Author: Άγνωστος Συγγραφέας

Title: Ασκήσεις δια την α΄ τάξιν-

Creator: HDML

ασκησεις δια την α΄ ταξιν

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ. Α.31 Νὰ τρέψετε : α) εἰς δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ ἕκαστον τῶν γινομένων $2^4 \cdot 2 \cdot 2^6$ καὶ $3^4 \cdot 5^4$ β) εἰς δύναμιν τοῦ 3 τὴν δύναμιν 9^4 γ) εἰς δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ τὴν παράστασιν :

$$A = 3^2 \cdot 9 \cdot 5^4 + 11 \cdot (15^2)^2 + 3^5(5^2)^2.$$

Λύσις. α) Ἔχομεν :

$$2^4 \cdot 2 \cdot 2^6 = 2^4 \cdot 2^1 \cdot 2^6 = 2^{4+1+6} = 2^{11}$$

(γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ) καὶ

$$3^4 \cdot 5^4 = (3 \cdot 5)^4 = 15^4$$

(δύναμις γινομένου).

β) Ἔχομεν : $9 = 3^2$, ἄρα $9^4 = (3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$.

γ) $A = 3^2 \cdot 9 \cdot 5^4 + 11 \cdot (15^2)^2 + 3^5 \cdot (5^2)^2 =$

$= 3^2 \cdot 3^2 \, 5^4 + 11 \cdot 15^4 + 3^5 \cdot 5^4$

$= 3^4 \cdot 5^4 + 11 \cdot 15^4 + 3 \cdot 3^4 \cdot 5^4$ (διότι $3^5 = 3 \cdot 3^4$)

$= 15^4 + 11 \cdot 15^4 + 3 \cdot 15^4 = 15^4 \cdot (1+11+3) =$

$= 15^4 \cdot 15 = 15^5$.

Α.32 Νὰ τρέψετε τὸ γινόμενον $4^x \cdot 5^{2x}$ εἰς δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ. Ἂν τὸ γινόμενον τοῦτο ἰσοῦται μὲ 10.000 ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ x ;

Λύσις. Ἐπειδὴ $4 = 2^2$ τὸ δοθὲν γινόμενον γράφεται :

$$4^x \cdot 5^{2x} = (2^2)^x \cdot 5^{2x} = 2^{2x} \cdot 5^{2x} = (2 \cdot 5)^{2x} = 10^{2x}.$$

Ἂν τὸ δοθὲν γινόμενον ἰσοῦται μὲ 10.000, δηλ. 10^4, τότε καὶ $10^{2x} = 10^4$, ἀπὸ ὅπου συνάγεται ὅτι $2 \cdot x = 4$, ἄρα $x = 2$.

Α.33 Νὰ προσδιορίσετε τὰ ψηφία x, y, ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\overline{784xy}$ νὰ εἶναι διαιρετὸς συγχρόνως διὰ τοῦ 9 καὶ διὰ τοῦ 5, ὄχι ὅμως καὶ διὰ τοῦ 2.

Λύσις. Διὰ νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 5 ὄχι ὅμως καὶ διὰ τοῦ 2, πρέπει νὰ λήγει εἰς 5 (ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 5 ὅταν λήγῃ εἰς 5 ἢ 0, ἀλλὰ ὅταν λήγῃ εἰς 0 εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 2), ἄρα $y = 5$. Διὰ νὰ εἶναι δὲ συγχρόνως διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 9 πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9, δηλ. πρέπει :

$$7+8+4+x+5 = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9, \text{ ἢ}$$

$$24+x = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 9.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ x εἶναι ἀκέραιος μονοψήφιος, τὸ $24+x$ θὰ εἶναι μὴ μικρότερον τοῦ 24 καὶ μὴ μεγαλύτερον τοῦ 33 ($=24+9$). Τὸ μόνον δὲ πολλαπλάσιον τοῦ 9 μεταξὺ τοῦ 24 καὶ τοῦ 33 εἶναι τὸ 27. Ἄρα πρέπει $24+x = 27$, ἀπὸ ὅπου $x = 3$.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς εἶναι ὁ 78435.

Α.34 Ἕνα ποσὸν χρημάτων ἐμοιράσθη εἰς 3 ἄτομα. Τὸ α΄ ἔλαβε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ποσοῦ. Τὸ β΄ τὰ $\frac{6}{11}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τὸ γ΄ 400 δρχ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ β΄. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συνολικὸν ποσὸν καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ α΄ ἔλαβε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ποσοῦ, ἀπέμειναν $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ τοῦ ποσοῦ. Ἔτσι τὸ β΄ ἔλαβε τὰ $\frac{6}{11}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τοῦ ποσοῦ, δηλαδὴ $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{11} = \frac{4}{11}$ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ. Τὰ δύο πρῶτα λοιπὸν ἄτομα ἔλαβον μαζὶ

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{11} = \frac{11+12}{33} = \frac{23}{33} \text{ τοῦ ποσοῦ.}$$

Ἔτσι, ἔμειναν διὰ τὸ τρίτον :

$$\frac{33}{33} - \frac{23}{33} = \frac{10}{33} \text{ τοῦ ποσοῦ.}$$

Ἐπειδὴ τὸ ποσὸν τοῦ γ΄ εἶναι κατὰ 400 δρχ. ὀλιγώτερον τοῦ ποσοῦ τοῦ β΄, ἕπεται ὅτι ἡ διαφορά :

$$\frac{4}{11} - \frac{10}{33} = \frac{12-10}{33} = \frac{2}{33}$$

τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ εἶναι 400 δρχ.

Ἄρα τὸ ἀρχικὸν ποσὸν εἶναι 400 δρχ. : $\frac{2}{33}$ = 6600 δρχ.

Ἔτσι, τὸ μερίδιον τοῦ α΄ εἶναι :

$$\frac{1}{3} \cdot 6600 \text{ δρχ.} = 2200 \text{ δρχ.,}$$

$$\text{τοῦ β΄ : } \frac{4}{11} \cdot 6600 \text{ δρχ.} = 2400 \text{ δρχ.,}$$

$$\text{καὶ τοῦ γ΄ : } \frac{10}{33} \cdot 6600 \text{ δρχ. } 2000 \text{ δρχ.}$$

Α.35 Δύο ἄτομα ἔχουν μαζὶ 400 δρχ. Τὸ πρῶτον ἐξοδεύει τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων του καὶ τὸ β΄ τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν ἰδικῶν του καὶ ἔτσι ἀπομένουν 118 δρχ. εἰς αὐτά. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν ἑκάστου.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ α΄ ἄτομον ἐξοδεύει τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων του, ἀπομένει εἰς αὐτὸ τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν χρημάτων του. Ὁμοίως εἰς τὸ β΄ ἀπομένουν τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν χρημάτων του.

Ἑπομένως τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν χρημάτων τοῦ α΄ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ β΄ εἶναι μαζὶ 118 δρχ., δηλ. :

$$\frac{1}{4} \text{ χρημάτων α΄} + \frac{2}{5} \text{ χρημάτων τοῦ β΄} = 118 \text{ δρχ.} \quad (1).$$

Κατὰ τὸ πρόβλημα ὅμως ἔχομεν :

$$\frac{4}{4} \text{ χρημάτων τοῦ α΄} + \frac{5}{5} \text{ χρημάτων τοῦ β} = 400 \text{ δρχ.} \quad (2)$$

Ἂν τετραπλασιασθῇ τὸ ἄθροισμα (1), θὰ ἔχομεν :

$$\frac{4}{4} \text{ τῶν χρημάτων τοῦ α΄} + \frac{8}{5} \text{ τῶν χρημάτων τοῦ β} =$$

$$= 4 \cdot 118 = 472 \text{ δρχ.} \quad (3).$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὸ ἄθροισμα (3) εἶναι ἀνώτερον τοῦ ἀθροίσματος (2) κατὰ $472-400 = 72$ δρχ. καὶ περιέχει τὰ αὐτὰ ἐκ τῶν χρημάτων τοῦ α', ἀλλὰ ἐκ τῶν χρημάτων τοῦ β' περιέχει περισσότερα: τὴν διαφορὰν

$$\frac{8}{5} - \frac{5}{5} = \frac{3}{5}$$

τῶν χρημάτων τοῦ β'.

Εἶναι λοιπὸν ἀνώτερον τοῦ ἀθροίσματος (2) κατὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων τοῦ β'.

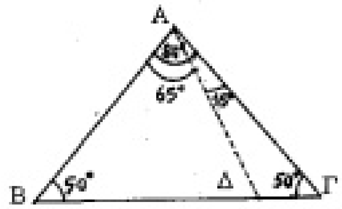
Εἰς δραχμὰς εἶναι, ὡς ἐδείχθη, ἀνώτερον τοῦ (2) κατὰ 72 δρχ.

Ἔχομεν λοιπόν: $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων τοῦ β' = 72 δρχ.

Ἄρα, τὰ χρήματα τοῦ β' εἶναι $72 : \frac{3}{5} = 72 \cdot \frac{5}{3} = 120$ δρ.

Συνεπῶς, τὰ χρήματα τοῦ α' εἶναι $400 - 120 = 280$ δρχ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Α.36 Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ(ΑΒ = = ΑΓ) ἡ γωνία $\widehat{A} = 80^\circ$. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΔ=ΑΒ Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ.



Λύσις. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι 180°. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία τοῦ Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 80°, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ θὰ εἶναι $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ Β = Γ, ὡς παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἕπεται ὅτι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 50^\circ$.

Τὸ ΑΒΔ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελὲς (ΑΒ = ΒΔ) μὲ τὴν $\widehat{B} = 50^\circ$.

Σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$B\widehat{A}\Delta = B\widehat{\Delta}A = 65^\circ \left(\frac{180^\circ - 50^\circ}{2}\right).$$

Ἐπομένως αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εἶναι:

$$\widehat{A} = 65^\circ,\ \widehat{B} = 50 \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Delta} = 65^\circ$$

τοῦ δὲ ΑΔΓ εἶναι:

$$\widehat{A} = 80^\circ - 65^\circ = 15^\circ,\ \widehat{\Gamma} = 50^\circ \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Delta} = 115^\circ\ (180^\circ - 65^\circ).$$

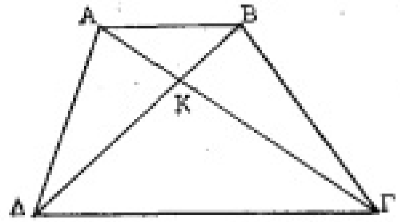
Α 37 Ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου μία γωνία εἶναι ὀρθὴ καὶ αἱ λοιπαὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων, μεταξύ των, γωνιῶν εἶναι 810°, νὰ εὑρεθῇ α) πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον καὶ β) ἡ τιμὴ ἑκάστης τῶν ἴσων γωνιῶν.

Λύσις. Ἐπειδὴ μία γωνία τοῦ πολυγώνου εἶναι ὀρθή, δηλ. 90° καὶ αἱ λοιπαὶ ἔχουν ἄθροισμα 810, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι: $810^\circ + 90^\circ = 900^\circ$, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ $900^\circ : 90^\circ = 10$ ὀρθ.

Ἀλλὰ ἂν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τότε, ὡς γνωστόν, τὸ ἄθροισμά τῶν γωνιῶν του θὰ εἶναι: (2ν—4) ὀρθ. Ἄρα ἔχομεν $2\nu - 4 = 10$, ὁπότε $2\nu = 10 + 4$, δηλ. $2\nu = 14$, ἀπὸ ὅπου $\nu = 7$. Ἄρα τὸ πολύγωνον ἔχει 7 πλευρὲς καὶ συνεπῶς 7 γωνίες. Ἀπὸ αὐτὲς ἡ μία εἶναι ὀρθὴ κατὰ τὸ πρόβλημα. Οἱ ὑπόλοιπες 6 γωνίες εἶναι, κατὰ τὸ πρόβλημα ἴσες καὶ ἔχουν ἄθροισμα 810°. Ἄρα ἡ τιμὴ ἑκάστης εἶναι $810^\circ : 6 = 135^\circ$.

ασκησεις δια την β' ταξιν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Β.30 Δείξατε ὅτι τὰ δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου καὶ βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς αὐτοῦ, εἶναι ἰσοδύναμα.



Λύσις. Ἔστω τραπέζιον ΑΒΓΔ βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ. Ὀνομάζομεν Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του.

Τὸ πρόβλημα εἶναι νὰ δειχθῇ ὅτι:

ἐμβ ΑΚΔ = ἐμβ ΒΚΓ (1).

Ἀλλὰ ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μὲ τήν:

ἐμβ. ΑΚΔ + ἐμβ. ΔΚΓ = ἐμβ. ΒΚΓ + ἐμβ. ΔΚΓ, δηλ.

ἐμβ. ΑΔΓ = ἐμβ. ΒΔΓ (2).

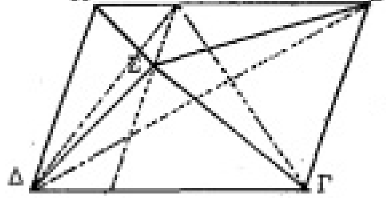
Ἀρκεῖ συνεπῶς νὰ δειχθῇ ὅτι ἀληθεύει ἡ (2).

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΒΔΓ ἔχουν κοινὴν βάσιν ΔΓ καὶ τὴν ἀπέναντι κορυφήν των, τὴν Α τὸ ἕνα καὶ τὴν Β τὸ ἄλλο, ἐπὶ εὐθείας ΑΒ παραλλήλου πρὸς τὴν ΓΔ, ἄρα εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν βάσιν ΔΓ. Ἔχουν λοιπὸν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ἴσα τὰ ἀντίστοιχα ὕψη. Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀληθεύει λοιπὸν ἡ (2) καὶ διὰ τοῦτο ἀληθεύει καὶ ἡ ἰσοδύναμος αὐτῆς ἡ (1).

Β.31 Ἐὰν τυχὸν σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ συνδεθῇ διὰ εὐθυγράμμων τμημάτων μὲ τὰς κορυφάς του, δείξατε ὅτι:

ἐμβ. ΣΑΒ + ἐμβ. ΣΓΔ = ἐμβ. ΣΑΔ + ἐμβ. ΣΒΓ (1).



Λύσις. Εἶναι γνωστὸν ὅτι δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ ἴσα τὰ ἀντίστοιχα πρὸς τὴν βάσιν αὐτὴν ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα. Διὰ τοῦτο, ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς κορυφὴν τὸ καθένα ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν κοινὴν βάσιν, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ ἴσα τὰ ἀντίστοιχα πρὸς αὐτὴν ὕψη, ἐπειδὴ αὐτὰ