν μαθηματικῶν, τὸν ἠνάγκασαν νὰ ἐντοπίσῃ τὴν προσοχήν του εἰς νέα σημαντικὰ μαθηματικὰ προβλήματα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἐπέφερεν πρόοδον εἰς τὰ μαθηματικά.

Ἀναφέρομεν διάφορα παραδείγματα, ὡς, λ.χ., ἀπὸ τὴν βιολογίαν, ἡ ὁποία διὰ τῶν προβλημάτων της ὡδήγησαν εἰς πρωτότυπα μαθηματικὰ προβλήματα καὶ ἔγινεν ἀφορμὴ μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων.

Οἱ Volterra, Fisher, Wright, κ.λ. εἶναι πρωτοπόροι ἐρευνηταὶ εἰς μεγάλα βιολογικὰ προβλήματα, εἰς τὴν λύσιν τῶν ὁποίων συνήντησαν μεγάλας μαθηματικὰς δυσκολίας, καὶ διὰ νὰ τὰς ὑπερνικήσουν ἀνεκάλυψαν νέας μαθηματικὰς μεθόδους καὶ εἰσήγαγον νέας μαθηματικὰς ἀντιλήψεις.

Ὁ Volterra, δημιουργῶν τὸ μαθηματικὸν μοντέλον τοῦ «προβλήματος τοῦ ἀγῶνος ἐπιβιώσεως συμβιούντων ὀργανισμῶν», ἀνεκάλυψεν τὰς λεγομένας «ὁλοκληρωτικὰς ἐξισώσεις τοῦ Volterra», ἕνα σημαντικὸν κεφάλαιον τῆς «θεωρίας τῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων».

Ὁ Fisher, ὁρμηθεὶς ἀπὸ προβλήματα τῆς γενετικῆς, εἰσήγαγεν νέα κεφάλαια εἰς τὴν «θεωρίαν στατιστικῆς», ὡς π.χ., τὴν «μέθοδον ἀναλύσεως τῶν διαφορῶν» (variance).

Ὁ Wright ἀπὸ βιολογικὰς ἐρεύνας εἰσήγαγεν εἰς τὴν βιολογίαν τὰ «στοχαστικὰ μοντέλα».

Δύναται κανεὶς νὰ εὕρῃ πολλὰ μαθηματικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ὀφείλουν τὴν προέλευσίν των εἰς μαθηματικὰ μοντέλα εἰς τὴν φυσικήν, χημείαν, οἰκονομικήν, κ.λ.π.

10. *Καθαρὰ καὶ ἐφηρμοσμένα μαθηματικά. Αἱ ἀρχαὶ ἐξιδανικεύσεως καὶ προσεγγίσεως τῶν ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν.* 10(a, d)

Τὰ «ἐφηρμοσμένα μαθηματικὰ» διακρίνονται σήμερον ἀπὸ τὰ «καθαρὰ μαθηματικά», ἀλλὰ ἡ διάκρισις εἶναι ὄχι τόσον εἰς τὴν ὕλην τῶν θεμάτων, ὅσον εἰς τὸν τρόπον σκέψεως, εἰς τὸν σκοπὸν καὶ τὰ ἐλατήρια ἐρεύνης.

— Ἡ ἔρευνα εἰς τὰ καθαρὰ μαθηματικὰ ἄγεται ἀπὸ τὸν πόθον ν' αὐξηθῇ τὸ ἀπόθεμα τῆς ἐπιστημονικῆς γνώσεως χωρὶς νὰ ὑπάρχῃ ἐνδιαφέρον διὰ πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

Ἡ ἔρευνα εἰς τὰ ἐφηρμοσμένα μαθηματικὰ ἀποσκοπεῖ τὴν χρῆσιν των διὰ πρακτικοὺς σκοπούς, διὰ τὰς ἀνάγκας τοῦ ἀνθρώπου, διὰ τὴν νόησιν τοῦ γύρω μας κόσμου, διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῆς πραγματικότητος.

Τὰ ἐφηρμοσμένα μαθηματικὰ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν καθαρῶν μαθηματικῶν καὶ τῶν ἐμπειρικῶν ἐπιστημῶν, εἰσέρχονται δὲ εἰς τὴν ἔρευναν τῶν φαινομένων μόλις τὰ φαινόμενα καταστοῦν «καλῶς ἐκπεφρασμένα», Σχῆμα 1.

— Τὰ ἐφηρμοσμένα μαθηματικὰ ἔχουν σήμερον τελείως ξεκαθαρισμένους σκοπούς, ἐπιδιώξεις, μεθόδους καὶ ἀρχάς. Στηρίζονται ἐπάνω εἰς δύο ἀρχάς: «τὴν ἀρχὴν τῆς ἐξιδανικεύσεως» καὶ τὴν «ἀρχὴν τῆς προσεγγίσεως». Ἡ σπουδαιότης τῶν ἀρχῶν αὐτῶν δύναται νὰ γίνῃ κατανοητὴ μὲ τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα: «τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πυκνότητος εἰς ἕνα σημεῖον ἑνὸς ρευστοῦ». Τὸ πηλίκον τῆς μάζης ρευστοῦ ἐντὸς σφαίρας ἀκτῖνος ρ περὶ ἕνα σημεῖον P τοῦ ρευστοῦ διὰ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας εἶναι ἡ καλουμένη «μέση πυκνότης» τοῦ ρευστοῦ εἰς τὴν σφαίραν, τὸ δὲ ὅριον τοῦ πηλίκου αὐτοῦ, ὅταν ἡ ἀκτὴ τείνει νὰ μηδενισθῇ, εἶναι, καθ' ὁρισμόν, ἡ «πυκνότης τοῦ ρευστοῦ εἰς τὸ σημεῖον P».

Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου εἶναι συνδεδεμένη μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς πυκνότητος τοῦ ρευστοῦ εἰς τὸ σημεῖον P, καὶ ἡ ἔννοια αὐτὴ τοῦ ὁποίου σχετίζεται μὲ τὰς ἀνωτέρω δύο ἀρχὰς τῶν ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν. Ἕνας πολὺ μικρὸς ὄγκος τοῦ ρευστοῦ περιέχει μόρια, τὰ ὁποῖα εἶναι διανεμημένα ἐντὸς τοῦ ὄγκου τούτου κατὰ τρόπον ἀνώμαλον, ὁπότε ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου διὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς πυκνότητος εἰς τὸ P εἶναι κάτι χωρὶς πραγματικὴν ἀξίαν. Διὰ τῆς παραδοχῆς τῆς ὑπάρξεως ὁρίου δημιουργοῦμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς πυκνότητος εἰς τὸ P, ὁπότε ἡ ἀρχὴ τῆς ἐξιδανικεύσεως καὶ ἡ ἀρχὴ τῆς προσεγγίσεως γίνονται δεκταί.

Ἀντιλήψεις ἐξιδανικεύσεως εἶναι ἀναγκαῖαι εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας ἰδίως. Οἱ φυσικοὶ νόμοι εἶναι ἐξιδανικεύσεως δεκταὶ εἰς περιωρισμένα πεδία ἐρεύνης, καὶ ἀκριβεῖς ἐντὸς δεκτῶν λαθῶν. Οἱ φυσικοὶ νόμοι τῶν φαινομένων, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζονται μαθηματικῶς, εἶναι μαθηματικὰ μοντέλα τῶν φαινομένων.

Ἐφαρμογαί

Ἡ κατασκευὴ ἑνὸς μοντέλου εἶναι, ἐν γένει, πολὺ δύσκολος ἐργασία, ἡ δὲ τελικὴ παραδοχή του ἀπαιτεῖ εἰς πολλὰς περιπτώσεις πολυετῆ ἔρευναν.

Αἱ ἐφαρμογαὶ τῆς ἐκτεθείσης κλασσικῆς μεθόδου διὰ τὴν ἔρευναν τῶν μοντέλων δύνανται νὰ καταταχθοῦν εἰς δύο κατηγορίας, τὰς «ἐφαρμογὰς πλήρους κύκλου» καὶ τὰς «ἐφαρμογὰς μὴ πλήρους κύκλου».

Εἰς ἐφαρμογὰς «πλήρους κύκλου» εἶναι ἀναγκαῖον:

(i): Νὰ εὕρωμεν ἕνα μαθηματικὸν μοντέλον τοῦ συστήματος καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν λύσιν του, καὶ

(ii): Νὰ κάμωμεν πλήρη ἐξέτασιν τοῦ μοντέλου, κάτι τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ σύγκρισιν τῶν ἐκ τοῦ μοντέλου θεωρητικῶν συμπερασμάτων πρὸς τ' ἀντίστοιχα πειραματικὰ συμπεράσματα, ὁπότε, διὰ δεκτὸν μοντέλον, τὰ δύο αὐτὰ εἴδη συμπερασμάτων πρέπει νὰ συμφωνοῦν.

Εἰς ἐφαρμογὰς «μὴ πλήρους κύκλου», ἢ ἡ παραδοχὴ τοῦ μοντέλου δὲν ἔχει γίνει ἀκόμη ἀποδεκτή, ἢ τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ ἐρευνητοῦ ἐντοπίζεται εἰς μόνον μερικὰ στάδια τῆς ἐρεύνης.

Α. *Ἐφαρμογαὶ πλήρους κύκλου.*

Δίδομεν παραδείγματα δεκτῶν μοντέλων πλήρους κύκλου ντετερμινιστικοῦ τύπου.

1. Τὸ μοντέλον ταλαντουμένης δοκοῦ τοῦ D. Bernoulli. Ὁ Bernoulli, πρὸ διακοσίων πενήντα ἐτῶν περίπου,

i): κατεσκεύασεν τὸ μαθηματικὸν μοντέλον ταλαντουμένης δοκοῦ ὑπὸ μορφὴν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

(ii): εὗρεν τὴν λύσιν τοῦ μοντέλου του εἰς τὴν περίπτωσιν ὁριζοντίας ταλαντουμένης δοκοῦ πακτωμένης κατὰ τὸ ἓν ἄκρον της καὶ ἐλευθέρας κατὰ τὸ ἄλλο (cantilever beam),

(iii): ἔκαμεν πειράματα ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ταλαντουμένης δοκοῦ καὶ κατέγραψεν τὰ πειραματικὰ συμπεράσματά του,

(iv): ἔκαμεν σύγκρισιν τῶν θεωρητικῶν καὶ πειραματικῶν συμπερασμάτων του.

Μέχρι σήμερον τὰ θεωρητικὰ καὶ πειραματικὰ συμπεράσματα τοῦ Bernoulli συμφωνοῦν μεταξύ των, καὶ τὸ μοντέλον τοῦ Bernoulli διὰ τὴν ἀνωτέρω δοκὸν θεωρεῖται παράδειγμα ἀκριβοῦς μοντέλου πλήρους κύκλου.

Εἶναι ἄξιον προσοχῆς ὅτι ἡ ἐργασία αὐτὴ τοῦ Bernoulli παίζει σημαντικὸν ρόλον εἰς τὴν «θεωρίαν μουσικῆς» καὶ τὴν «θεωρίαν τῶν μουσικῶν ὀργάνων».

Ὑπενθυμίζομεν τώρα μερικὰ ἄριστα μοντέλα πλήρους κύκλου, τὰ ὁποῖα εἶναι δημιουργήματα ὅλως ὑψηλῆς πρωτοτυπίας, καὶ ἔχουν εὑρεθῆ ἀπὸ ὅλως ἐξέχοντας ἐρευνητάς.

2. Τὸ μαθηματικὸν μοντέλον τῶν νόμων τῆς βαρύτητος τοῦ Newton, τὸ ὁποῖον δίδει μίαν βαθεῖαν ἐξήγησιν τῶν ἐμπειρικῶν νόμων τοῦ Kepler ἐπὶ τῆς κινήσεως τῶν πλανητῶν, καὶ εἶναι ἡ βάσις ἀστρονομικῶν καὶ ἀστροναυτικῶν ἐρευνῶν. Κατὰ τὸν 17ον καὶ 18ον αἰῶνα τὸ μοντέλον αὐτὸ τοῦ Newton, σύμφωνα μὲ μετρήσεις καὶ παρατηρήσεις μὲ ὄργανα τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, εἶχεν ἐγκαθιδρυθῆ ὡς τὸ μόνον ἀληθὲς καὶ ἀκριβὲς μοντέλον. Ἀπὸ τὰ μέσα τοῦ 19ου αἰῶνος ὅμως, νέαι τελειοποιήσεις εἰς τὴν τεχνικὴν τῶν παρατηρήσεων καὶ μετρήσεων ἔκαμαν ὥστε ἡ θεωρία σχετικότητος τοῦ Einstein νὰ συμπληρώνῃ τὸ μοντέλον τοῦ Newton[14].

3. Τὸ μαθηματικὸν μοντέλον τῆς θεωρίας τῆς σχετικότητος τοῦ Einstein, τὸ ὁποῖον, μὲ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐννοίας

τῆς σχετικότητος εἰς τὴν βαρύτητα, συμπληρώνει ἄριστα τὸ μοντέλον τοῦ Newton καὶ ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τόσων ἐρευνῶν.

4. Ἡ μαθηματικὴ ἔκφρασις τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς θεωρίας τοῦ Maxwell, ἡ ὁποία εἶναι ἡ θεμελιώδης βάσις διὰ τὴν σπουδὴν τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων, καὶ ἐξηγεῖ τὰς βασικὰς ἀρχὰς μεταφορᾶς τῆς ἠλεκτρικῆς δυνάμεως καὶ τῆς τεχνολογίας τοῦ ραδίου.

5. Ἡ μαθηματικὴ θεωρία τῶν πυρινικῶν δυνάμεων ὑπὸ τοῦ Yukawa διὰ τῆς ὁποίας οὗτος προεῖδεν τὴν ὕπαρξιν τῶν «mesons», καὶ ἡ ὁποία ἐπεβεβαιώθη ἀργότερον πειραματικῶς, ἀποτελεῖ δὲ τὴν θεμελίωσιν τῆς θεωρίας τῶν mesons (Nobel 1949).

6. Τὰ οἰκονομετρικὰ μοντέλα τῶν Frish καὶ Tinbergen, διὰ τῶν ὁποίων οὗτοι περιέγραψαν μαθηματικῶς καὶ προεῖδον οἰκονομικὰ φαινόμενα (Nobel 1969).

7. Ἡ μαθηματικὴ ἀνάπτυξις τῆς θεωρίας παιγνίων καὶ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ ὑπὸ τοῦ von Newman, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀλλάξει τὴν λειτουργίαν τῆς σημερινῆς κοινωνίας.

8. Ἡ μαθηματικὴ ἐργασία διὰ τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ ποσειδῶνος ὑπὸ τῶν Adams καὶ Leverrier. Ὁ Adams καὶ ὁ Leverrier ἀνεξάρτητα ἀλλήλων ἐργαζόμενοι ἐπὶ τοῦ προβλήματος τῶν ἀνωμαλιῶν τῆς κινήσεως τοῦ πλανήτου Οὐρανοῦ, μὲ κατάλληλον ἕκαστος μαθηματικὸν μοντέλον ἀνεκάλυψαν τὸν πλανήτην Ποσειδῶνα.

— Τὰ προηγούμενα μαθηματικὰ μοντέλα εἶναι δεκτὰ μοντέλα πλήρους κύκλου, ἕκαστον δὲ ἐξ αὐτῶν συνδέεται μὲ μίαν ἱστορίαν, διὰ τῆς ὁποίας καταφαίνεται ἡ δύναμις τῶν μαθηματικῶν ὡς μεθόδου ἐρεύνης.

Ἄς ἀναφέρομεν τὴν ἱστορίαν ἑνὸς μόνον ἐξ αὐτῶν, π.χ. τοῦ τελευταίου.

— Ἡ ἀνακάλυψις τοῦ πλανήτου Ποσειδῶνος τὴν 29ην Σεπτεμβρίου 1846 θεωρεῖται μνημιῶδες ἐπίτευγμα τῶν μαθηματικῶν ἐφηρμοσμένων εἰς προβλήματα ἀστρονομικά. Ἡ ὕπαρξις αὐτοῦ τοῦ νέου μέλους τοῦ ἡλιακοῦ συστήματος καὶ ἡ ἀκριβὴς ἐντόπισίς του εἰς τὸν οὐρανὸν ἐπετεύχθησαν μὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ καταλλήλου μοντέλου τοῦ προβλήματος, ἀφέθη δὲ εἰς τοὺς παρατηρητὰς ἡ εὔκολος ἀναζήτησίς του διὰ τῶν τηλεσκοπίων εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ὑπεδείχθη ὑπὸ τῶν μαθηματικῶν.

Μέχρι περίπου τοῦ 1820 οἱ ἀστρονόμοι εἶχον σημειώσει ἀνωμαλίας εἰς τὴν κίνησιν τοῦ πλανήτου Οὐρανοῦ, δηλαδὴ ἀποκλίσεις τῆς τροχιᾶς του ἐκ παρατηρήσεων καὶ ὑπολογισμῶν. Ὁ Adams εἰς Ἀγγλίαν καὶ ὁ Leverrier εἰς Γαλλίαν, ἐργαζόμενοι ἀνεξάρτητα ἀλλήλων, ἔλυσαν τὸ πρόβλημα τῶν ἀνωμαλιῶν τῆς τροχιᾶς τοῦ πλανήτου Οὐρανοῦ διὰ τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ πλανήτου Ποσειδῶνος.

Τὸ ὑπόμνημα τοῦ Adams ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἦτο ἕνα μαθηματικὸν ἔργον ἀξιοσημειώτου ἐπιστημονικῆς ὡριμότητος, παρὰ τὸ νεαρόν του. Ἀλλὰ ὁ Airy, ἐπίσημος ἀστρονόμος τῆς Ἀγγλίας τότε, δὲν ἔδωσεν τὴν δέουσαν προσοχὴν εἰς τὴν ἐργασίαν τοῦ Adams, ἢ οἱ παρατηρηταὶ ἀστρονόμοι εἰς Ἀγγλίαν δὲν εὗρον τότε εὐνοϊκὰς συνθήκας διὰ νὰ παρατηρήσουν τὸ νέον ἄστρον εἰς τὴν θέσιν καὶ κατὰ τὸν χρόνον, ποὺ ὑπεδείχθησαν ὑπὸ τοῦ Adams. Ὀλίγον ἀργότερον ὁ Leverrier ἐζήτησεν ἀπὸ τοὺς Γερμανοὺς ἀστρονόμους Galle καὶ D' Arrest εἰς Βερολῖνον νὰ παρατηρήσουν τὸ νέον ἄστρον εἰς θέσιν καὶ χρόνον, ὡς οἱ ὑπολογισμοί του ὑπεδείκνυον, καὶ τὴν 29ην Σεπτεμβρίου 1846 οἱ ἀστρονόμοι οὗτοι παρετήρησαν πρῶτοι τὸν Ποσειδῶνα.

Β. *Ἐφαρμογαὶ μὴ πλήρους κύκλου.*

Εἰς ἑκάστην ἀπὸ τὰς κατωτέρω ἐφαρμογάς τὸ ἐνδιαφέρον μας θὰ εἶναι νὰ τονίσωμεν ὡρισμένα σημεῖα τῆς ἐκτεθείσης μεθόδου καὶ τῶν παρατηρήσεων.

1. *Ἐφαρμογὴ 1* (Μηχανική). *«Τὸ πρόβλημα τῆς κινήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς»*.

Ἐκθέτομεν τὴν λύσιν τοῦ γνωστοῦ τούτου προβλήματος τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ ἴδωμεν ἐφαρμοζόμενα κύρια σημεῖα τῆς μεθόδου καὶ μερικὰς ἐκ τῶν παρατηρήσεων. Ἀκολουθοῦμεν τὴν θεωρίαν «κίνησις καὶ δύναμις» τοῦ Newton, καὶ ὄχι τὴν θεωρίαν «ἰσορροπία καὶ ἔργον» τοῦ Lagrange. Αἱ δύο αὗται θεωρίαι, ἂν καὶ δίδουν διάφορα μοντέλα, δίδουν τὰ αὐτὰ συμπεράσματα.

— Ράβδος μήκους λ ἔχει τὸ μὲν ἄκρον της O ἀμετακίνητον, εἰς δὲ τὸ ἄλλο ἄκρον της ὑπάρχει μᾶζα m. Ἡ ράβδος μετακινεῖται κατὰ γωνίαν θ_0 ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον καὶ ἀφίεται ἐλευθέρα πρὸς κίνησιν. Ἔχομεν ἕνα εἰδικὸν φαινόμενον κινήσεως., τὸ «ἁπλοῦν ἐκκρεμές», καὶ θέτομεν τὸ συγκεκριμένον πρόβλημα: «νὰ εὑρεθῇ πῶς ἐξαρτᾶται ἡ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς αὐτοῦ ἀπὸ τὰ λ, m, θ_0».

— Δεχόμεθα εἰδικὰς συνθήκας καὶ κάμνομεν ὡρισμένας ὑποθέσεις, βάσει δὲ αὐτῶν θὰ κάμωμεν τὸ ὑπλοῦν αὐτὸ σύστημα «καλῶς ἐκπεφρασμένον». Ὑποθέτομεν ὅτι:

(i): Ἡ μᾶζα m λαμβάνεται ὡς «ὑλικὸν σημεῖον» (ii): Ἡ μᾶζα m ἀφίεται ἐλευθέρα καὶ χωρὶς ταχύτητα, ὅταν εὑρίσκεται εἰς θέσιν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν γωνίαν θ_0.

(iii): Ἡ ράβδος εἶναι: «ἀπολύτως στερεά», «σταθεροῦ μήκους», «μηδενικοῦ βάρους», καὶ μὲ «ἀμετακίνητον τὸ ἄκρον της O»,

iv): Ἡ ἀντίστασις τοῦ μέσου ἐντὸς τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς, ὅπως καὶ αἱ τριβαὶ κατὰ τὸ O, εἶναι μηδαμιναί,

(v): Ἡ κίνησις γίνεται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου.

Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις, ἡ κίνησις τοῦ ὑλικοῦ σημείου γίνεται ἐπὶ τόξου περιφερείας μὲ κέντρον O καὶ ἀκτῖνα λ, ἡ δὲ θέσις τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν t θὰ εἶναι γνωστή, ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος γωνία θ εἶναι γνωστή, δηλαδή: $\theta=\theta(t)$. Ὡς ἀρχὴ τῆς κινήσεως λαμβάνεται ἡ στιγμή, ποὺ τὸ ὑλικὸν σημεῖον εἶναι ὑπὸ γωνίαν Θο, ὁπότε ἔχομεν «ἀρχικὰ δεδομένα»:

$$\theta(0)=\theta_0, \quad \dot{\theta}(0)=0$$

Οὕτω διὰ τὸ πρόβλημα ἔχει ἐκλεγῆ ὁ χρόνος ὡς «ἀνεξάρτητος μεταβλητή», καὶ ἡ γωνία θ ὡς «κυρία μεταβλητή», παράμετροι δὲ εἶναι τὸ μῆκος λ, ἡ μᾶζα m, καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g, ἐφ' ὅσον τὸ ἐκκρεμὲς ὑπόκειται εἰς τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως τῆς βαρύτητος.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τῆς κινήσεως γίνεται «στατικὸν» μὲ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν «δυνάμεων»ἀδρανείας» καὶ ἐφαρμογὴν τοῦ «δευτέρου νόμου τοῦ Newton».

Ὅλα τ' ἀνωτέρω κάμνουν τὸ σύστημα «καλῶς ἐκπεφρασμένον».

— Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις δύναται νὰ γίνῃ ἡ μοντελοποίησις τοῦ προβλήματος, καί, ὅπως εἶναι γνωστόν, τὸ μοντέλον εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\theta}+\frac{g}{\lambda}\cdot \eta\mu\theta=0 \\ &\theta(0)=\theta_0, \ \dot{\theta}(0)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Τὸ ἀνωτέρω μοντέλον εἶναι ντετερμινιστικόν, τὰ ἐπιτάγματα τοῦ Hadamard πληροῦνται ἀπὸ τὴν λύσιν, καὶ τὸ πρόβλημα, βάσει τῶν προϋποθέσεών μας, ἔχει γίνῃ «ὀρθῶς ἐκπεφρασμένον».

— Αἱ ἀνωτέρω προϋποθέσεις, βάσει τῶν ὁποίων εὑρέθη τὸ μοντέλον(1), δὲν πληροῦνται εἰς τὴν πρᾶξιν, καὶ ἑπομένως τὰ βάσει τούτου συμπεράσματα δὲν θὰ συμφωνοῦν μὲ τὰ πειράματα καὶ τὰς μετρήσεις. Τὸ ἀνωτέρω μοντέλον χρειάζεται τροποποίησιν, ἡ ὁποία θὰ δώσῃ νέον μοντέλον, ποὺ θὰ διερμηνεύῃ τὴν πραγματικότητα πιστότερον.

Διὰ τὰς τροποποιήσεις ὁδηγὸς θὰ εἶναι τὸ εἰδικὸν ἐνδιαφέρον τοῦ ἐρευνητοῦ καὶ ἡ φυσικὴ του διαίσθησις, ἡ κατάλληλος ἀλλαγὴ τῶν προϋποθέσεων, καὶ αἱ μαθηματικαὶ ἀνάγκαι. Ἀναφέρομεν μερικὰς τροποποιήσεις.

— Ὑποθέτομεν αἰσθητὴν τὴν ἀντίδρασιν τοῦ περιβάλλοντος (ἀήρ, ὕδωρ) ἐντὸς τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Ἐὰν ἡ ἀντίδρασις αὕτη ληφθῇ ὡς δύναμις ἀνάλογος τῆς ταχύτητος τοῦ ὑλικοῦ σημείου, τότε εἰς τὴν ἐξίσωσιν θὰ προστεθῇ ὁ ὅρος $\left(\frac{k}{m}\dot{\theta}\right)$, ὅπου ἡ σταθερὰ k χαρακτηρίζει τὸ μέγεθος τῆς ἀντιδράσεως τοῦ μέσου, τὸ δὲ νέον μοντέλον θὰ εἶναι:

$$\ddot{\theta}+\frac{k}{m}\dot{\theta}+\frac{g}{\lambda}\,\eta\mu\,\theta=0 \qquad (1.1)$$

— Ἄλλην τροποποίησιν τοῦ (1) δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν, ἐὰν τὸ ἄκρον O τῆς ράβδου κινῆται. Ὡς ,π.χ., ἐὰν κινῆται ὁριζοντίως καὶ περιοδικῶς, τὸ μοντέλον θὰ εἶναι μία ἐξίσωσις τοῦ Mathieu.

— Ἐὰν τὸ μῆκος λ τῆς ράβδου εἶναι μεταβλητόν, θὰ ἔχωμεν νέαν τροποποίησιν τοῦ μοντέλου (1). Π.χ., ἐὰν ἡ μεταβολὴ τοῦ λ εἶναι ἀνάλογος τοῦ χρόνου καὶ τῆς ταχύτητος, τότε, διὰ μικρὰς γωνίας ταλαντώσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς καὶ ὑπὸ ὡρισμένους μετασχηματισμοὺς τῆς ἐξισώσεως, καταλείγομεν εἰς ἐξίσωσιν τοῦ Bessel ὡς ἀντίστοιχον μοντέλον.

— Μίαν ἄλλην τροποποίησιν τοῦ μοντέλου (1) δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν, ὅταν αἱ ταλαντώσεις εἶναι μικρὰς γωνίας, ὁπότε τὰ θ καὶ ημθ εἶναι ἰσοδύναμα ἀπειροστά, καὶ τὸ μοντέλον θὰ εἶναι:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\lambda}\,\theta=0 \qquad (1.2)$$

τὸ ὁποῖον εἶναι γραμμικοποίησις τοῦ μὴ-γραμμικοῦ μοντέλου (1).

Δὲν πρέπει ὅμως νὰ λησμονοῦμεν ὅτι ἡ γραμμικοποίησις μὴ γραμμικῶν ἐξισώσεων κάμνει, ὥστε σπουδαῖα χαρακτηριστικὰ τῶν λύσεων τῶν μὴ-γραμμικῶν ἐξισώσεων ν' ἀγνοοῦνται ἐν γένει κατὰ τὴν γραμμικοποίησιν.

2. *Ἐφαρμογὴ 2* (Θερμοδυναμική). *«Τὸ πρόβλημα τῆς ροῆς τῆς θερμότητος»*. [13]

Ὁ σκοπὸς τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς εἶναι νὰ τονισθῇ πῶς ἐμφανίζεται τὸ ζήτημα τοῦ «καταλλήλως (ἢ μὴ) τοποθετημένου» μοντέλου κατὰ τὴν ἔννοιαν Hadamard.

Ὅταν δεχθῶμεν ὅτι τὸ μέσον διὰ τοῦ ὁποίου ρέει ἡ θερμότης εἶναι ὁμογενὲς καὶ ἰσότροπον ὡς πρὸς τὴν ροὴν τῆς θερμότητος, ὅτι ἡ ροὴ γίνεται πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ἐλαττουμένης θερμοκρασίας, καὶ λάβωμεν ὡς μονάδα ἕνα συντελεστήν, ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πυκνότητα τοῦ μέσου, τὴν εἰδικὴν θερμότητα καὶ τὴν θερμικὴν ἀγωγιμότητα, τὸ ὑπὸ μελέτην σύστημα γίνεται «καλῶς ἐκπεφρασμένον» ὁπότε ἕνα «ὀρθῶς διατυπωμένον» μοντέλλον τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ἐξίσωσις μὲ μερικὰς παραγώγους:

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_t \tag{2}$$

ὅπου $u=u(x, y, z)$ εἶναι ἡ θερμοκρασία τοῦ μέσου ροῆς τῆς θερμότητος. Ἐὰν ἡ ροὴ εἶναι «μονοδιάστατος», καὶ τὰ «δεδομένα» εἶναι:

$$u(x, 0)=n\cdot\sin nx, \quad n=\text{ἀκέραιος} \tag{2.1}$$

τότε ὑπάρχει ἡ μοναδικὴ λύσις:

$$u(x, t)=n\cdot e^{-n^2 t}\cdot\sin nx \tag{2.2}$$

ὁπότε τὰ δύο ἐπιτάγματα τοῦ Hadamard πληροῦνται. Ἔχομεν δύο περιπτώσεις:

(i): Ἐὰν $t>0$, ὁπότε ἔχομεν τὸ «πρόβλημα τῆς πρὸς τὰ ἐμπρὸς ροῆς τῆς θερμότητος», τότε, διὰ πᾶν πεπερασμένον n καὶ $t\to\infty$, ἡ λύσις (2.2) τείνει εἰς τὸ μηδὲν καὶ ἡ συνθήκη (2.1) εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός, ὁπότε τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ Hadamard ἱκανοποιεῖται, τὸ πρόβλημα γίνεται «καταλλήλως τοποθετημένον», καὶ ἡ λύσις (2.2) εἶναι «φυσικῶς δεκτή».

(ii): Ἐὰν $t<0$, ὁπότε ἔχομεν τὸ «πρόβλημα τῆς πρὸς τὰ ὀπίσω ροῆς τῆς θερμότητος», τότε, διὰ πᾶν πεπερασμένον n καὶ $t\to\infty$, ἡ συνθήκη (2.1) εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός, ἡ λύσις (2.2) τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ὁπότε τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ Hadamard δὲν ἱκανοποιεῖται, τὸ πρόβλημα εἶναι «μὴ καταλλήλως τοποθετημένον», καὶ ἡ λύσις (2.2) δὲν εἶναι «φυσικῶς δεκτή».

3. *Ἐφαρμογὴ 3* (Μὴ γραμμικὴ μηχανική). *«Τὸ πρόβλημα τῶν πρωταρχικῶν ταλαντώσεων μὴ γραμμικῶν συστημάτων»*. 10(b)

Μὲ τὴν ἐφαρμογὴν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν πῶς ὁρισμοὶ καὶ συμπεράσματα τῆς γραμμικῆς μηχανικῆς δύνανται νὰ γενικευθοῦν καὶ δώσουν «καταλλήλως τοποθετημένα» προβλήματα τῆς μὴ γραμμικῆς μηχανικῆς.

— Ἡ ἔννοια τῶν «πρωταρχικῶν ταλαντώσεων» γραμμικῶν συστημάτων παίζει σπουδαῖον ρόλον εἰς τὴν ἀνάλυσιν ταλαντουμένων συστημάτων εἰς πολλὰ πεδία ἐρεύνης.

Αἱ πρωταρχικαὶ ταλαντώσεις γραμμικῶν συστημάτων εἶναι, καθ' ὁρισμόν, ἡ θεμελιώδης ἀκολουθία λύσεων, τῶν ὁποίων ἕνας γραμμικὸς συνδυασμὸς δύναται νὰ δώσῃ τὴν γενικὴν λύσιν τοῦ γραμμικοῦ συστήματος, ἤ, ἄλλως, ἡ ἀκολουθία αὐτὴ τῶν λύσεων εἶναι εἰδικοῦ τύπου ταλαντώσεις τοῦ συστήματος συναρτήσει τῶν ὁποίων δύναται κανεὶς νὰ μελετήσῃ τὸ οἱονδήποτε εἶδος ταλαντώσεων τοῦ συστήματος.

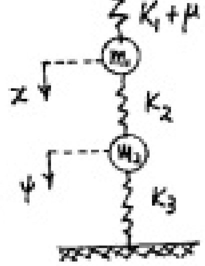
Ἐφ' ὅσον ἡ «ἀρχὴ τῆς ἐπιπροσθέσεως τῶν λύσεων», ἡ ὁποία ἰσχύει εἰς γραμμικὰ συστήματα, δὲν ἰσχύει εἰς μὴ γραμμικὰ συστήματα, ἡ ἔννοια τῶν πρωταρχικῶν ταλαντώσεων, ὅπως ἐδόθη ἀνωτέρω, δὲν ἔχει νόημα εἰς μὴ γραμμικὰ συστήματα καὶ γεννᾶται ἤδη τὸ ἐρώτημα: «Ἔ χ ε ι φ υ σ ι κ ὴ ν ἔ ν ν ο ι α ν ἡ ἀ ν τ ί λ η ψ ι ς τ ῶ ν π ρ ω τ α ρ χ ι κ ῶ ν τ α λ α ν τ ώ σ ε ω ν ε ἰ ς μ ὴ γ ρ α μ μ ι κ ὰ σ υ σ τ ή μ α τ α;» ἤ, ἄλλως: «Π ῶ ς δ ύ ν α τ α ι κ α ν ε ὶ ς ν ὰ κ ά μ ῃ κ α τ α λ λ ή λ ω ς τ ο π ο θ ε τ η μ έ ν ο ν τ ὸ π ρ ό β λ η μ α τ ῶ ν π ρ ω τ α ρ χ ι κ ῶ ν τ α λ α ν τ ώ σ ε ω ν ε ἰ ς μ ὴ γ ρ α μ μ ι κ ὰ σ υ σ τ ή μ α τ α;».

Σχετικῶς μὲ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἔχομεν δημοσιεύσει σειρὰν ἐργασιῶν καὶ μεταφέρομεν ἐδῶ μερικὰς σκέψεις, μεθόδους καὶ συμπεράσματα, πρὸς τὸν σκοπὸν ὅπως δώσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ ὡς ἐφαρμογὴν τῆς ἀναπτυχθείσης μεθόδου.

— Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕναν ὁρισμὸν διὰ τὴν ἔννοιαν τῶν πρωταρχικῶν ταλαντώσεων, ὁ ὁποῖος νὰ ἰσχύῃ εἰς μὴ γραμμικὰ συστήματα, ἀλλὰ καὶ νὰ περιέχῃ ὡς μερικὴν περίπτωσιν τὸν γνωστὸν ὁρισμὸν τῶν γραμμικῶν συστημάτων. Ἔχομεν εὕρει δύο τοιούτους ὁρισμούς, οἱ ὁποῖοι, ὑπὸ καταλλήλους περιορισμούς, εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἔπειτα ἀπὸ τὸ ζήτημα τῶν ὁρισμῶν τῶν πρωταρχικῶν ταλαντώσεων δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὸ πρόβλημα «καταλλήλως τοποθετημένον» καὶ τὴν λύσιν του «φυσικῶς δεκτήν».

— Ἄς περιορισθῶμεν εἰς ἕνα μηχανικὸν πρόβλημα μὲ δύο βαθμοὺς ἐλευθερίας, ὅπως δεικνύεται εἰς τὸ Σχῆμα 2.



Σχῆμα 2

Τὸ μοντέλλον τοῦ μὴ γραμμικοῦ συστήματος μὲ δύο ταλαντουμένας μάζας m_1, m_2 καὶ τρία ἐλατήρια, που χαρακτηρίζονται ἀπὸ τά: $k_1+\mu x^2$, k_2, k_3, ἀντιστοίχως, ὅπου μ δίδει τὴν μὴ γραμμικότητα τοῦ πρώτου ἐλατηρίου, εἶναι

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}+\omega_1^2 x-\lambda_2\psi+\lambda_1 x^3=0\\ &\ddot{\psi}+\omega_2^2\psi-\lambda_3 x=0\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

ὅπου :

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1^2=\frac{k_1+k_2}{m_1},\ \omega_2^2=\frac{k_2+k_3}{m_2}\\ &\lambda_1=\frac{\mu}{m_1},\ \lambda_2=\frac{k_2}{m_1},\ \lambda_3=\frac{k_2}{m_2}\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

Τὸ σύστημα (3), μὲ χρῆσιν τοῦ μετασχηματισμοῦ:

$$x=x_1,\ \dot{x}=x_2,\ \psi=x_3,\ \dot{\psi}=x_4\qquad(3.2)$$

λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1=x_2\\ &\dot{x}_2=-\omega_1^2x_1+\lambda_2x_3-\lambda_1x_1^3\\ &\dot{x}_3=x_4\\ &\dot{x}_4=\lambda_3x_1-\omega_2^2x_3\end{aligned}\right\}\qquad(3.3)$$

μὲ πεδίον ὁρισμοῦ:

$$R:\ |x_i|<h,\quad i=1,2,3,4\qquad(3.4)$$

Αἱ κατάλληλοι ἀρχικαὶ συνθῆκαι διὰ τὰς «πρωταρχικὰς ταλαντώσεις» εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ R εἶναι:

$$x_1(0)={}_{10},\ x_2(0)=0,\ x_3(0)=x_{30},\ x_4(0)=0\qquad(3.5)$$

ὅπου τὰ x_{10}, x_{30} εἶναι συσχετισμένα μεταξύ των κατὰ τὸν ἁρμόζοντα τρόπον.

— Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι αἱ συναρτήσεις τῶν δευτέρων μελῶν τῶν (3.3), τὰς ὁποίας παριστῶμεν διὰ τῶν f_i, $i=1,2,3,4$, εἶναι τοιαῦται ὥστε ἡ λύσις τοῦ (3.3) νὰ πληροῖ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ Hadamard. Πράγματι, αἱ συναρτήσεις αὗται εἶναι συνεχεῖς ἐντὸς τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ των R, ἑπομένως πεπερασμέναι εἰς τὸ R, καὶ ἔχουν συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους $(\partial f_i/\partial x_k)$ εἰς τὸ R, ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ (3.3), ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖται ἀπὸ τὰ δεδομένα (3.5), ὑπάρχει, εἶναι μία καὶ μόνη καὶ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῶν δεδομένων (3.5), ὁπότε καὶ οἱ τρεῖς περιορισμοὶ τοῦ Hadamard πληροῦνται, τὸ μοντέλον 3.3) καὶ 3.5) εἶναι «καταλλήλως τοποθετημένον» καὶ ἡ λύσις του εἶναι «φυσικῶς δεκτή».

4. '*Εφαρμογὴ 4* ('Αστροδυναμική). (10c)

«Ἕνα τεχνητὸν οὐράνιον σῶμα κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν κεντρικῆς δυνάμεως σύμφωνα πρὸς τὸν νόμον τοῦ Newton πρὸς ἕνα ἑλκτικὸν κέντρον. Μία ἄλλη δύναμις $\underline{T}$ ἐφαρμόζεται καὶ δρᾷ ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπὶ ἕνα διάστημα καὶ κατόπιν παύει νὰ δρᾷ. Τὸ πρόβλημα εἶναι νὰ εὑρεθῇ ἡ κίνησις τοῦ σώματος κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς δράσεως τῆς δυνάμεως $\underline{T}$».

Μεταφέρομεν ἐδῶ πάλιν προσωπικήν μας πεῖραν ἐπὶ τοῦ προβλήματος. Εὑρίσκομεν περιορισμοὺς τῆς διαταράξεως $\underline{T}$, ὥστε τὸ μοντέλον τοῦ προβλήματος νὰ εἶναι καταλλήλως τοποθετημένον καὶ ἡ λύσις φυσικῶς δεκτή. Ὡς εἶναι γνωστόν, τὸ πρόβλημα γίνεται «καλῶς ἐκπεφρασμένον», ἔπειτα «ὀρθῶς διατυπωμένον», ὁπότε τὸ μοντέλον του εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\underline{r}}(\tau)=-\frac{\mu}{r^3(\tau)}\underline{r}(\tau)+\underline{T}(\tau)\\ &\underline{r}(0)=\underline{r}_0\\ &\dot{\underline{r}}(0)=\dot{\underline{r}}_0+\underline{I}_0\\ &D_1:\ |\underline{r}(\tau)|<M_1\\ &D_2:\ |\dot{\underline{r}}|<M_1\\ &D_3:\ 0\leqslant\tau\leqslant\tau'\\ &\underline{I}=\int_0^{t_1}\underline{T}(t)dt,\quad \tau=t-t_0\end{aligned}\right|\qquad(4)$$

ὅπου $\underline{T}$ ἡ διαταράσσουσα δύναμις, $\underline{r}$ τὸ ἀκτινικὸν διάνυσμα κατευθυνόμενον πρὸς τὸ κέντρον μάζης τοῦ κινουμένου σώματος ἀπὸ τὸ ἑλκτικὸν κέντρον, $\underline{I}_0$ ἡ ὤθησις (impulse), καὶ μ σταθερά.

Ἡ «διαταράσσουσα δύναμις» $\underline{T}$ δυνατὸν νὰ προέρχεται ἀπὸ τὴν πίεσιν τοῦ φωτός, ἀπὸ τὴν μὴ σφαιρικότητα τοῦ ἑλκτικοῦ κέντρου, καθὼς καὶ ἀπὸ ἄλλα αἴτια, καὶ δυνατὸν νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν καὶ ταχύτητα τοῦ κινουμένου σώματος, καθὼς καὶ ἀπὸ τὸν χρόνον. Δεχόμεθα ἐδῶ ὅτι ἡ δύναμις $\underline{T}$ εἶναι σημαντικὴ ἐν σχέσει πρὸς τὴν κεντρικὴν ἕλξιν, καὶ ὅτι ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸν χρόνον.

— Ἐκλέγομεν καταλλήλους ἄξονας συντεταγμένων, ὅπως δεικνύει τὸ Σχῆμα 3, ὅπου τὰ ἐπὶ τῶν ἀξόνων μοναδιαῖα διανύσματα εἶναι: $\underline{r}_o^*$, $\underline{s}_o^*$, $\underline{T}_o^*$.

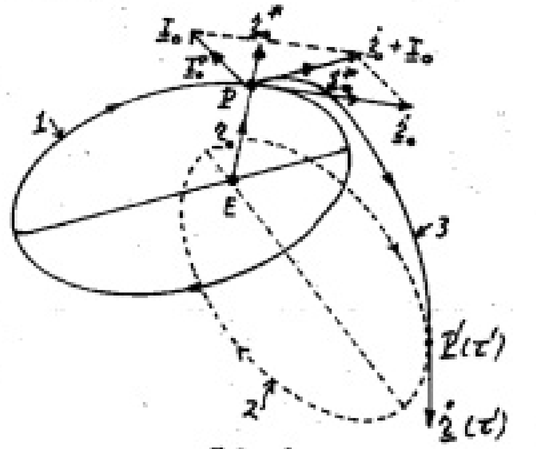
Ἡ ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος γίνεται εὐκολωτέρα, ὅταν τοῦτο ἀναφερθῇ εἰς τὸ σύστημα ἀξόνων τοῦ Σχήματος 3.

Λαμβάνομεν ὡς «δοκιμαστικὴν λύσιν» τοῦ μοντέλου(4) τὴν συνάρτησιν:

$$\underline{r}(\tau)=a_1(\tau)\cdot\underline{r}_o^*+a_2(\tau)\cdot\underline{s}_o^*+a_3(\tau)\cdot\underline{T}_o^*\qquad(4.1)$$

ἀναφερομένων εἰς τὸ ἀνωτέρω σύστημα ἀξόνων.

Μὲ κατάλληλον ὑπολογισμὸν τῶν συντελεστῶν: $\alpha_1(\tau)$, $\alpha_2(\tau)$, $\alpha_3(\tau)$ κάμνομεν τὴν συνάρτησιν (4.1) πρῶτον «τυπικὴν λύσιν» καὶ ἔπειτα «πραγματικὴν λύσιν» τοῦ(4).



Σχῆμα 3

1 : ἀρχικὴ τροχιά

2 : νέα τροχιά

3 : τροχιὰ κατὰ τὴν διάρκειαν δράσεως τῆς δυνάμεως $\underline{T}$

— Ἡ ἔρευνα δεικνύει ὅτι ἡ συνάρτησις (4.1) δύναται νὰ γίνῃ «τυπικὴ λύσις» τοῦ (4), ἐὰν τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τῆς (4.1) ἱκανοποιοῦν τὰς Ἐξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{ll}\ddot{\alpha}_1 + \dfrac{\mu}{r^3}\alpha_1 = T_1, \; \alpha_1(0) = r_0, & \dot{\alpha}_1(0) = 0 \\ \ddot{\alpha}_2 + \dfrac{\mu}{r^3}\alpha_2 = T_2, \; \alpha_2(0) = 0, & \dot{\alpha}_2(0) = s_0 \\ \ddot{\alpha}_3 + \dfrac{\mu}{r^3}\alpha_3 = T_3, \; \alpha_3(0) = 0. & \dot{\alpha}_3(0) = 0\end{array}\right| \qquad (4.2)$$

Αἱ λύσεις $\alpha_1(\tau)$, $\alpha_2(\tau)$, $\alpha_3(\tau)$ τοῦ (4.2) πληροῦν τὰ ἐπιτάγματα τοῦ Hadamard ὑπὸ ὡρισμένους περιορισμοὺς διὰ τὰς συνιστώσας T_1, T_2, T_3 τῆς δυνάμεως $\underline{T}$, δηλαδὴ ἐὰν τὰ T_1, T_2, T_3 εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ χρόνου καὶ διαφορίσιμοι, καὶ ἐὰν τὰ $\dot{T}_1$, $\dot{T}_2$, $\dot{T}_3$ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ χρόνου, ἐπὶ πλέον $r \neq 0$.

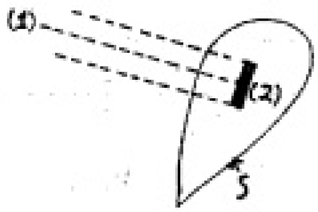
Ὑπὸ τοὺς ἀνωτέρω περιορισμοὺς τῶν T_1, T_2, T_3 τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ εἶναι τοιαῦτα, ὥστε ἡ συνάρτησις (4.1) νὰ εἶναι «φυσικῶς δεκτὴ» λύσις τοῦ (4).

5. *Ἐφαρμογὴ δ* (Πρόβλημα ὑποβρυχίου πολέμου). *«Τὸ πρόβλημα τῶν θόλων»*. 3(α)

Τὸ «πρόβλημα τῶν θόλων» προέκυψεν τὸ 1942-1943 ἐν σχέσει μὲ τὸν τότε ὑποβρύχιον πόλεμον, ἀποτελεῖ δὲ ἀξιόλογον παράδειγμα διὰ τοῦ ὁποίου δεικνύεται ἡ δυσκολία κατασκευῆς μαθηματικῶν μοντέλων διὰ πρακτικοὺς σκοποὺς ἀμέσου ἀνάγκης.

— Ὅταν ἀπὸ μίαν πλάκα, ἡ ὁποία εὑρίσκεται μέσα εἰς ταχέως κινούμενον πλοῖον ἐντὸς ὕδατος, στέλλεται πρὸς τὰ ἔξω δέσμη ἠχητικῶν ἀκτίνων, τότε ἔχομεν μίαν «ὑποβρύχιον ἠχητικὴν βολήν».

Κατὰ τὴν ὑποβρύχιον ἠχητικὴν βολήν, οἱ ἀτμοὶ ὕδατος, ποὺ ἐκπέμπονται ἀπὸ τὰ πέριξ τῆς πλακός, προκαλοῦν σοβαρὰς διαταραχάς, καί, πρὸς ἐξάλειψίν των, ἡ πλάκα τίθεται μέσα εἰς κύλον κέλυφος πλῆρες ὕδατος. Αὐτὴ ἡ ἠχητικὴ συσκευὴ ὀνομάζεται «θόλος», Σχῆμα 4.



Σχῆμα 4

(1) : ἄξων ἠχητικῆς δέσμης

(2) : ἡ πλάκα ὡς προβολεὺς

s : ἐπιφάνεια θόλου

Κατὰ τὸ 1942-1943 πολεμικαὶ ἀνάγκαι ἐπέβαλον νὰ κατασκευασθῇ μεγάλος ἀριθμὸς ἀπὸ μικρὰ καταδιωκτικὰ ὑποβρύχια ἐφοδιασμένα μὲ μικροὺς θαλάμους. Ὅταν ἐγίνετο ἡ κατασκευὴ τῶν θόλων αὐτῶν, παρετηρήθη ὅτι οὗτοι ἐπροκάλουν μίαν μὴ ἀνεκτὴν διάχυσιν καὶ ἀραίωσιν τοῦ ἀκτινοβολουμένου ἤχου, ἐκρίθη δὲ ὡς ἐπιτακτικὴ ἀνάγκη ἡ διόρθωσις τοῦ κακοῦ. Τότε ἡ μαθηματικὴ ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος, συνοδευομένη ἀπὸ ταχὺ πειραματικὸν ἔργον, ἔδωσεν τὴν ἀναμενομένην λύσιν εἰς τὸ ἐπεῖγον τότε αὐτὸ πρόβλημα.

— Ὡς ἕνα μοντέλον τοῦ ἀνωτέρω φυσικοῦ προβλήματος εὑρέθη ἡ ἐξίσωσις:

$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2 P + K^2 P = 0 \\ \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\end{array}\right\} \qquad (5.1)$$

ὅπου P ἡ ἐπιρροὴ τοῦ θόλου, $K = \omega/c$, ω ἡ συχνότης, c ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου. Τὸ K εἶχεν, ἀτυχῶς, τιμὰς διαφόρους ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τοῦ θόλου. Τὸ μοντέλον αὐτὸ ἀπεδείχθη ὡς τὸ μὴ κατάλληλον διὰ τὸ πρόβλημα, καὶ κατεβλήθη προσπάθεια, ὅπως τοῦτο τροποποιηθῇ καταλλήλως. Ὁ μικρὸς θόλος μικροῦ πάχους ἀντεκατεστάθη ἀπὸ ἄλλον θόλον πολὺ μικροτέρου πάχους, ὁπότε ἡ ἐπίδρασις τοῦ θόλου ἀντεκατεστάθη ἁπλῶς ἀπὸ συνθήκας «πηδημάτων ἀσυνεχείας» (jump discontinuities) τῆς διαταραχῆς q τῆς ἠχητικῆς δέσμης διὰ μέσου τῆς ἐπιφανείας τοῦ θόλου. Αὗται αἱ συνθῆκαι γράφονται ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\left.\begin{aligned} [q] &= \frac{p_1}{p_s^{-1}} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \\ \left[\frac{\partial q}{\partial n}\right] &= \frac{p_0}{p}(K_s^2 - K_i^2)p - \left(1 - \frac{p_0}{p}\right)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial n^2} - 2H\frac{\partial p}{\partial n}\right) \end{aligned}\right| \quad (5.2)$$

ὅπου τὸ σύμβολον [.] σημαίνει πήδημα τῆς ὑπὸ τὸ σύμβολον ποσότητος διὰ μέσου τῆς ἐπιφανείας. q εἶναι ἡ διαταραχὴ τῆς ἀκουστικῆς πιέσεως p προκαλουμένης ἀπὸ τὸν θόλον, καὶ $\frac{\partial}{\partial n}$ εἶναι «ὀρθογώνιος παράγωγος» (normal derivative), ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S τοῦ θόλου. H εἶναι ἡ μέση καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας S, ἤτοι ὁ μέσος ὅρος τῶν καμπυλοτήτων μεταξὺ δύο καθέτων διατομῶν. Τὰ q, S πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὰς συνθήκας (5.2), ἐπὶ πλέον δὲ τὸ q πρέπει νὰ εἶναι λύσις τῆς:

$$\nabla^2 q + K_s^2 q = 0 \qquad (5.3)$$

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχει τὴν μοναδικὴν λύσιν:

$$\left.\begin{aligned} q = &-\frac{1}{4\pi}\iint_s \left[\frac{\partial p}{\partial n}\right]\frac{e^{iK_0 r'}}{r'}ds + \\ &+\frac{1}{4\pi}\iint_s [q]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iK_s r'}}{r'}\right)ds \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

Αἱ ποσότητες εἰς τὰς ἀγκύλας δίδονται ἀπὸ τὰς συνθήκας (5.2), τὸ r′ εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ ὡρισμένον σημεῖον (x, y, z), ὅπου τὸ q πρέπει νὰ προσδιορισθῇ, καὶ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S.

Ὁ τύπος (5.4) δίδει τὴν διαταραχὴν ὡς ἀποτέλεσμα ὀφειλόμενον εἰς στρῶμα σημειακῶν πηγῶν, καὶ εἰς στρῶμα διπόλων, ποὺ διαταράσσονται ἐπὶ τῆς S μὲ ἐντάσεις συναρτήσεις τῆς ἀρχικῆς πιέσεως p, ἐφ' ὅσον αἱ ἐντὸς τῶν ἀγγυλῶν ποσότητες εἶναι ὡρισμέναι ἀπὸ τὰς συνθήκας (5.2).

Ἡ σχετικὴ διαταραχή:

$$\left|\frac{p_1}{q}\right| R e h \left(\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_2}{p_2}\right)$$

θὰ ἐπιτυγχάνεται ἀπὸ τὸν τύπον (5.4). Ὁ τύπος (5.4) δίδει τὴν λύσιν διὰ σταθερὸν πάχος τοῦ θόλου, ἀλλὰ εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ, χωρὶς σημαντικὸν λάθος, καὶ εἰς περιπτώσεις εἰς τὰς ὁποίας τὸ κέλυφος τοῦ θόλου εἶναι καμωμένον ἀπὸ μεγάλον ἀριθμὸν τεμαχίων, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων ἔχει σταθερὸν πάχος. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον θὰ ἦτο ἀναγκαῖον εἶναι νὰ εἰσαγάγωμεν ἕνα παράγοντα d εἰς τὰς ὑπὸ τὰ ὁλοκληρώματα ποσότητας τοῦ (5.4), ὁ ὁποῖος θὰ ἦτο σταθερὸς ἐπὶ τοῦ S.

Διὰ τοῦ τύπου τούτου, δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν τὴν συμβολὴν τῆς ἀποκλίσεως (distortion) διαφόρων παραγόντων, ὡς, π.χ. τῆς καμπυλότητος τοῦ θόλου, τῆς πυκνότητος, καὶ τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου ἐντὸς αὐτοῦ. Τὸ ἀνωτέρω τελειοποιημένον μοντέλον, ἂν καὶ μὴ συνοδευόμενον ἀπὸ ἐπαρκῆ ἀριθμητικὸν ὑπολογισμόν, ἀπεδείχθη πολὺ βοηθητικὸν καὶ ἐπαρκὲς διὰ τὰς ἀνάγκας τοῦ προβλήματος.

6. *Ἐφαρμογὴ 6* (Βιολογία, Οἰκονομική). 1(b), 7, 15
«Τὸ πρόβλημα τῆς ἐξελίξεως τῶν πληθυσμῶν».

Μία ἐπιτυχημένη ἐκλογὴ μοντέλου διὰ τὸ δύσκολον πρόβλημα τῆς ἐξελίξεως τῶν πληθυσμῶν ὀφείλεται εἰς τοὺς πρωτεργάτας Lotka καὶ Vorterra.

Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ πραγματευθῶμεν τὸ πρόβλημα εἰς τὴν περίπτωσιν ἑνὸς μόνον πληθυσμοῦ, ἢ ὅταν δύο ἢ περισσότεροι πληθυσμοὶ συμβιοῦν. Παρατηροῦμεν ἀπὸ τώρα ὅτι τὸ βιολογικὸν αὐτὸ πρόβλημα δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς πρόβλημα ἄλλης φύσεως, π.χ. εἰς πρόβλημα οἰκονομικόν, ὅταν εἰς τὰς εἰσερχομένας μεταβλητὰς δοθῇ ἄλλη ἔννοια.

α. *Ἡ ἐξέλιξις ἑνὸς πληθυσμοῦ.*

Ἐὰν N(t) εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ἑνὸς πληθυσμοῦ κατὰ μίαν χρονικὴν στιγμὴν t, (Nt) εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικός, καὶ ἐπομένως N(t) εἶναι «βαθμωτὴ συνάρτησις» (step function) τοῦ χρόνου. Τὸ N(t) εἶναι σταθερὸν εἰς ἕνα χρονικὸν διάστημα, ἐὰν εἰς τοῦτο ὁ πληθυσμὸς δὲν ἀλλάζῃ, ἐνῷ θὰ παρουσιάζῃ ἀσυνέχειαν εἰς ἕνα χρονικὸν διάστημα εἰς τὸ ὁποῖον συμβαίνει γέννησις ἢ θάνατος.

Πρὸς δημιουργίαν μοντέλου διὰ τὴν ἐξέλιξιν ἑνὸς πληθυσμοῦ, κάμνομεν τὰς κάτωθι ὑποθέσεις:

(i): N(t) εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ χρόνου t

(ii): Ἡ στιγμιαία ἀλλαγὴ εἰς τὴν αὔξησιν τοῦ N(t) ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ N(t), ἐπομένως δεχόμεθα:

$$\frac{dN}{dt} = f(N) \qquad (6.1)$$

Ἡ συνάρτησις f(N) εὑρίσκεται εἰς τὴν πρᾶξιν μὲ ὑποθέσεις καὶ παρατηρήσεις. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

$α_1$. *Περίπτωσις μὴ ἀπομεμονωμένου πληθυσμοῦ.*

Μὴ ἀπομονωμένον πληθυσμὸν ἐννοοῦμεν πληθυσμὸν εἰς ἀπέραντον χῶρον καὶ μὲ ἀπεριόριστον ἀπόθεμα τροφῆς.

Ἐὰν n καὶ m εἶναι, ἀντιστοίχως, οἱ συντελεσταὶ γεννήσεως καὶ θανάτου, τότε εἰς μικρὸν χρονικὸν διάστημα Δt ἡ αὔξησις ΔN τοῦ πληθυσμοῦ θὰ εἶναι:

$\Delta N=(n-m).N.\Delta t$, ὁπότε, διὰ $\Delta t\to 0$, θὰ ἔχωμεν:

$$\dot{N}=(n-m)N \qquad (6.2)$$

ὅπου $(n-m)$ χαρακτηρίζει τὴν φύσιν τοῦ πληθυσμοῦ.

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (6.2), ἐὰν $N_0=N(0)$ εἶναι ἡ ἀρχικὴ τιμὴ τοῦ πληθυσμοῦ, εἶναι:

$$N=N_0\cdot e^{(n-m)t} \qquad (6.3)$$

Ἐὰν $n<m$, ὁ πληθυσμὸς τείνει νὰ ἐξαφανισθῇ, ἀλλ' ἐὰν $n>m$ ὁ πληθυσμὸς αὐξάνει ἐκθετικὰ πρὸς τὸ ἄπειρον, ἐφ' ὅσον ὑπάρχει διὰ τὸν πληθυσμὸν αὐτὸν ἀπέραντος χῶρος καὶ ἀπεριόριστον ἀπόθεμα τροφῆς. Ἡ διακεκομμένη καμπύλη (a) εἰς τὸ Σχῆμα 5 παριστᾷ τὴν λύσιν (6.3) εἰς τὴν περίπτωσιν $n>m$.

Τὸ ἀνωτέρω συμπέρασμα δὲν συμφωνεῖ μὲ παρατηρήσεις καὶ πειράματα, ἑπομένως τὸ μοντέλον (6.2) δὲν δίδει τὴν ἐξέλιξιν τοῦ πληθυσμοῦ καὶ πρέπει νὰ βελτιωθῇ.

α_2. *Περίπτωσις ἀπομεμονωμένου πληθυσμοῦ.*

Εἰς ἕνα πληθυσμὸν μὲ μεγάλον ἀριθμὸν μονάδων, ἡ διατροφὴ δὲν δύναται νὰ εἶναι καλή, τὸ ἀπόθεμα τροφῆς εἶναι περιωρισμένον, τὸ περιβάλλον ἐπίσης περιωρισμένον, ὁ πληθυσμὸς εἶναι «ἐν ἀπομονώσει», ὁπότε ἡ ἐξέλιξις τοῦ πληθυσμοῦ συναντᾷ ἐμπόδια, ἡ θνησιμότης του αὐξάνει, καὶ ὁ πληθυσμὸς θὰ ἔχῃ ἕνα πεπερασμένον μέγιστον N_M, τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται κυρίως ἀπὸ τὰς συνθήκας διατροφῆς του. Τὸ μοντέλον (6.2), ἂν καὶ χρήσιμον διὰ N πλησίον τοῦ N_0, χρειάζεται τροποποίησιν διὰ νὰ συμφωνήσῃ μὲ τὰς παρατηρήσεις, ὅταν τὸ N λαμβάνῃ μεγάλας τιμὰς ἐν σχέσει πρὸς τὸ N_0. Πρὸς τοῦτο, εἰσαγάγομεν ἕνα συντελεστὴν διὰ τὸ ἀποτέλεσμα ἀντιδράσεως, καὶ τοῦτο γίνεται μὲ τὴν ἀλλαγὴν τοῦ συντελεστοῦ m τῆς θνησιμότητος εἰς:

$$m'=m+\beta N \qquad (6.4)$$

ὁπότε τὸ μοντέλον (6.2) γίνεται:

$$\dot{N}=(n-m)N-\beta N^2 \qquad (6.5)$$

Ἡ ἐξίσωσις (6.5) εἶναι μία ἐξίσωσις Bernoulli, καὶ λέγεται: «ἐξίσωσις τοῦ Verhalst», ἡ δὲ γενικὴ λύσις της, ἡ ὁποία λέγεται «λογιστικὴ καμπύλη» (logistic curve), εἶναι:

$$N=\frac{n-m}{\beta+e^{-c}\cdot e^{-(n-m)t}} \qquad (6.6)$$

ὅπου c ἡ σταθερὰ ὁλοκληρώσεως.

Δίδομεν κατωτέρω καταλλήλους μορφὰς εἰς τὴν λύσιν (6.6), ὥστε αὐτὴ νὰ περιέχῃ τὴν ἀρχικὴν N_0 καὶ τὴν μεγίστην N_m τιμὴν τοῦ πληθυσμοῦ.

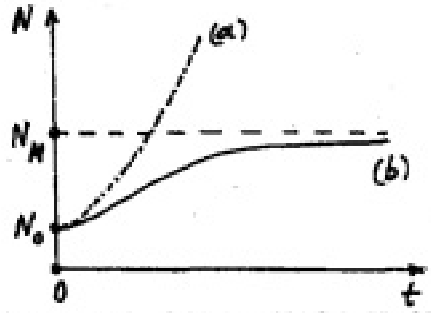
Ἡ (6.6) διὰ $t=0$ δίδει: $e^{-c}=(n-m-\beta N_0)/N_0$, ὁπότε:

$$N=\frac{(n-m)N_0}{\beta N_0+(n-m-\beta N_0)\cdot e^{-(n-m)t}} \qquad (6.7)$$

Τώρα, διὰ $n>m$ καὶ $N\to\infty$, τὸ N γίνεται: $N_M=(n-m)/\beta$, ὁπότε ἡ λύσις (6.7) γίνεται:

$$N=\frac{N_0N_M}{N_0+(N_m-N_0)\cdot e^{-(n-m)t}} \qquad (6.8)$$

Ἡ καμπύλη (b) τοῦ σχήματος 5 δεικνύει τὴν λύσιν (6.8). Κατὰ τὸν τύπον (6.8), ὁ πληθυσμὸς N αὐξάνει, ὅταν $n>m$, καὶ τελικὰ φθάνει τὸ μέγιστόν του N_M, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τιμὴ ἰσορροπίας τοῦ πληθυσμοῦ.



Σχ. 5

Ἐὰν $n=m$, τότε διὰ πᾶν t θὰ εἶναι $N=N_0$. Ἐὰν $n<m$ καὶ $t\to\infty$, θὰ εἶναι $N\to 0$. Ἐὰν N_0 εἶναι μικρὸν συγκρινόμενον πρὸς τὸ N_M, καὶ N θὰ εἶναι πλησίον τοῦ N_0, τότε ὁ ὅρος βN^2 τοῦ τύπου (6.5) δύναται νὰ παραμεληθῇ συγκρινόμενος πρὸς τὸν ἄλλον ὅρον, ὁπότε τὰ μοντέλα (6.2) καὶ (6.5) ταυτίζονται, δηλαδὴ αἱ καμπύλαι (a) καὶ (b) τοῦ Σχήματος 5 ταυτίζονται πλησίον τοῦ N_0.

Ὅταν ὅμως τὸ N αὐξάνῃ, ὁ ὅρος βN^2 τοῦ (6.5) γίνεται σημαντικός, τὸ μοντέλον (6.2) παύει νὰ εἶναι χρήσιμον καὶ τὸ μοντέλον (6.5) συνιστᾶται.

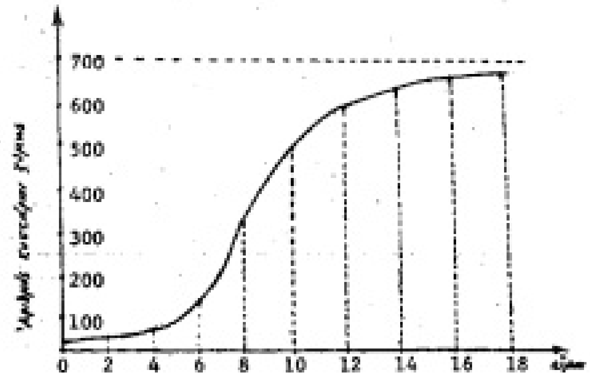
— Τὸ μοντέλον (6.5) ἀπεδείχθη κατάλληλον εἰς τὴν πρᾶξιν διὰ προβλήματα ἐξελίξεως πληθυσμῶν.

Ἀναφέρομεν δύο παραδείγματα.

(i): Ὁ κάτωθι πίναξ ἀριθμῶν εἶναι ἀποτέλεσμα μετρήσεων εἰς κύτταρα ζύμης εἰς ἐργαστηριακὴν καλλιέργειαν. Ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις τοῦ πίνακος δίδει τὴν καμπύλην τῆς ἐξελίξεως τοῦ παραδείγματος, Σχῆμα 6, ἡ ὁποία συμφωνεῖ πρὸς τὴν καμπύλην (β) τοῦ Σχήματος 5.

χρόνος εἰς ὥρας	ἀριθμὸς μονάδων	χρόνος εἰς ὥρας	ἀριθμὸς μονάδων
0	9.6	10	313.3
2	29.0	12	594.4
4	71.1	14	640.8
6	174.6	16	655.9
8	360.7	18	661.8

(ii): Ἡ λύσις (6.8) ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν μελέτην τῆς ἐξελίξεως τοῦ πληθυσμοῦ τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν τῆς Ἀμερικῆς καὶ ἔδωσεν ἀσφαλεῖς προγνώσεις, ἔστω καὶ ἐὰν ἡ δημιουργία τοῦ μοντέλου (6.5) ἐβασίσθη ἐπάνω εἰς τόσον ἁπλουστευτικὰς ὑποθέσεις.



Σχῆμα 6. Καμπύλη ἐξελίξεως κυττάρων ζύμης.

Παρατήρησις: Ἐάν, διὰ τὴν συνάρτησιν f(N) τοῦ ἀρχικοῦ μοντέλου (6.1), κάμωμεν ἄλλας ὑποθέσεις, διαφόρους τῶν προηγουμένων, θὰ ἔχωμεν διάφορα μοντέλα διὰ τὴν ἐξέλιξιν ἑνὸς πληθυσμοῦ, τὰ ὁποῖα ἐνδέχεται νὰ παρέχουν τὴν πραγματικότητα καλύτερον.

b. *Διάφοροι πληθυσμοὶ εἰς ἐπικοινωνίαν.*

b_1. *Γενικὴ περίπτωσις.*

Ἐὰν ἔχωμεν n διαφόρους πληθυσμοὺς N_i, $i = 1,\dots,n$ ἐπικοινωνίαν, τὸ μαθηματικὸν μοντέλον εἶναι, κατὰ τὸν Lotka:

$$N_i = F_i(N_1,\dots,N_n\,,\;P_1,\dots,P_m) \qquad (6.9)$$

ὅπου αἱ παράμετροι P_j, $j = 1,\dots,m$ ὁρίζουν τὸ «περιβάλλον», ὅπου οἱ πληθυσμοὶ ἐξελίσσονται.

Αἱ παράμετροι ἐπιδροῦν ἐπὶ τῶν πληθυσμῶν, ἐπὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἀναπαραγωγῆς των, ἐπὶ τῆς διαρκείας τῆς ζωῆς των. Σχετίζονται πρὸς τοπολογικὰ καὶ γεωγραφικὰ συμβάντα τῶν πληθυσμῶν, ἢ πρὸς κλιματολογικὰς συνθήκας, κλπ.

Εἰς τὸ μοντέλον (6.9), οἱ πληθυσμοὶ N_i δυνατὸν νὰ ὑπόκεινται εἰς περιοριστικὰς σχέσεις (constraint relationships), αἱ ὁποῖαι δυνατὸν νὰ σμικρύνουν τὸν ἀριθμὸν τῶν πληθυσμῶν N_i.

Καὶ αἱ παράμετροι P_j δυνατὸν νὰ ἔχουν ἀλληλοεξαρτήσεις, ὥστε καὶ τῶν παραμέτρων ὁ ἀριθμὸς νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ σμικρυνθῇ. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ μοντέλον (6.9) ἔχει ληφθῆ κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων, ὥστε εἰς τοῦτο ὁ ἀριθμὸς τῶν πληθυσμῶν καὶ τῶν παραμέτρων νὰ εἶναι ὁ μικρότερος, ὁπότε τὸ πρόβλημα ἁπλουστεύεται.

Ἐὰν $N_i = 0$, τότε $F_i \equiv 0$, καὶ διὰ νὰ παρέχῃ τὸ μοντέλον (6.9) τὴν σχέσιν αὐτὴν μεταξὺ τῶν N_i καὶ F_i γράφομεν:

$$F_i = N_i \cdot G_i(N_1,\dots,N_n\,.\;P_1,\dots,P_m) \qquad (6.10)$$

ὅπου:

$$G_i = e_i + a_{i1}N_1 + \cdots + a_{in}N_n \qquad (6.11)$$

b_2. *Περίπτωσις δύο πληθυσμῶν.*

$b_{2\cdot1}$. *Γενικὴ παρατήρησις.*

Εἰς ἕνα μοντέλον δύο πληθυσμῶν N_1 καὶ N_2, οἱ ὁποῖοι συμβιοῦν, ἡ λύσις, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ ἕνα ἀρχικὸν σημεῖον (N_{10}, N_{20}) τοῦ N_1, N_2 - ἐπίπεδον, ὅταν ὁ χρόνος t αὐξάνῃ, θὰ τείνῃ πρὸς ἕνα σημεῖον $(\overline{N}_1, \overline{N}_2)$ τοῦ ἐπιπέδου, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὰς ἀκολούθους τρεῖς περιπτώσεις:

(i): Τὸ σημεῖον $(\overline{N}_1, \overline{N}_2)$ δυνατὸν νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν O τῶν ἀξόνων, ὁπότε ὁμιλοῦμεν περὶ «ἐξαλείψεως τῶν πληθυσμῶν» (extinction)·

(ii): Ἓν ἐκ τῶν $\overline{N}_1$ ἢ $\overline{N}_2$ δυνατὸν νὰ εἶναι μηδὲν καὶ τὸ ἄλλο ὄχι μηδέν, δηλαδὴ τὸ σημεῖον $(\overline{N}_1, \overline{N}_2)$ δυνατὸν νὰ εἶναι ἐπὶ ἑνὸς ἐκ τῶν ἀξόνων, ὁπότε ἔχομεν τὴν «ἀρχὴν τῆς συναγωνιστικῆς ἀποκλείσεως (principle of competitive exclusion) ἢ «ἀρχὴν τοῦ Gause» (1930), μίαν ἀρχὴν τόσον χρήσιμον εἰς τὴν οἰκολογίαν, ἡ ὁποία ὅμως τόσον ἔχει καταπολεμηθῆ·

(iii): Τὸ σημεῖον $(\overline{N}_1, \overline{N}_2)$ θὰ ἔχῃ $\overline{N}_1 \neq 0$, $\overline{N}_2 \neq 0$, ὁπότε θὰ εὑρίσκεται ἐντὸς χωρίου D τοῦ πρώτου τεταρτοκυκλίου τοῦ N_1, N_2 - ἐπιπέδου, ἢ ὅλα τὰ σημεῖα (N_1, N_2) δυνατὸν νὰ εἶναι ἐντὸς χωρίου D, καὶ τὰ N_1, N_2 ν' ἀλλάζουν περιοδικῶς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁμιλοῦμεν περὶ «συνυπάρξεως τῶν πληθυσμῶν» (coexistence), περὶ «συμβιώσεως» (symbiosis), περὶ «παρασιτισμοῦ» (parasitism).

Ἡ «ἱκανότης συναγωνισμοῦ» εἰς περιοδικὰς μεταβολὰς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν συχνότητα.

$b_{2\cdot2}$. *Τὸ πρόβλημα τῆς συνυπάρξεως δύο πληθυσμῶν εἰς περιωρισμένον περιβάλλον.*

— Οἱ Lotka καὶ Volterra εἶναι πρωτεργάται εἰς τὸ πρόβλημα αὐτό. Ὁ Lotka ἠρεύνησεν τὸ πρόβλημα εἰς τὴν περίπτωσιν δύο πληθυσμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας, τὰ «παράσιτα», εἶναι ἱκανὸς ν' ἀντιδρᾷ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ ἄλλου, τοῦ «φιλοξενοῦντος» (host) πληθυσμοῦ. Ὁ Volterra ἠρεύνησεν ὅμοιον πρόβλημα, δηλαδὴ τὴν ἐντὸς τῆς θαλάσσης ἐξέλιξιν δύο εἰδῶν ψαριῶν, τοῦ «καρχαρίου» (shark) καὶ ξιν δύο εἰδῶν ψαριῶν τοῦ «καρχαρίου» (shark) καὶ τῆς «γλώσσης» (sole) ἐκ τῶν ὁποίων οἱ καρχαρίαι τρέφονται ἀπὸ γλώσσας.

Διά τήν όμοιότητα τῶν δύο αὐτῶν προβλημάτων θεωροῦμεν τήν «γλῶσσαν» ὡς «φιλοξενοῦντα» πληθυσμόν καί τόν «καρχαρίαν» ὡς «παράσιτον».

Θά ἴδωμεν εἰς τά ἑπόμενα ὅτι ἡ λύσις ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται μέ μαθηματικήν ἀνάλυσιν εἶναι περιοδική τό ὁποῖον συμφωνεῖ μέ ἐμπειρικά δεδομένα καί ὅτι τά δύο εἴδη τῶν πληθυσμῶν δύνανται νά συνεχίσουν τήν συμβίωσίν των ὁπότε οἱ πληθυσμοί αὐτοί ἀλλάζουν κατ' ἔντασιν περιοδικῶς.

— Ἔστω ὅτι n_1 m_1 b_1 εἶναι ἀντιστοίχως οἱ συντελεσταί γεννήσεως θανάτου καί συναγωνισμοῦ τοῦ φιλοξενοῦντος πληθυσμοῦ N_1. Ἡ αὔξησις τοῦ N_1 εἰς χρόνον dt λόγῳ γεννήσεων εἶναι n_1N_1dt τό ὁποῖον δέν εἶναι πάντοτε ἀληθές, λόγῳ διαφόρων αἰτίων, ἐκ τῶν ὁποίων ἕνα εἶναι ὅτι ὁ πληθυσμός, εἰς κάποιαν χρονικήν στιγμήν, δυνατόν νά συνίσταται ἀπό μονάδας ὄχι ἐνηλίκους. Ἐπί πλέον, ὅταν μία μονάς τοῦ φιλοξενοῦννος πληθυσμοῦ συναντᾷ μίαν μονάδα τοῦ παρασιτικοῦ πληθυσμοῦ, ὑπάρχει πιθανότης θανάτου τοῦ πρώτου.

Ἐάν N_2 εἶναι ὁ πληθυσμός τῶν παρασίτων, ὁ ἀριθμός τῶν συναντήσεων θά εἶναι ἀνάλογος τοῦ γινομένου aN_1N_2, ὅπου a εἶναι ὁ ἀντιστοιχῶν συντελεστής, καί σύμφωνα πρός τάς ἀνωτέρω ὑποθέσεις, ἡ αὔξησις τοῦ N_1 εἶναι:

$$\dot{N}_1 = (n_1 - m_1)N_1 - aN_1N_2 - b_1N_1^2 \qquad (6.12)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ διαφορική ἐξίσωσις τοῦ φιλοξενοῦντος πληθυσμοῦ.

Ὁ τύπος (6.12) διαφέρει ἀπό τόν τύπον (6.5) κατά τόν ὅρον $(-aN_1N_2)$ τῶν θανάτων μετά τάς συναντήσεις τῶν δύο πληθυσμῶν.

— Διά τήν ἐξίσωσιν τῆς ἐξελίξεως τῶν παρασίτων, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ γεννήσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν N_1 καί N_2, ἑπομένως ἀνάλογοι τοῦ γινομένου N_1N_2, καί, ἐάν m_2 εἶναι ὁ συντελεστής τῶν φυσικῶν θανάτων, καί b_2 ὁ συντελεστής συναγωνισμοῦ, τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐξελίξεως τῶν παρασίτων εἶναι:

$$N_2 = haN_1N_2 - m_2N_2 - b_2N_2^2 \qquad (6.13)$$

καί τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τήν εὕρεσιν τῶν N_1 καί N_2 ὡς λύσεων τοῦ μή γραμμικοῦ συστήματος τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (6.12) καί (6.13). Παρατηροῦμεν ὅτι κατά τήν διάρκειαν τῆς συμβιώσεως κανέν ἐκ τῶν δύο εἰδῶν δέν δύναται νά φθάσῃ τήν πλήρη ἀνάπτυξίν του ἐκτός ἐάν τά N_1 καί N_2 γίνουν μεγάλα ὁπότε οἱ ὅροι $b_1N_1^2$ καί b_2N_2 γίνονται ἐπίσης μεγάλοι. Βασισμένοι ἐπί τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς δυνάμεθα ν' ἀγνοήσωμεν τούς ὅρους $b_1N_1^2$ καί $b_2N_2^2$ ἀπό τάς ἀνωτέρω ἐξισώσεις ὁπότε θά ἔχωμεν νά λύσωμεν τό μή γραμμικόν σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \dot{N}_1 &= (n_1 - m_1)N_1 - aN_1N_2 \\ \dot{N}_2 &= -m_2N_2 + haN_1N_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.14)$$

Χωρίζοντες τάς μεταβλητάς εἰς τό σύστημα αὐτό θά ἔχωμεν:

$$dt = \frac{dN_1}{N(n_1 - m_1 - aN_2)} = \frac{dN_2}{N_2(-m_2 + haN_1)}$$

ἡ ὁποία δίδει:

$$\left(-\frac{m_2}{N_1} + ha\right)dN_1 = \left(\frac{n_1 - m_1}{N_2} + a\right)dN_2$$

ὁπότε δι' ὁλοκληρώσεως λαμβάνομεν:

$$N_1^{-m_2} \cdot e^{haN_1} = c \cdot N_2^{n_1 - m_1} \cdot e^{-aN_2} \qquad (6.15)$$

ὅπου c παράμετρος.

Ἐάν $n_1 - m_1 = n_1' > 0$ καί c οἱονδήποτε ὁ τύπος (6.15) δίδει «κλειστήν καμπύλην» ἐπί τοῦ N_1 N_2-ἐπιπέδου.

— Διά πᾶσαν τιμήν τοῦ φιλοξενοῦντος πληθυσμοῦ N_1 καί οἱανδήποτε τιμήν τοῦ c, ἡ τιμή:

$$\frac{1}{c} N_1^{-m_2} \cdot e^{haN_1} = \overline{y} \qquad (6.16)$$

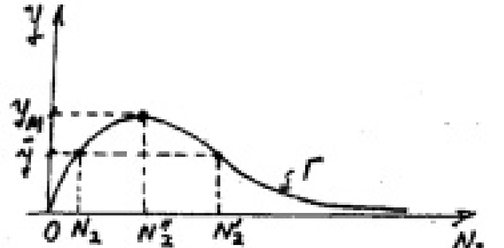
εἶναι γνωστή, ὁπότε τό N_2 δίδεται συναρτήσει τοῦ $\overline{y}$ ἀπό τόν τύπον:

$$N_2 \cdot e^{n_1'} \cdot e^{-aN_2} = \overline{y} \qquad (6.17)$$

Εἰς τό N_2, y-ἐπίπεδον χαράζομεν τήν καμπύλην Γ, Σχῆμα 7, βάσει τοῦ τύπου:

$$y = N_2 \cdot e^{n_1'} \cdot e^{-aN_2} \qquad (6.18)$$

Διά $N_2 = 0$ ἔχομεν $y = 0$, ὁπότε ἡ Γ ἀρχίζει ἀπό τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων. Ὅταν N_2 αὐξάνῃ ἀπό μικράς τιμάς, τό y αὐξάνει μέχρι τοῦ μεγίστου του y_M ἀντιστοιχοῦντος εἰς τήν τιμήν $N_2 = N_2''$. Ὅταν τό N_2 αὐξάνῃ ἀπό τό N_2' καί τείνῃ πρός τό ἄπειρον, τό $y \to 0$.



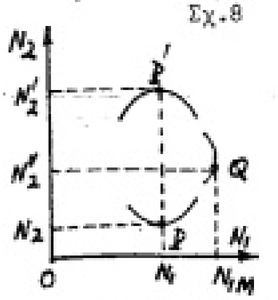
Σχῆμα 7

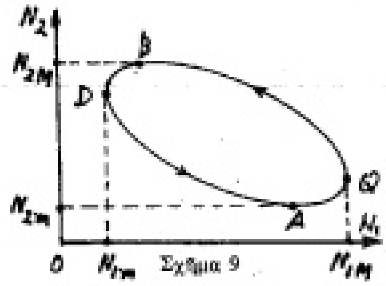
Δι' οἱανδήποτε τιμήν τοῦ N_1, διά τήν ὁποίαν τό $\overline{y}$ ὑπολογίζεται ἀπό τόν τύπον (6.16), ἐάν $\overline{y} < y_M$, ἔχομεν δύο τιμάς N_2 καί N_2', Σχῆμα 7. Διά τήν εἰδικήν τιμήν τοῦ N_1 διά τήν ὁποίαν τό $\overline{y}$ γίνεται y_M, ἔχομεν μίαν τιμήν τοῦ N_2, τήν $N_2 = N_2''$.

Δι' οἱανδήποτε τιμήν τοῦ N_2, εὑρίσκομεν δύο τιμάς τοῦ N_2, τάς N_2 καί N_2', αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ σημεῖα P καὶ P′ τῆς καμπύλης Γ, Σχῆμα 8, εἰς τὸ N_1, N_2-ἐπίπεδον.

Ὅταν τὸ N_1 αὐξάνεται, αἱ τιμαὶ N_2 καὶ N_2' τείνουν νὰ συμπέσουν, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Q, ὅπου τὰ P, P′ συμπίπτουν, ἔχομεν $N_1 = N_{1M}$, ὅπου N_{1M} εἶναι μέγιστον. Συνεχίζοντες μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, ὅταν τὸ N_1 ἐλαττοῦται, εὑρίσκομεν ἕνα ἄλλο σημεῖο D τῆς Γ, ὅπου πάλιν τὰ P, P′ συμπίπτουν, καὶ ὅπου ἡ Γ ἔχει ἐφαρπτομένην παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα N_2, ὅπως εἰς τὸ σημεῖον Q. Οὕτω προκύπτει ἡ «κλειστὴ καμπύλη», Σχῆμα 9, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (6.15).

Σχ. 8





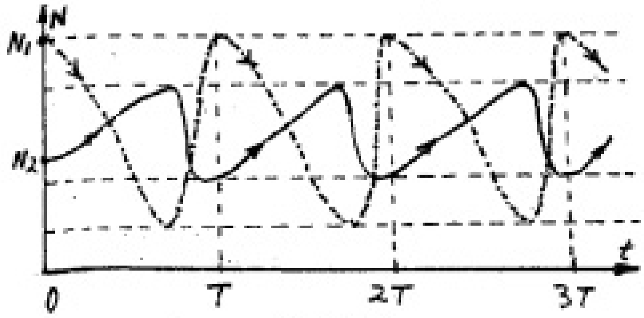
Σχῆμα 9

Τὸ ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα σημαίνει ὅτι τὸ σύστημα (6.14) ἔχει μίαν λύσιν:

$$N_1 = N_1(t), \quad N_2 = N_2(t) \qquad (6.19)$$

περιοδικοῦ τύπου, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς μὴ γραμμικὰς ταλαντώσεις, Σχῆμα 10.

Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ χρόνου t ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (6.19) δίδει τὴν σχέσιν (6.15), ἡ ὁποία εἶναι μία κλειστὴ καμπύλη εἰς τὸ N_1, N_2-ἐπίπεδον, καὶ ἡ καμπύλη αὕτη διαγράφεται κατὰ τὴν ἰδίαν φοράν, ὅπως δεικνύει τὸ βέλος.



Σχῆμα 10

Ἄξιον προσοχῆς εἶναι ὅτι τὸ ἀνωτέρω βιολογικὸν πρόβλημα δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς πρόβλημα ἄλλης φύσεως, ἐὰν εἰς τὰς εἰσερχομένας μεταβλητὰς δοθῇ ἄλλη ἔννοια, δηλαδὴ ἐὰν τὰ συναγωνιζόμενα εἴδη καὶ τὰ περιωρισμένα μέσα εἰδικευθοῦν καταλλήλως. Π.χ. δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν «οἰκονομικὸν πρόβλημα», ἐὰν αἱ ποσότητες N_1 καὶ N_2 φανερώνουν μεγέθη δύο ἐμπορικῶν ἐπιχειρήσεων, αἱ ὁποῖαι συναγωνίζονται διὰ κοινὰς πηγὰς εἰς κοινὴν ἀγοράν.