Author: Νικόλαος Βαδιβούλης

Title: Εμβαδικά εμβόλιμα

Creator: HDML

ΕΜΒΑΔΙΚΑ ΕΜΒΟΛΙΜΑ

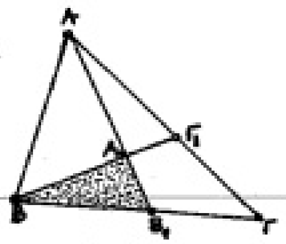
Ὑπὸ **Νικολάου Βαδιβούλη**, Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν

Θ_1. *Ἔστω $\Delta =]0, 1[$ καὶ B_1, Γ_1 σημεῖα τῶν πλευρῶν $B\Gamma$, ΓA ἀντιστοίχως τριγώνου $AB\Gamma$ ἐμβαδοῦ E. Ἐὰν $(\lambda_1, k_1) \in \Delta \times \Delta = \Delta^2 \wedge \lambda_1 = \dfrac{AA_0}{AB_1} \wedge k_1 = \dfrac{B_1\Gamma}{B\Gamma}$, δείξατε ὅτι $(A_0BB_1) = (1-\lambda_1)\cdot(1-k_2)\cdot E$, μὲ A_0 τὸ σημεῖον τομῆς τῶν AB_1, $B\Gamma_1$.*

A_1. Τὰ τρίγωνα A_0BB_1 καὶ ABB_1 ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ἐκ τῆς κοινῆς κορυφῆς των B, πρὸς τὴν ἀπέναντι εὐθεῖαν φορέα τῶν πλευρῶν των A_0B_1 καὶ AB_1. Ἄρα ἔχομεν:

$$\frac{(A_0BB_1)}{(ABB_1)} = \frac{A_0B_2}{AB_2} \Rightarrow (A_0BB_1) = \frac{AB_1 - AA_0}{AB_1}\cdot(ABB_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A_0BB_1) = (1-\lambda_1)\cdot(ABB_1) \quad (1).$$



Σχ. 1

Τὰ τρίγωνα ABB_1 καὶ $AB\Gamma$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ἐκ τῆς κοινῆς κορυφῆς των A, πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς κοινοῦ φορέως ἐκ τῶν B, Γ ὁριζομένου. Ἄρα ἔχομεν:

$$\frac{(ABB_1)}{(AB\Gamma)} = \frac{BB_1}{B\Gamma} \Rightarrow (ABB_1) = \frac{B\Gamma - B_1\Gamma}{B\Gamma}\cdot(AB\Gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ABB_1) = (1-k_1)\cdot E \quad (2).$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγεται ὅτι:

$$(A_0BB_1) = (1-\lambda_1)\cdot(1-k_1)\cdot E.$$

Ὥστε ὁ τύπος ἰσχύει διὰ τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν:

α'] $\lambda_1 \in \Delta \wedge k_1 \in \Delta$.

β'] $\lambda_1 \in \Delta \wedge k_1 = 0$ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἰσχύει καθ' ὅσον τὸ τρίγωνον γίνεται τὸ $\Gamma_1B\Gamma$ καὶ $(\Gamma_1B\Gamma) = (1-\lambda_1)\cdot(1-0)\cdot E = (1-\lambda_1)\cdot E$.

γ'] $\lambda_1 \in \Delta \wedge k_1 = 1$ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἰσχύει ὅταν τὸ A_0 εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος AB. Τότε τὸ τρίγωνον A_0BB_1 ἐκφυλλίζεται εἰς εὐθ. τμῆμα καὶ $(A_0BB_1) = (1-\lambda)\cdot(1-1)\cdot E =$ μηδέν.

δ'] $\lambda_1 = 0 \wedge k_1 \in \Delta$ ὡς καὶ ἡ περίπτωσις β'].

ε'] $\lambda_1 = 1 \wedge k_1 \in \Delta$ ὡς καὶ ἡ περίπτωσις γ'].

ς'] $\lambda_1 = 1 \wedge k_1 = 1$ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἰσχύει καθ' ὅσον τὸ τρίγωνον ἐκφυλλίζεται εἰς σημεῖον εἰς τὸ BBB διὰ τὸ ὁποῖον $(BBB) = (1-1)\cdot(1-1)\cdot E =$ μηδέν.

ζ'] $\lambda_1 = 1 \wedge k_1 = 0$ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἰσχύει καθ' ὅσον τὸ A_0BB_1 γίνεται τὸ $AB\Gamma$ διὰ τὸ ὁποῖον $(AB\Gamma) = (1-0)\cdot(1-0)\cdot E = E$.

η'] $\lambda_1 = 0 \wedge k_1 = 1$ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἰσχύει καθ' ὅσον τὸ τρίγωνον ἐκφυλλίζεται εἰς τὸ τμῆμα ABB διὰ τὸ ὁποῖον

$$(ABB) = (1-0)\cdot(1-1)\cdot E = \text{μηδέν}.$$

θ'] $\lambda_1 = 1 \wedge k_1 = 0$ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἰσχύει καθ' ὅσον τὸ τρίγωνον ἐκφυλλίζεται εἰς τὸ τμῆμα ΓΒΓ διὰ τὸ ὁποῖον

$$(\Gamma B\Gamma) = (1-1)\cdot(1-0)\cdot E = \text{μηδέν}.$$

Ὥστε, εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ἓν τοὐλάχιστον τῶν B_1, Γ_1 ταυτίζεται μὲ μίαν τῶν κορυφῶν ὁ τύπος

$$(A_0BB_1) = (1-\lambda_1)\cdot(1-k_1)\cdot E \quad (1) \text{ ἰσχύει.}$$

Θ_2. *Ἐὰν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν προηγουμένων εἶναι $k_2 = \dfrac{\Gamma_1 A}{\Gamma A} \wedge k_2 \in \Delta$, τότε ἰσχύει ὁ τύπος*

$$\lambda_1 = \frac{k_2}{k_2 + (1-k_1)\cdot(1-k_2)}$$

A_2. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ σχ. 1 τὰ τρίγωνα A_0BB_1 καὶ $A_0A\Gamma_1$ ἔχουν μίαν γωνίαν τοῦ αὐτοῦ μέτρου εἰς ἕκαστον, ἄρα ἐπὶ τῇ βάσει γνωστοῦ θεωρήματος ἔχομεν:

$$\frac{(A_0A\Gamma_1)}{(A_0BB_1)} = \frac{|\overline{AA_0}|\cdot|\overline{A_0\Gamma_1}|}{|\overline{A_0B}|\cdot|\overline{A_0B_1}|} = \frac{(AA_0)\cdot(A_0\Gamma_1)}{(A_0B)\cdot(A_0B_1)} \quad (1).$$

Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma_1$ καὶ $A_0A\Gamma_1$ ἔχουν μίαν γωνίαν κοινήν, ἄρα ἰσχύει:

$$\frac{(AB\Gamma_1)}{(A_0A\Gamma_1)} = \frac{(B\Gamma_1)}{(A_0\Gamma_1)} \quad (2).$$

Τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) πολλαπλασιάζομεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\frac{(AB\Gamma_1)}{(A_0BB_1)} = \frac{(AA_0)\cdot(B\Gamma_1)}{(A_0B_1)\cdot(A_0B)} \quad (3).$$

Ἀλλὰ ὅμως τὰ τρίγωνα $AB\Gamma_1$ καὶ $AB\Gamma$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ἐκ τοῦ B πρὸς τὸν φορέα τῶν $A\Gamma_1$ καὶ $A\Gamma$. Ἄρα ἔχομεν:

$$\frac{(AB\Gamma_1)}{E} = \frac{A\Gamma_1}{A\Gamma} = k_2 \Rightarrow (AB\Gamma_1) = k_2\cdot E \quad (4).$$

Ὡς γνωστὸν ὅμως:

$$\frac{AA_0}{AB_1}=\frac{\lambda_1}{1} \Rightarrow \frac{AA_0}{AB_1-AA_0}=\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AA_0}{A_0B_1}=\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} \quad (5).$$

Ἐπίσης τὰ τρίγωνα $B\Gamma_1\Gamma$ καὶ A_0BB_1 ἔχουν μίαν γωνίαν κοινήν, ἄρα ἔχομεν:

$$\frac{(B\Gamma_1\Gamma)}{(A_0BB_1)}=\frac{(B\Gamma_1)\cdot\alpha}{(A_0B)\cdot(BB_1)} \quad (6).$$

Ἀλλὰ ὅμως τὰ τρίγωνα $B\Gamma_1\Gamma$ καὶ $AB\Gamma$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ἐκ τῆς κοινῆς κορυφῆς των B πρὸς τὸν φορέα τῶν πλευρῶν $A\Gamma$, $\Gamma_1\Gamma$. Ἄρα ἔχομεν:

$$\frac{(B\Gamma_1\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma A}=\frac{\Gamma A-\Gamma_1 A}{\Gamma A}=1-\frac{\Gamma_1 A}{\Gamma A}=1-k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (B\Gamma_1\Gamma)=(1-k_2)\cdot E \quad (7).$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι:

$$\frac{B_1\Gamma}{B\Gamma}=k_1 \Rightarrow 1-\frac{B_1\Gamma}{B\Gamma}=1-k_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B\Gamma-B_1\Gamma}{B\Gamma}=1-k_1 \Rightarrow \frac{BB_1}{B\Gamma}=1-k_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (BB_1)=\alpha\cdot(1-k_1) \quad (8).$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (7), (8) καὶ ἀπὸ τὸν τύπον (I) ἡ σχέσις (6) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\frac{E\cdot(1-k_2)}{E\cdot(1-k_1)\cdot(1-\lambda_1)}=\frac{(B\Gamma_1)}{(A_0B)}\cdot\frac{\alpha}{\alpha\cdot(1-k_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(B\Gamma_1)}{(BA_0)}=\frac{1-k_2}{1-\lambda_1} \quad (9).$$

Ἡ σχέσις (3) λόγῳ τοῦ τύπου (I) καὶ τῶν σχέσεων (4), (5), (9) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\frac{k_2\cdot E}{E\cdot(1-\lambda_1)\cdot(1-k_1)}=\frac{\lambda_1\cdot(1-k_2)}{(1-\lambda_1)\cdot(1-\lambda_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k_2}{1-k_1}=\frac{\lambda_1\cdot(1-k_2)}{1-\lambda_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2-k_2\cdot\lambda_1=\lambda_1\cdot(1-k_2)\cdot(1-k_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2=\lambda_1\cdot[k_2+(1-k_2)\cdot(1-k_1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\frac{k_2}{k_2+(1-k_2)\cdot(1-k_1)} \quad (II).$$

Θ_2. *Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν προηγουμένων νὰ δειχθῇ ὁ τύπος:* $(A_0BB_1)=\frac{(1-k_1)^2\cdot(1-k_2)}{k_2+(1-k_1)(1-k_2)}\cdot E.$

A_2. Λόγῳ τοῦ ὅτι $\lambda_1=\frac{k_2}{k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1-\lambda_1=1-\frac{k_2}{k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)}=$$

$$=\frac{k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)-k_2}{k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)}=\frac{(1-k_1)\cdot(1-k_2)}{k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)}$$

Ὁ τύπος (I) ἐπὶ τῇ βάσει τῆς τελευταίας σχέσεως, λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$(A_0BB_1)=\frac{(1-k_1)^2\cdot(1-k_2)}{k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)}\cdot E \quad (III).$$

Παρατηρήσεις:

Π_1. Ἐὰν $k_1=\lambda_1=t$, τότε ἔχομεν:

$$(A_0BB_1)=(1-t)^2\cdot E \Rightarrow \frac{(A_0BB_1)}{E}=(1-t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(A_0BB_1)}}{\sqrt{E}}=1-t \Rightarrow -t=-1+\sqrt{m}:$$

$$m=\frac{(A_0BB_1)}{(AB\Gamma)} \vee \sqrt{m}=1-t.$$

Ἐὰν $m=\frac{1}{\nu^2}: \nu\in N \wedge \nu\geq 2$ τότε $\sqrt{m}=\frac{1}{\nu}$ καὶ:

$$-t=-1+\frac{1}{\nu} \Rightarrow t=\frac{\nu-1}{\nu}$$

Π_2. Ἐὰν $m=k_1=\frac{1}{\nu}: \nu\in N\wedge \nu\geq 2$ τότε:

$$m=(1-\lambda_1)\cdot\left(1-\frac{1}{\nu}\right) \quad \text{ἐκ τοῦ (I) ἄρα:}$$

$$m\cdot\nu=(1-\lambda_1)\cdot(\nu-1) \Rightarrow \frac{1}{\nu-1}=1-\lambda_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1-\frac{1}{\nu-1}=\frac{\nu-2}{\nu-1}$$

Ἐκ τοῦ (II) λαμβάνομεν:

$$\frac{\nu-2}{\nu-1}=\frac{k_2}{k_2+(1-k_2)\cdot\left(1-\frac{1}{\nu}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu-2}{\nu-1}=\frac{k_2\cdot\nu}{k_2+(1-k_2)\cdot(\nu-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\nu-2)\cdot k_2+(1-k_2)\cdot(\nu-1)\cdot(\nu-2)=\nu\cdot(\nu-1)\cdot k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\nu-2)\cdot k_2+(\nu-1)\cdot(\nu-2)-(\nu-1)\cdot(\nu-2)\cdot k_2=$$

$$=\nu\cdot(\nu-1)\cdot k_2 \Rightarrow (\nu-1)\cdot(\nu-2)=$$

$$=[\nu\cdot(\nu-1)+(\nu-1)\cdot(\nu-2)-(\nu-2)]\cdot k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\nu^2-\nu+\nu^2-3\nu+2-\nu+2]\cdot k_2=\nu^2-3\nu+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\nu^2-5\nu+4)\cdot k_2=\nu^2-3\nu+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2=\frac{\nu^2-3\nu+2}{2\nu^2-5\nu+4},\ \forall \nu\in N\wedge\nu\geq 2$$

Π_3. Ἐκ τοῦ τύπου (II) ἐπιλύοντες ὡς πρὸς k_1 ἔχομεν:

$$\lambda_1=\frac{k_2}{1+k_1k_2-k_1} \Rightarrow \lambda_1+\lambda_1\cdot k_1\cdot k_2-\lambda_1k_1=k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1-k_2=k_1\cdot\lambda_1\cdot(1-k_2) \Rightarrow k_1=\frac{\lambda_1-k_2}{\lambda_1\cdot(1-k_2)} \Rightarrow \lambda_1>k_2$$

Π_4. Ἐὰν A_0 εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ τότε ἔχομεν:

$$\frac{AA_0}{A_0B_1}=\frac{AB}{BB_1}\Rightarrow\frac{AA_0}{AA_0+A_0B_1}=\frac{AB}{BB_1+AB}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(AA_0)}{(AB_1)}=\frac{\gamma}{\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta+\gamma}+\gamma}\Rightarrow\lambda_1=\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\lambda_1=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\quad (1)$$

Ἐπίσης $\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{BB_1}}=\frac{\beta}{\gamma}\Rightarrow\frac{|\overline{B_1\Gamma}|}{|\overline{BB_1}|+|\overline{B_1\Gamma}|}=\frac{\beta}{\beta+\gamma}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{(B_1\Gamma)}{(B\Gamma)}=\frac{\beta}{\beta+\gamma}\Rightarrow k_1=\frac{\beta}{\beta+\gamma}\Rightarrow 1-k_1=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\quad(2)$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν (1) καὶ (2) ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$(A_0BB_1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\cdot E=\frac{1}{2}\cdot\frac{E}{\tau}\cdot\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta+\gamma}=$$

$=\frac{\rho\cdot\alpha\cdot\gamma}{2\cdot(\beta+\gamma)}$ καθ' ὅσον $E=\rho\cdot\tau$ καὶ $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$

Εἰδικὰς περιπτώσεις τῆς Π_3 ἔχομεν ὅταν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὅταν εἶναι ἰσόπλευρον.

Π. χ. εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν $\beta=\gamma$ ἔχομεν:

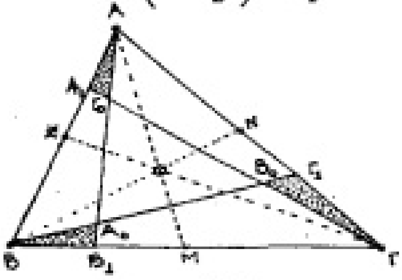
$$(A_0BB_1)=\frac{\alpha\cdot E}{2\cdot(\alpha+2\gamma)}$$

εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν $\alpha=\beta=\gamma$ τότε ἔχομεν:

$$(A_0BB_1)=\frac{E}{6}$$

Θ_4. *Ἔστω $\Delta=\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ καὶ A_1, B_1, Γ_1 σημεῖα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως, τριγώνου ΑΒΓ, ὥστε $\frac{(B_1\Gamma)}{(B\Gamma)}=\frac{(\Gamma_1A)}{(\Gamma A)}=\frac{(A_1B)}{(AB)}=k$ μὲ $k\in\Delta$. Ἐὰν A_0, B_0, Γ_0 εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ζευγῶν τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων $(AB_1, B\Gamma_1), (B\Gamma_1, \Gamma A_1), (\Gamma A_1, AB_1)$ ἀντιστοίχως καὶ E_0 τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $A_0B_0\Gamma_0$, δείξατε ὅτι:*

$$E_0=\frac{(2k-1)^2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\cdot E$$



Σχ. 2

A_4. Ἐὰν $k=\frac{1}{2}$ ὁ τύπος ἰσχύει διότι τὸ τρίγωνον $A_0B_0\Gamma_0$ ἐκφυλλίζεται, εἰς σημεῖον ἐμβαδοῦ μηδέν, τότε $E_0=E\frac{0}{\frac{3}{4}}=$ μηδέν.

Ἐὰν ὅμως $k=1$ ὁ τύπος ἰσχύει διότι τὸ τρίγωνον $A_0B_0\Gamma_0$ εἶναι τὸ ΑΒΓ ἐμβαδοῦ:

$$E_0=\frac{(2\cdot1-1)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\cdot E=\frac{1^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\cdot E=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\cdot E=\frac{1}{1}\cdot E=E.$$

Ἔστω τώρα ὅτι $\frac{1}{2}<k<1$, τότε τὰ σημεῖα A_0, B_0, Γ_0 εὑρίσκονται ἀντιστοίχως, ἐντὸς τῶν τριγώνων ΟΒΜ, ΟΓΝ, ΟΑΖ ὅπου Μ, Ν, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ καὶ Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων αὐτοῦ (ἰδὲ σχ. 2).

Κἂν ὀνομάσωμεν λ_1, λ_2, λ_3 τοὺς λόγους $\frac{AA_0}{AB_1}$, $\frac{BB_0}{B\Gamma_1}$, $\frac{\Gamma\Gamma_0}{\Gamma A_1}$ ἀντιστοίχως, τότε λόγῳ τοῦ ὅτι $k_1=k_2=k$ ἐκ τοῦ τύπου (ΙΙ) ἔχομεν:

$$\lambda_1=\frac{k}{k+(1-k)^2}\quad(1).$$

Ἡ τελευταία αὐτὴ σχέσις συνεπάγεται τὰς $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$.

Ἀλλὰ ὅμως $(ABB_1)+(B\Gamma\Gamma_1)+(\Gamma AA_1)=$

$$=(ABB_1)+(A_0B_1\Gamma\Gamma_1)+(\Gamma_1B_0\Gamma_0A)+(A_0BB_1)+$$

$$+(B_0\Gamma\Gamma_1)+(\Gamma_0AA_1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot(ABB_1)=E_x+3\cdot E\cdot(1-\lambda)\cdot(1-k)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_x=3\cdot(ABB_1)-3\cdot E\cdot(1-\lambda)(1-k)\quad(2).$$

Ὅπου $E_x=(ABB_1)+(B_1A_0\Gamma_1\Gamma)+(\Gamma_1B_0\Gamma_0A)$.

Ἀλλὰ $(ABB_1)=(1-k)\cdot E$ (3). Ἄρα ἡ σχέσις (2) λόγῳ τῆς (3) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$E_x=3\cdot(1-k)\cdot E\cdot[1-(1-\lambda)]\Rightarrow E_x=3\cdot\lambda\cdot(1-k)\cdot E$ (4).

Ἀλλὰ $E_0=E-E_x\Rightarrow E_0=E\cdot[1-3\cdot\lambda\cdot(1-k)]$ (5).

Ἐπίσης ὁ τύπος (5) λόγῳ τῆς σχέσεως (1) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$E_0=E\cdot\left[1-\frac{3k\cdot(1-k)}{k+(1-k)^2}\right]=$$

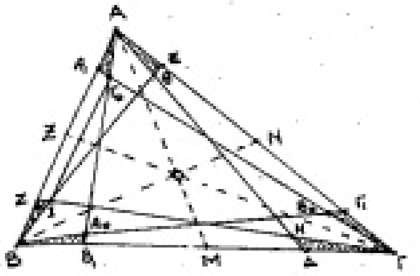
$$=E\cdot\frac{k+1+k^2-2k-3k+3k^2}{k+1+k^2-2k}=\frac{4k^2-4k+1}{k^2-k+1}\cdot E\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0=\frac{(2k-1)^2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\cdot E\quad(IV),$$

τὸν τύπον (IV) τὸν δεχόμεθα ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$E_0=\frac{4k^2-4k+1}{k^2-k+1}\cdot E.$$

Θ_5. *Ἐὰν Δ, E, Z τὰ συμμετρικὰ τῶν B_1, Γ_1, A_1 ὡς πρὸς τὰ μέσα M, N, Ξ τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ἀντιστοίχως τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, δείξατε ὅτι: τὰ σημεῖα τομῆς τῶν $A\Delta$, BE, ΓZ ἀνὰ δύο ὁρίζουν τρίγωνον ἰσεμβαδικὸν τοῦ τριγώνου $A_0B_0\Gamma_0$.*



Σχ. 3

A_5. Ἔστω Η, Θ, Ι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ἀνὰ δύο.

Ἀφοῦ τὰ Δ, Ε, Ζ εἶναι συμμετρικὰ τῶν B_1, Γ_1, A_1 ὡς πρὸς τὰ μέσα Μ, Ν, Ξ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως θὰ εἶναι:

$$\frac{\Delta B}{\Gamma B} = \frac{ZA}{BA} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma} = k, \text{ ὅπου } k \in [1/2, 1]$$

Ἀποδεικνύεται ἐπίσης ὅτι:

$$(H\Delta\Gamma) = (1-k)\cdot(1-\lambda)\cdot E, \text{ ὅπου } \frac{AH}{A\Delta} = \lambda$$

Ἀποδεικνύεται ἐπίσης ὅτι:

$$\lambda = \frac{k}{k+(1-k)^2}$$

Ὥστε τελικῶς ἔχομεν:

$$(H\Theta I) = \frac{(2k-1)^2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \cdot E$$

Π_4. Λόγῳ τοῦ ὅτι:

$$\Gamma I / \Gamma Z = \frac{k}{k+(1-k)^2} \wedge \Gamma\Gamma_0 / \Gamma A_1 = \frac{k}{k+(1-k)^2}$$

ἔχομεν ὅτι:

Ὁ φορεὺς τοῦ $\Gamma_0 I$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν τοῦ ΑΒ.

Θ_6. Εὕρετε ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ $A_0B_0\Gamma_0$ συναρτήσει τῶν κ, α, β, γ.

A_6. Τὰ τρίγωνα $A_0BB_1 \wedge \Gamma_1 B\Gamma$ ἔχουν μίαν γωνίαν κοινὴν ἄρα:

$$\frac{(A_0BB_1)}{(\Gamma_1B\Gamma)} = \frac{(BA_0)\cdot(BB_1)}{(B\Gamma_1)\cdot(B\Gamma)} \Rightarrow \frac{E\cdot(1-k)\cdot(1-\lambda)}{E\cdot(1-k)} =$$

$$= \frac{(BA_0)}{(B\Gamma_1)}\cdot(1-k) \Rightarrow (BA_0) = (1-k)\frac{(B\Gamma_1)}{k+(1-k)^2} \quad (1).$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σχέσεως (1) ἔχομεν:

$$(A_0\Gamma_1) = (B\Gamma_1) - (BA_0) = (B\Gamma_1)\left[1 - \frac{1-k}{k+(1-k)^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(A_0\Gamma_1)}{(B\Gamma_1)} = \frac{k^2}{k+(1-k_1)^2} \,(2).$$

Ἐπίσης θὰ τρίγωνα $\Gamma_1B_0\Gamma$ καὶ $\Gamma_1B\Gamma$ ἔχουν μίαν γωνίαν κοινὴν καὶ ἔχουμε:

$$\frac{(\Gamma_1B_0\Gamma)}{(\Gamma_1B\Gamma)} = \frac{(\Gamma_1B_0)}{(B\Gamma_1)} \Rightarrow \frac{(B_0\Gamma_1)}{(B\Gamma_1)} = \frac{(1-k)^2}{k+(1-k)^2} \quad (3).$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (2), (3) ἔχουμε:

$$(A_0B_0) = \frac{2k-1}{k+(1-k)^2}\cdot(B\Gamma_1) \quad (4).$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Stewart ἔχομεν:

$$(B\Gamma_1)^2\cdot(A\Gamma) + (A\Gamma)\cdot(A\Gamma_1)\cdot(\Gamma\Gamma_1) = (\Gamma\Gamma_1)\cdot\gamma^2 + (A\Gamma_1)\cdot\alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (B\Gamma_1)^2\cdot\beta + \beta\cdot k\cdot\beta\cdot(1-k)\cdot\beta = (1-k)\cdot\beta\,\gamma^2 + k\cdot\beta\cdot\alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (B\Gamma_1)^2 = k\cdot\alpha^2 + \gamma^2 - k\cdot\gamma^2 - k\cdot\beta^2 + k\cdot\beta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (B\Gamma_1)^2 = k^2\cdot\beta^2 - (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\cdot k + \gamma^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (B\Gamma_1) = \sqrt{k^2\cdot\beta^2 - (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\cdot k + \gamma^2} \quad (5).$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (4), (5) ἔχουμε:

$$(A_0B_0) = \frac{2k-1}{k+(1-k)^2}\cdot\sqrt{k^2\cdot\beta^2 - (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)k + \gamma^2}$$

Ὁμοίως διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς λαμβάνομεν

$$(B_0\Gamma_0) = \frac{2k-1}{k+(1-k)^2}\cdot\sqrt{k^2\cdot\gamma^2 - (\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)k + \alpha^2} \qquad \text{(V)}$$

$$(\Gamma_0A_0) = \frac{2k-1}{k+(1-k)^2}\cdot\sqrt{k^2\cdot\alpha^2 - (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)k + \beta^2}$$

Θ_7. *Εὕρετε τὰς πλευρὰς τοῦ $HI\Theta$ συναρτήσει τῶν k, α, β, γ.*

A_7. Ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκομε: $(HI) = \frac{2k-1}{k+(1-k)^2}\cdot(\Gamma Z) \quad (1).$

Ἐπίσης εὑρίσκομεν:

$$(\Gamma Z) = \sqrt{\gamma^2\cdot k^2 - (\gamma^2+\beta^2-\alpha^2)k + \beta^2} \quad (2).$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1), (2) συνάγεται:

$$(HI) = \frac{2k-1}{k+(1-k)^2}\cdot\sqrt{\gamma^2\cdot k^2 - (\gamma^2+\beta^2-\alpha^2)k + \beta^2}$$

$$(I\Theta) = \frac{2k-1}{k+(1-k)^2}\cdot\sqrt{\beta^2\cdot k^2 - (\beta^2+\alpha^2-\gamma^2)k + \alpha^2} \qquad \text{(VI)}$$

$$(H\Theta) = \frac{2k-1}{k+(1-k)^2}\cdot\sqrt{\alpha^2\cdot k^2 - (\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)k + \gamma^2}$$

Π_5. Ἑκάστη ὑπόρριζος ποσότης τῶν τύπων (V), (VI) εἶναι τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς k. Ἔστω D ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου:

$$\beta^2\cdot k^2 - (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)k + \gamma^2,$$

τότε $\quad D = (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2 - 4\beta^2\gamma^2 =$

$$= (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+2\beta\gamma)\cdot(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2-2\beta\gamma) =$$
$$= [(\beta+\gamma)^2-\alpha^2]\cdot[(\beta-\gamma)^2-\alpha^2] =$$
$$= (\beta+\gamma+\alpha)\cdot(\beta+\gamma-\alpha)\cdot(\beta-\gamma+\alpha)\cdot(\beta-\gamma-\alpha)<0.$$

Τὸ τριώνυμον τὸ ὑπὸ τὸ ριζικὸν εὑρισκόμενον εἶναι πάντοτε θετικὸν $\forall k$.

Π_8. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα $A_0B_0\Gamma_0$ καὶ ΗΘΙ εἶναι ἴσα, τότε πρέπει αἱ πλευραὶ τοῦ πρώτου νὰ εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ δευτέρου.

Δηλαδὴ κάποια ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ $A_0B_0\Gamma_0$ — ἔστω ἡ A_0B_0 — ἰσοῦται πρὸς μίαν τῶν τοῦ ΗΘΙ — ἔστω τὴν ΘΗ —.

Ἐὰν $(A_0B_0) = (\Theta H)$ πρέπει:

$$k^2\cdot\beta^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\cdot k+\gamma^2 =$$
$$= \alpha^2\cdot k^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta)\cdot k+\gamma^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\beta^2-\alpha^2)\cdot k^2-2(\beta^2-\alpha^2)\cdot k = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k(k-2)\cdot(\beta^2-\alpha^2) = 0 \Rightarrow \beta=\alpha$$

καθ' ὅσον εἶναι $k(k-2)\neq 0$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως κατὰ τὴν ὁποίαν $\beta=\alpha$ ἔχομεν:

$$(B_0\Gamma_0) = (HI) = \sqrt{\gamma^2\cdot k^2-\gamma^2\cdot k+\alpha^2}\cdot\frac{2k-1}{k+(1-k)^2}$$

$$(\Gamma_0A_0) = (I\Theta) = \sqrt{\alpha^2\cdot k^2-(2\alpha^2-\gamma^2)\,k+\alpha^2}\cdot\frac{2k-1}{k+(1-k)^2}$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν καὶ τὰς $\beta=\gamma \veebar \gamma=\alpha$ ὥστε ἔχομεν:

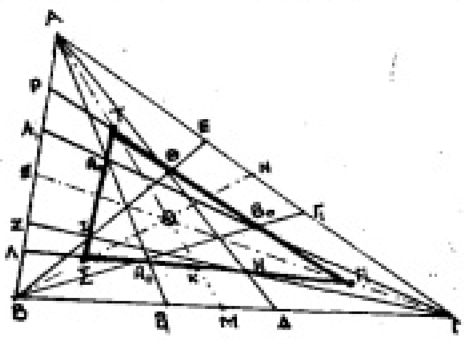
«Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τὰ τρίγωνα $A_0B_0\Gamma_0$ καὶ ΗΘΙ εἶναι ἴσα εἶναι τὸ ΑΒΓ νὰ εἶναι ἰσοσκελές».

«Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν $\alpha=\beta=\gamma$ διὰ τὸ ΑΒΓ συνάγεται ὅτι:

$$(A_0B_0) = (B_0\Gamma_0) = (\Gamma_0A_0) = (H\Theta) = (\Theta I) = (IH) =$$
$$\frac{2k-1}{k+(1-k)^2}\cdot\sqrt{k^2\cdot\alpha^2-k\alpha^2+\alpha^2}$$

καὶ ἀντιστρόφως».

Θ_8. *Ἐὰν Π εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν A_0H καὶ ΘB_0 νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΓΠ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ* «ἰδὲ σχ. 4».



Σχ. 4

A_8. Ὡς γνωστὸν «ἰδὲ Π_4» ὁ φορεὺς τοῦ HA_0 εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν τῆς ΒΓ καὶ ὁ τοῦ ΘB_0 παράλληλος πρὸς τὸν τῆς ΑΓ.

Ἔστω ὅτι αἱ HA_0, ΓΠ, $B_0\Theta$ τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ Λ, Ξ, Ρ. Ἐπειδή:

$$\frac{(AA_0)}{(AB_1)} = \frac{(B\Theta)}{(BE)} = \lambda,$$

θὰ εἶναι καί:

$$\frac{(A\Lambda)}{(AB)} = \frac{(BP)}{(AB)} \Rightarrow \frac{(AP)}{(AB)}+\frac{(P\Lambda)}{(AB)} = \frac{(B\Lambda)}{(AB)}+\frac{(\Lambda P)}{(AB)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(AP)}{(AB)} = \frac{(B\Lambda)}{(AB)} \Rightarrow (AP) = (B\Lambda) \quad (1).$$

Ἐπίσης ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$\frac{(AP)}{(\Gamma\Pi)} = \frac{(P\Xi)}{(\Pi\Xi)} \quad (2), \qquad \frac{(B\Lambda)}{(\Gamma\Pi)} = \frac{(\Lambda\Xi)}{(\Pi\Xi)} \quad (3).$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1), (2), (3) ἔχομεν $(P\Xi=\Lambda\Xi)$. Ἄρα τὸ Ξ εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

«Ὥστε ἐὰν Π, Σ, Τ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν A_0H, $B_0\Theta$, Γ_0I, τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΠΣΤ ἔχουν τὸ αὐτὸ βαρύκεντρον».

Θ_9. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΠΣΤ συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ λόγου k.*

A_9. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΤΣΠ εἶναι ὅμοια, πρὸς τούτοις ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ὡς γνωστὸν (ἰδὲ σχ. 4) $\dfrac{(AA_0)}{(AB_1)} = \dfrac{(AK)}{(AM)} = \lambda = \dfrac{k}{k+(1-k)^2}$, ὅπου Κ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΑΜ καὶ τῆς A_0H.

Ὥστε λοιπὸν $\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\mu_\alpha+x}{\mu_\alpha} = \lambda$, ὅπου $(OK)=x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{\mu_\alpha}{3}\cdot(3\lambda-2) \Rightarrow \frac{x}{\frac{\mu_\alpha}{3}} = 3\lambda-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(OK)}{(OM)} = \frac{3k}{k+(1-k)^2}-2 = \frac{3k-2[k+(1-k)^2]}{k+(1-k)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(OK)}{(OM)} = \frac{3k-2k-2(1-k)^2}{k+(1-k)^2} =$$

$$= \frac{3k-2k-2(1+k^2-2k)}{k+(1-k)^2} = \frac{3k-2k-2-2k^2+4k}{k+(1-k)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(OK)}{(OM)} = \frac{5k-2k^2-2}{k^2-k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(\Pi\Sigma T)}{E} = \frac{(5k-2k^2-2)^2}{(k^2-k+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\Pi\Sigma T) = \frac{(5k-2k^2-2)^2}{(k^2-k+1)^2}\cdot E \qquad \text{(VII)}$$

Π₇. Ἐὰν $k=\frac{1}{2}$, τότε τὸ (ΠΣΤ) ἐκφυλλίζεται εἰς σημεῖον καὶ ἔχει ἐμβαδόν:

$$(\Pi\Sigma T)=E\cdot\frac{\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{4}-2\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=$$

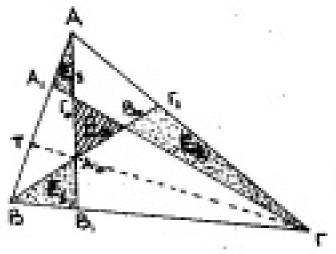
$$=E\cdot\frac{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-2\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=E\cdot\frac{0}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\text{μηδέν}.$$

Θ₁₀. *Ἔστω* $\Delta=]0,1[\ \wedge\ (k_1,k_2,k_3)\in\Delta^3\ \wedge$ B_1, Γ_1, A_1 *σημεῖα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως, ὥστε:* $k_1=\frac{(B_1\Gamma)}{(B\Gamma)}$, $k_2=\frac{(\Gamma_1A)}{(\Gamma A)}$, $k_3=\frac{(A_1B)}{(AB)}$. *Ἐὰν* A_0, B_0, Γ_0 *εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ζευγῶν τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων* $(AB_1, B\Gamma_1)$; $(B\Gamma_1, \Gamma A_1)$, $(\Gamma A_1, AB_1)$ *καὶ* E_0 *τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου* $A_0B_0\Gamma_0$, *εὕρετε τὸ* E_0 *συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τῶν* k_1, k_2, k_3.

Α₁₀. Ἔστω A_0 τὸ σημεῖον τομῆς τῶν AB_1 καὶ $B\Gamma_1$, ἄγομεν τὴν ΓA_0 ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Τ, τότε τὸ A_1 θὰ εἶναι: α΄) μεταξὺ τῶν Α καὶ Τ, β΄) μεταξὺ τῶν Β, Τ, γ΄) $A_1\equiv T$.

Ἐὰν $A_1\equiv T$ τότε $E_0=$ μηδέν. Ἔστω τώρα

α) Ὀνομάζομεν E_0, E_1, E_2, E_3 τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων $A_0B_0\Gamma_0$, A_0BB_1, $B_0\Gamma\Gamma_1$, Γ_0AA_1 ἀντιστοίχως.



Σχ. 5

Ὡς γνωστὸν ἐκ τοῦ τύπου (ΙΙΙ) ἔχομεν:

$$E_1=\frac{(1-k_1)^2\cdot(1-k_2)}{k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)}\cdot E,$$

$$E_2=\frac{(1-k_2)^2\cdot(1-k_3)}{k_3+(1-k_2)\cdot(1-k_3)}\cdot E,$$

$$E_3=\frac{(1-k_3)^2\cdot(1-k_1)}{k_1+(1-k_3)\cdot(1-k_1)}\cdot E.$$

Ἀλλὰ ὅμως εἶναι:

$$(ABB_1)+(\Gamma B\Gamma_1)+(\Gamma AA_1)=$$

$$=(ABB_1)+(A_0B_1\Gamma\Gamma_1)+(\Gamma_1B_0\Gamma_0A)+E_1+E_2+E_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\cdot\frac{(BB_1)}{(B\Gamma)}+E\cdot\frac{(\Gamma\Gamma_1)}{(\Gamma A)}+E\cdot\frac{(AA_1)}{(AB)}=$$

$$=E-E_0+E_1+E_2+E_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\cdot(1-k_1)+E\cdot(1-k_2)+E\cdot(1-k_3)=$$

$$=E-E_0+E_1+E_2+E_3\Rightarrow[3-(k_1+k_2+k_3)]\cdot E=$$

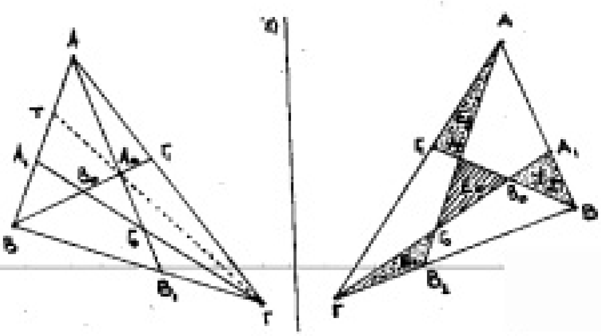
$$=E-E_0+E\cdot\left[\frac{(1-k_1)^2\cdot(1-k_2)}{k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-k_2)^2\cdot(1-k_3)}{k_3+(1-k_2)\cdot(1-k_3)}+\frac{(1-k_3)^2\cdot(1-k_1)}{k_1+(1-k_3)\cdot(1-k_1)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0=[R+(k_1+k_2+k_3)-2]\cdot E\qquad(\text{VIII})$$

ὅπου $R=\frac{(1-k_1)^2\cdot(1-k_2)}{k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)}+$

$$+\frac{(1-k_2)^2\cdot(1-k_3)}{k_3+(1-k_2)\cdot(1-k_3)}+\frac{(1-k_3)^2\cdot(1-k_1)}{k_1+(1-k_3)\cdot(1-k_1)}.$$



Σχ. 6

β) Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀναστρέφομεν τὸ τρίγωνον τῇ βοηθείᾳ μιᾶς ἀξονικῆς συμμετρίας «ἰδὲ δεξιὰ εὐθείας (ε), σχ. 6» καὶ ἀνάγομεν τὴν μελέτην β) εἰς τὴν α) μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι:

$$(B_1B)\,/\,(\Gamma B)=R_1,\ (A_1A)\,/\,(BA)=$$

$$=R_2,\ (\Gamma_1\Gamma)\,/\,(A\Gamma)=R_3\ \text{ μὲ}$$

$$R_1=(1-k_1),\ R_2=(1-k_3),\ R_3=(1-k_2)$$

ὅπως εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν:

$$E_0=[R+(R_1+R_2+R_3)-2]\cdot E\qquad(\text{IX})$$

ὅπου $R=\frac{(1-R_1)^2\cdot(1-R_2)}{R_2+(1-R_1)\cdot(1-R_2)}+$

$$+\frac{(1-R_2)^2\cdot(1-R_3)}{R_3+(1-R_2)\cdot(1-R_3)}+\frac{(1-R_3)^2\cdot(1-R_1)}{R_1+(1-R_3)\cdot(1-R_1)}.$$

Ἀλλὰ $R=\frac{k_1^2\cdot k_3}{1-k_3+k_1\cdot k_3}+\frac{k_3^2\cdot k_2}{1-k_2+k_3\cdot k_2}+$

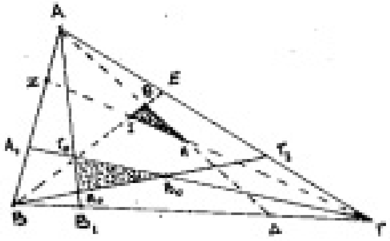
$+\frac{k_2^2\cdot k_1}{1-k_1+k_2\cdot k_1}$, λόγῳ τοῦ ὅτι $1-R_1=k_1$ $1-R_2=k_3$, $1-R_3=k_2$. Ὁπότε ὁ τύπος γίνεται:

$$E_0=[R+1-(k_1+k_2+k_3)]\cdot E\qquad(\text{IX}).$$

ὅπου $R=\frac{k_1^2\cdot k_3}{1-k_3+k_1\cdot k_3}+\frac{k_3^2\cdot k_2}{1-k_2+k_3\cdot k_2}+$

$$+\frac{k_2^2\cdot k_1}{1-k_1+k_2\cdot k_1}.$$

Π_9. Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τῶν B_2, Γ_1, A_2 ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως καὶ Η, Θ, Ι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ζευγῶν τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων (ΑΔ, ΓΖ), (ΒΕ, ΑΔ), (ΓΖ, ΒΕ) ἀντιστοίχως, εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν E_x τοῦ ΗΘΙ συναρτήσει τοῦ Ε καὶ τῶν k_1, k_2, k_3.



Σχ. 7

α') Ἐὰν $c_1=\frac{(AB)}{(\Gamma B)}$, $c_2=\frac{(ZA)}{(BA)}$, $c_3=\frac{(E\Gamma)}{(A\Gamma)}$, τότε εὐκόλως φαίνεται ὅτι: $c_1=k_1$, $c_2=k_2$, $c_3=k_3$ (1).

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ E_x συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τῶν k_1, k_2, k_3 ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (VIII) καὶ ἔχομεν:

$$E_x=[R+(c_1+c_2+c_3)-2]\cdot E:$$

$$R=\frac{(1-c_1)^2\cdot(1-c_2)}{c_2+(1-c_1)\cdot(1-c_2)}+\frac{(1-c_2)^2\cdot(1-c_3)}{(1-c_3)(1-c_2)+c_3}+$$

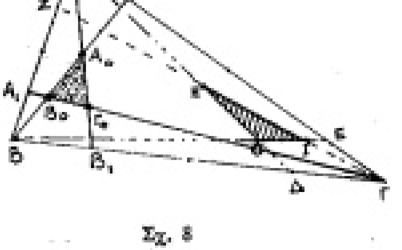
$$+\frac{(1-c_3)^2\cdot(1-c_1)}{c_1+(1-c_3)\cdot(1-c_1)}$$

καὶ ἐὰν ἐπανέλθωμεν εἰς τὰ k_1, k_2, k_3 λόγῳ τῶν (1) ἔχομεν:

$$E_x=[R+(k_1+k_2+k_3)-2]\cdot E \quad (X).$$

ὅπου $R=\frac{(1-k_1)^2\cdot(1-k_2)}{k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)}+\frac{(1-k_2)^2\cdot(1-k_3)}{k_3+(1-k_2)\cdot(1-k_3)}$

$$+\frac{(1-k_3)^2\cdot(1-k_1)}{k_1+(1-k_3)\cdot(1-k_1)}$$



Σχ. 8

β) Ἐὰν $c_1=\frac{(\Delta\Gamma)}{(B\Gamma)}$, $c_2=\frac{(EA)}{(\Gamma A)}$, $c_3=\frac{(ZB)}{(AB)}$

τότε εὐκόλως φαίνεται ὅτι:

$$c_1=1-k_1 \Leftrightarrow k_1=1-c_1,\ c_2=1-k_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_2=1-c_2,\ c_3=1-k_3 \Leftrightarrow k_3=1-c_3$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τοῦ E_x συναρτήσει τοῦ Ε καὶ τῶν k_1, k_2, k_3 ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (VIII) καὶ ἔχομεν:

$$E_x=[R+(c_1+c_2+c_3)-2]\cdot E:\ R=$$

$$=\frac{(1-c_1)^2\cdot(1-c_2)}{c_1+(1-c_1)\cdot(1-c_2)}+\frac{(1-{}_2)^2\cdot(1-c_3)}{c_3+(1-c_2)\cdot(1-c_3)}+$$

$$+\frac{(1-c_3)^2\cdot(1-c_1)}{c_1+(1-c_3)\cdot(1-c_1)}.$$

καὶ ἐὰν ἐπανέλθωμεν εἰς k_1, k_2, k_3 λόγῳ τῶν (1) θὰ ἔχωμεν:

$$E_x=[R+1-(k_1+k_2+k_3)]\cdot E \quad (XI).$$

ὅπου:

$$R=\frac{k_1^2\cdot k_2}{1-k_2+k_1\cdot k_2}+\frac{k_2^2\cdot k_3}{1-k_3+k_2\cdot k_3}+\frac{k_3^2\cdot k_1}{1-k_1+k_3\cdot k_1}.$$

Π_9. Τὰ ζεύγη τῶν τύπων (VIII, X) καὶ (IX, XI) ταυτίζουν τὰ E_0 καὶ E_x εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν $k_1=k_2 \vee k_2=k_3 \vee k_1$ καὶ ἀντιστρόφως.

Ὥστε ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα $E_0=E_x$, εἶναι ἡ πρότασις p νὰ εἶναι ἀληθής:

$$«p: k_2=k_3 \vee k_3=k_1 \vee k_1=k_2»$$

Π_{10}. Ἐὰν $E_0=$ μηδὲν τότε:

α)

$$\frac{(1-k_1)^2\cdot(1-k_2)}{k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)}+\frac{(1-k_2)^2\cdot(1-k_3)}{k_3+(1-k_2)\cdot(1-k_3)}+$$

$$+\frac{(1-k_3)^2\cdot(1-k_1)}{k_1+(1-k_3)\cdot(1-k_1)}=2-(k_1+k_2+k_3)$$

καὶ ἀντιστρόφως.

β)

$$\frac{k_1^2\cdot k_3}{1-k_3+k_1\cdot k_3}+\frac{k_3^2\cdot k_2}{1-k_2+k_3\cdot k_2}+$$

$$+\frac{k_2^2\cdot k_1}{1-k_1+k_2\cdot k_1}=k_1+k_2+k_3-1$$

καὶ ἀντιστρόφως:

(XII)

Ἐὰν $E_x=$ μηδὲν τότε:

α)

$$\frac{(1-k_1)^2\cdot(1-k_3)}{k_3+(1-k_1)\cdot(1-k_3)}+\frac{(1-k_3)^2\cdot(1-k_2)}{k_2+(1-k_3)\cdot(1-k_2)}+$$

$$+\frac{(1-k_2)^2\cdot(1-k_1)}{k_1+(1-k_2)\cdot(1-{}_1)}=2-(k_1+k_2+k_3$$

καὶ ἀντιστρόφως.

β)

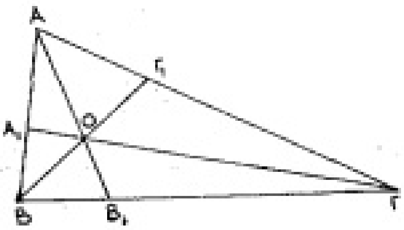
$$\frac{k_1^2\cdot k_2}{1-k_2+k_1\cdot k_2}+\frac{k_2^2\cdot k_3}{1-k_3+k_2\cdot k_3}+$$

$$+\frac{k_3^2\cdot k_1}{1-k_1+k_3\cdot k_1}=k_1+k_2+k_3-1$$

Ἑκάστη τῶν σχέσεων (XII) ἀποτελεῖ τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB_1, $B\Gamma_1$, $A_1\Gamma$ ἢ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ συγκλίνουν.

Θ_{11}. *Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁριζόμεναι ἐκ τῶν ζευγῶν τῶν σημείων (A, B_1), (B, Γ_1), (Γ, A_1) συγκλίνουν, εἶναι:*

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = (1-k_1)\cdot(1-k_2)\cdot(1-k_3).$$



Σχ. 9

A_{11}. Ἐκ τοῦ τύπου (II) ἔχομεν:

$$\lambda_1 = \frac{k_2}{k_2+(1-k_2)\cdot(1-k_1)} \quad (1).$$

Ἐπίσης δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ αὐτοῦ τύπου ἔχομεν:

$$\lambda_1 = \frac{1-k_3}{1-k_3+k_3\cdot k_1} \quad (2).$$

Αἱ σχέσεις (1), (2) ἰσχύουν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ εὐθεῖαι συμβάλλουν.

Ἐκ τῶν (1), (2) συνάγεται ὅτι:

$$\frac{k_2}{k_2+(1-k_2)\cdot(1-k_1)} = \frac{1-k_3}{1-k_3+k_3\cdot k_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2\cdot(1-k_3+k_3 k_1) =$$
$$= (1-k_3)\cdot(k_2+1-k_1-k_2+k_1\cdot k_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k_2\cdot(1-k_3)+k_1\cdot k_2\cdot k_3 =$$
$$= (1-k_3)\cdot k_2+(1-k_1)\cdot(1-k_2)\cdot(1-k_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k_1\cdot k_2\cdot k_3 = (1-k_1)\cdot(1-k_2)\,(1-k_3) \qquad \text{(XIII)}$$

Ὥστε ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία, τὸ ἱκανὸν ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Π_{10}. Ὁ τύπος (XIII) εἶναι μία ἄλλη ἔκφρασις τοῦ Θεωρήματος τοῦ Ceva.

ΚΡΙΣΕΙΣ, ΣΧΟΛΙΑ, ΕΙΔΗΣΕΙΣ

συνέχεια ἀπό σελ. 5

Εὔχομαι ὅμως καὶ πιστεύω, ὅτι θὰ εἶναι πολύτιμα βοηθήματα εἰς τοὺς προστρέχοντας εἰς αὐτὰ μελετητάς.

Κύριε Πρόεδρε, θέτων εἰς τὴν διάθεσιν τῆς Ε.Μ.Ε. τὰ εἰς τὸν συνημμένον κατάλογον βιβλία μου, περαίνω τὴν ἐπιστολήν μου, μὲ τὴν ἔκφρασιν αἰσθημάτων εὐγνωμοσύνης καὶ βαθυτάτης ἐκτιμήσεως, διὰ τὴν προσωπικὴ Σας πολυετῆ καὶ πολύτιμη προσφορὰ εἰς τὴν προαγωγὴν τῶν σκοπῶν, ποὺ ἔταξαν οἱ ἀείμνηστοι ἱδρυταὶ τῆς Ε.Μ.Ε. καὶ σοφοὶ καθηγηταί μας.

Μετὰ πλείστης τιμῆς καὶ συναδελφικῶν χαιρετισμῶν

Ὅλως ὑμέτερος — Γ. Μαλάκης

Ἐν συνεχείᾳ τῆς ἐπιστολῆς του αὐτῆς παρελήφθησαν 64 τόμοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχονται πολλὰ κλασσικὰ συγγράμματα (Χατζηδάκης, Picard, Conrsat, Bertrand, κ.λ.π.). Εἰλικρινὰ συγκινημένοι εὐχαριστοῦμεν θερμῶς τὸν κ. Μαλάκην εἴμεθα δὲ βέβαιοι ὅτι μὲ τέτοια μέλη ἡ Ε.Μ.Ε. θὰ γίνῃ σύντομα ὁ οὐσιαστικώτερος παράγων τῆς ἐκπαιδευτικῆς καὶ ἐπιστημονικῆς μας ζωῆς.

Ὁ Καθηγητὴς κ. Σ. Ζερβὸς

Τὴν Τετάρτην 9-4-75 ὡμίλησεν εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς Ε.Μ.Ε., ἐνώπιον πυκνοῦ ἀκροατηρίου, ὁ Καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ. Σ. Ζερβὸς μὲ θέμα «Τὸ ἔγκλημα τῶν Σχολικῶν βιβλίων». Ἐλπίζουμε ὅτι ἡ ὁμιλία του θὰ δημοσιευθῇ σύντομα στὸ ἕνα ἀπὸ τὰ προσεχῆ τεύχη τοῦ «Εὐκλείδου» διὰ νὰ δοθῇ ὅλοι οἱ συνάδελφοι καὶ οἱ ἐνδιαφερόμενοι μία τίμια καὶ ὑπεύθυνο θέση διὰ τὸ φλέγον πρόβλημα τῶν σχολικῶν βιβλίων μας.

Ἡ Μαθηματικὴ Ἑταιρεία πιστεύει εἰλικρινὰ ὅτι ἄνθρωποι σὰν τὸν κ. Σ. Ζερβὸν δὲν πρέπει νὰ ἀπουσιάζουν ἀπὸ τὴν δράση καὶ τὴν ἡγεσίαν τῆς Ἑταιρείας μας.

„Ὁ Εὐκλείδης„ εὔχεται στοὺς φίλους του μαθητὰς καλὲς διακοπὲς