Author: Άγνωστος Συγγραφέας

Title: Ασκήσεις δια την β᾽ τάξιν-

Creator: HDML

περιέχει τὰ αὐτὰ ἐκ τῶν χρημάτων τοῦ α', ἀλλὰ ἐκ τῶν χρημάτων τοῦ β' περιέχει περισσότερα : τὴν διαφορὰν

$$\frac{8}{5}-\frac{5}{5}=\frac{3}{5}$$

τῶν χρημάτων τοῦ β'.

Εἶναι λοιπὸν ἀνώτερον τοῦ ἀθροίσματος (2) κατὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων τοῦ β'.

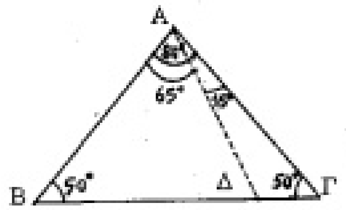
Εἰς δραχμὰς εἶναι, ὡς ἐδείχθη, ἀνώτερον τοῦ (2) κατὰ 72 δρχ.

Ἔχομεν λοιπόν : $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων τοῦ β' = 72 δρχ.

Ἄρα, τὰ χρήματα τοῦ β' εἶναι $72 : \frac{3}{5} = 72 \cdot \frac{5}{3} = 120$ δρ.

Συνεπῶς, τὰ χρήματα τοῦ α' εἶναι $400-120 = 280$ δρχ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Α.36 Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ(ΑΒ = = ΑΓ) ἡ γωνία $\widehat{A} = 80^\circ$. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΔ=ΑΒ Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ.



Λύσις. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι 180°. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία τοῦ Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 80°, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ θὰ εἶναι $180^\circ-80^\circ = 100^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ Β = Γ, ὡς παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἕπεται ὅτι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 50^\circ$.

Τὸ ΑΒΔ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελὲς (ΑΒ = ΒΔ) μὲ τὴν $\widehat{B} = 50^\circ$.

Σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$B\widehat{A}\Delta = B\widehat{\Delta}A = 65^\circ \left(\frac{180^\circ-50^\circ}{2}\right).$$

Ἑπομένως αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εἶναι :

$$\widehat{A} = 65^\circ,\ \widehat{B} = 50 \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Delta} = 65^\circ$$

τοῦ δὲ ΑΔΓ εἶναι :

$$\widehat{A} = 80^\circ-65^\circ = 15^\circ,\ \ \widehat{\Gamma} = 50^\circ \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Delta} = 115^\circ\ (180^\circ-65^\circ).$$

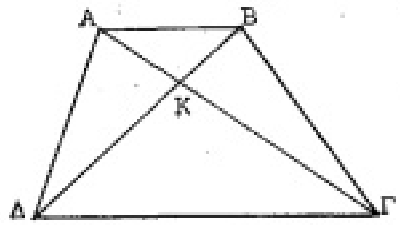
Α 37 Ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου μία γωνία εἶναι ὀρθὴ καὶ αἱ λοιπαὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων, μεταξύ των, γωνιῶν εἶναι 810°, νὰ εὑρεθῇ α) πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον καὶ β) ἡ τιμὴ ἑκάστης τῶν ἴσων γωνιῶν.

Λύσις. Ἐπειδὴ μία γωνία τοῦ πολυγώνου εἶναι ὀρθή, δηλ. 90° καὶ αἱ λοιπαὶ ἔχουν ἄθροισμα 810, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι :
$810^\circ+90^\circ = 900^\circ$, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ $900^\circ : 90^\circ = 10$ ὀρθ.

Ἀλλὰ ἂν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τότε, ὡς γνωστόν, τὸ ἄθροισμά τῶν γωνιῶν του θὰ εἶναι : $(2\nu-4)$ ὀρθ. Ἄρα ἔχομεν $2\nu-4 = 10$, ὁπότε $2\nu=10+4$, δηλ. $2\nu = 14$, ἀπὸ ὅπου $\nu = 7$. Ἄρα τὸ πολύγωνον ἔχει 7 πλευρὲς καὶ συνεπῶς 7 γωνίες. Ἀπὸ αὐτὲς ἡ μία εἶναι ὀρθὴ κατὰ τὸ πρόβλημα. Οἱ ὑπόλοιπες 6 γωνίες εἶναι, κατὰ τὸ πρόβλημα ἴσες καὶ ἔχουν ἄθροισμα 810°. Ἄρα ἡ τιμὴ ἑκάστης εἶναι $810^\circ : 6 = 135^\circ$.

ασκησεις δια την β' ταξιν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Β.30 Δείξατε ὅτι τὰ δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου καὶ βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς αὐτοῦ, εἶναι ἰσοδύναμα.



Λύσις. Ἔστω τραπέζιον ΑΒΓΔ βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ. Ὀνομάζομεν Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του.

Τὸ πρόβλημα εἶναι νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\text{ἐμβ ΑΚΔ} = \text{ἐμβ ΒΚΓ} \qquad (1).$$

Ἀλλὰ ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν :

$$\text{ἐμβ. ΑΚΔ} + \text{ἐμβ. ΔΚΓ} = \text{ἐμβ. ΒΚΓ} + \text{ἐμβ. ΔΚΓ}, \quad \text{δηλ.}$$

$$\text{ἐμβ. ΑΔΓ} = \text{ἐμβ. ΒΔΓ} \qquad (2).$$

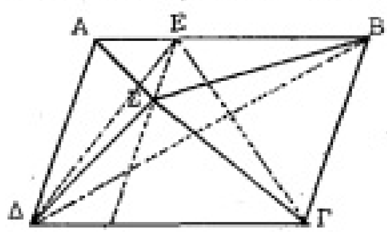
Ἀρκεῖ συνεπῶς νὰ δειχθῇ ὅτι ἀληθεύει ἡ (2).

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΒΔΓ ἔχουν κοινὴν βάσιν ΔΓ καὶ τὴν ἀπέναντι κορυφήν των, τὴν Α τὸ ἕνα καὶ τὴν Β τὸ ἄλλο, ἐπὶ εὐθείας ΑΒ παραλλήλου πρὸς τὴν ΓΔ, ἄρα εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν βάσιν ΔΓ. Ἔχουν λοιπὸν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ἴσα τὰ ἀντίστοιχα ὕψη. Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀληθεύει λοιπὸν ἡ (2) καὶ διὰ τοῦτο ἀληθεύει καὶ ἡ ἰσοδύναμος αὐτῆς ἡ (1).

Β.31 Ἐὰν τυχὸν σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ συνδεθῇ διὰ εὐθυγράμμων τμημάτων μὲ τὶς κορυφές του, δείξατε ὅτι :

$$\text{ἐμβ. ΣΑΒ} + \text{ἐμβ. ΣΓΔ} = \text{ἐμβ. ΣΑΔ} + \text{ἐμβ. ΣΒΓ} \qquad (1).$$



Λύσις. Εἶναι γνωστὸν ὅτι δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ ἴσα τὰ ἀντίστοιχα πρὸς τὴν βάσιν αὐτὴν ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα. Διὰ τοῦτο, ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς κορυφὴν τὸ καθένα ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν κοινὴν βάσιν, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ ἴσα τὰ ἀντίστοιχα πρὸς αὐτὴν ὕψη, ἐπειδὴ αὐτὰ τὰ ὕψη εἶναι ἀποστάσεις σημείων μιᾶς εὐθείας ἀπὸ μίαν παράλληλόν της καὶ τέτοιες ἀποστάσεις εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴσες (ὅταν δύο εὐθεῖες εἶναι παράλληλοι, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μιᾶς ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν ἄλλην).

Φέρομεν λοιπὸν ἀπὸ Σ τὴν παράλληλον τῆς ΑΔ καὶ σημειώνομεν τὸ σημεῖον Ε ὅπου τέμνει τὴν ΑΒ. Θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΒΓ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΔ (δύο εὐθεῖες παράλληλοι πρὸς τρίτην, εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι).

Ἔτσι τὰ τρίγωνα ΣΑΔ καὶ ΕΑΔ ἔχουν κοινὴν βάσιν ΑΔ καὶ ἴσα τὰ ἀντίστοιχα πρὸς τὴν βάσιν αὐτὴν ὕψη, ἐπειδὴ οἱ κορυφές των Σ καὶ Ε, σημεῖα εὐθείας ΣΕ παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΔ, ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν ΑΔ. Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα. Δηλ. ἐμβ. ΣΑΔ = ἐμβ. ΕΑΔ (1).

Ὁμοίως, ἐπειδὴ εἶναι ΣΕ ∥ ΒΓ, τὰ σημεῖα Σ, Ε ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν ΒΓ καὶ ἔτσι τὰ τρίγωνα ΣΒΓ, ΕΒΓ ἔχουν κοινὴν βάσιν ΒΓ καὶ ἴσα τὰ ἀντίστοιχα πρὸς αὐτὴν ὕψη του, ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα. Ἄρα:

$$\text{ἐμβ. ΣΒΓ} = \text{ἐμβ. ΕΒΓ} \quad (2).$$

Ἀπὸ (1) καὶ (2), διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, προκύπτει:

$$\text{ἐμβ. ΣΑΔ} + \text{ἐμβ. ΣΒΓ} = \text{ἐμβ. ΕΑΔ} + \text{ἐμβ. ΕΒΓ} \quad (3).$$

Τέλος, ἐπειδὴ εἶναι ΓΔ ∥ ΑΒ, δηλ. ΓΔ ∥ ΕΒ, τὰ τρίγωνα ΕΒΓ, ΕΒΔ ἔχουν κοινὴν βάσιν ΕΒ καὶ ἴσα τὰ ἀντίστοιχα πρὸς αὐτὴν ὕψη. Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα. Δηλ.

$$\text{ἐμβ. ΕΒΓ} = \text{ἐμβ. ΕΒΔ}.$$

Ἔτσι ἡ (3) γίνεται:

$$\text{ἐμβ. ΣΑΔ} + \text{ἐμβ. ΣΒΓ} = \text{ἐμβ. ΕΑΔ} + \text{ἐμβ. ΕΒΔ}, \quad \text{δηλ.}$$

$$\text{ἐμβ. ΣΑΔ} + \text{ἐμβ. ΣΒΓ} = \text{ἐμβ. ΑΒΔ} \quad (4).$$

Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ὑπὸ τῆς διαγωνίου του ΒΔ. Διὰ τοῦτο, ὡς γνωστόν, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ παραλληλογράμμου. Ἔχομεν λοιπόν:

$$\text{ἐμβ. ΣΑΔ} + \text{ἐμβ. ΣΒΓ} = \frac{1}{2}\,\text{ἐμβ. ΑΒΓΔ}.$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἀπὸ τὰ 4 τρίγωνα ΣΑΔ, ΣΒΓ, ΣΓΔ, ΣΑΒ, τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ ὅλα μαζὺ καλύπτουν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, τὰ δύο ΣΑΔ καὶ ΣΒΓ ἔχουν ἄθροισμα ἐμβαδῶν ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ ἐμβ. ΑΒΓΔ.

Συνεπῶς τὰ ἄλλα δύο τρίγωνα ΣΑΒ καὶ ΣΓΔ θὰ ἔχουν ἄθροισμα ἐμβαδῶν τὸ ἄλλο $\frac{1}{2}$ ἐμβ. ΑΒΓΔ, δηλαδὴ ἄθροισμα ἐμβαδῶν ὅσον καὶ τὰ δύο πρῶτα τρίγωνα.

Ἄρα εἶναι:

$$\text{ἐμβ. ΣΑΒ} + \text{ἐμβ. ΣΓΔ} = \text{ἐμβ. ΣΑΔ} + \text{ἐμβ. ΣΒΓ}. \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Β.32 Εἰς κύκλον ἄγομεν μίαν διάμετρον ΑΒ καὶ τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΒΓ. Ἂν τὰ μήκη τῶν χορδῶν εἶναι 12 cm καὶ 5 cm ἀντιστοίχως, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

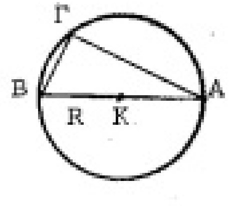
Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία $\widehat{ΑΓΒ}$ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον καὶ συνεπῶς εἶναι ὀρθή.

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ καὶ συνεπῶς ἰσχύει:

$ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2$, ὁπότε, λόγῳ τῶν δεδομένων ἔχομεν:

$$ΑΒ^2 = 12^2 + 5^2 = 169,$$

$$\text{ἄρα} \qquad ΑΒ = 13 \text{ cm} \quad (1).$$



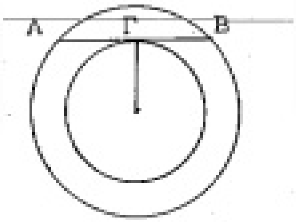
Συνεπῶς ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, εἶναι:

$$R = \frac{13}{2} \text{ cm}.$$

καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ ἐμβαδόν του εἶναι:

$$E = \pi\left(\frac{13}{2}\right)^2 \simeq 133 \text{ cm}^2.$$

Β.33. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ δακτυλίου (ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους ποὺ περιέχεται μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων κύκλων), ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον ἴσην μὲ χορδὴν τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ μικροτέρου.



Λύσις. Ἔστω (Ο, R) καὶ (Ο, ρ) δύο ὁμόκεντροι κύκλοι καὶ ΑΒ μία χορδὴ τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου (Ο, R) ἐφαπτομένη τοῦ ἄλλου.

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ σχηματιζομένου κυκλικοῦ δακτυλίου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κύκλων, ἤτοι:

$$E = \pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi(R^2 - \rho^2) \quad (1).$$

Ἂν Γ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ΑΒ μὲ τὸν κύκλον (Ο, ρ), τότε θὰ εἶναι ΟΓ ⊥ ΑΒ καὶ συνεπῶς τὸ Γ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ (ἡ κάθετος πρὸς χορδὴν κύκλου ἀπὸ τὸ κέντρον του διχοτομεῖ, ὡς γνωστὸν τὴν χορδήν). Ἔτσι, ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ ἔχει ἀκτῖνα ἴσην μὲ ΓΒ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΒΓ ὀρθογωνίου εἰς τὸ Γ, ἔχομεν:

$$ΓΒ^2 = ΟΒ^2 - ΟΓ^2, \quad \text{δηλ.} \quad ΓΒ^2 = R^2 - \rho^2.$$

Τότε ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΒ, δηλαδὴ ἀκτῖνος ΓΒ, ἔχει ἐμβαδόν:

$$E_1 = \pi ΓΒ^2 = \pi(R^2 - \rho^2) \quad (2).$$

Ἡ (2), λόγῳ τῆς (1) γράφεται:

$$E_1 = E \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

ΑΛΓΕΒΡΑ. Β.34 Δύο τραῖνα διανύουν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ εἰς 8 h τὸ πρῶτον καὶ εἰς 12 h τὸ δεύτερον. Ἂν ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου τραίνου εἶναι κατὰ 29 km / h μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ δευτέρου τραίνου, ὑπολογίσατε τὴν ταχύτητα ἑκάστου τραίνου καὶ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ.

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον ἔχουν διανύσει τὰ δύο τραῖνα χωριστὰ εἶναι τὸ αὐτό, συνάγεται ὅτι αἱ ταχύτητες αὐτῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν χρόνων.

Ἂν λοιπὸν ὀνομάσωμεν υ_1 km/h τὴν ταχύτητα τοῦ πρώτου καὶ υ_2 km/h τὴν ταχύτητα τοῦ δευτέρου, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{12}{8} \quad (1).$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι $\upsilon_1=\upsilon_2+29$ καὶ διὰ τοῦτο ἡ (1) γίνεται :

$$\frac{\upsilon_2+29}{\upsilon_2}=\frac{12}{8}, \text{ δηλ. } 1+\frac{29}{\upsilon_2}=\frac{12}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{29}{\upsilon_2}=\frac{12}{8}-1=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Ἔχομεν λοιπὸν $\frac{29}{\upsilon_2}=\frac{1}{2}$, ἀπὸ ὅπου $\upsilon_2=2\cdot 29$, δηλ. $\upsilon_2=58$.

Ἄρα ἡ ταχύτης τοῦ δευτέρου εἶναι 58 km / h καὶ ἑπομένως ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου εἶναι $58+29=87$ km / h. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ, ὡς διανυθεῖσα ὑπὸ τοῦ δευτέρου τραίνου, δηλαδὴ μὲ ταχύτητα 58 km/h εἰς 12 h, εἶναι :

$$12\cdot 58=696 \text{ km}.$$

Β.35 Ἐὰν $A=\left\{x \,/\, \frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}\geqslant\frac{1}{2}\right\}$ καὶ

$$B=\left\{x \,/\, \frac{x}{2}+\frac{x}{4}<\frac{x+8}{3}\right\},$$

νὰ παρασταθῇ γραφικῶς τὸ σύνολον $A\cap B$ ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Λύσις. Ἡ ἀνίσωσις $\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}\geqslant\frac{1}{2}$ μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς :

$$4(x-2)-3(x-3)\geqslant 6, \quad 4x-8-3x+9\geqslant 6, \quad x+1\geqslant 6$$

καὶ τελικά, $x\geqslant 5$. Ἑπομένως :

$$A=\{x \mid x\geqslant 5\} \quad (1).$$

Ἡ ἀνίσωσις $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}<\frac{x+8}{3}$ μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως ὡς ἑξῆς κατὰ σειράν :

$$6x+3x<4(x+8), \quad 9x<4x+32, \quad 9x-4x<32, \quad 5x<32$$

καὶ τελικὰ $x<\frac{32}{5}$, δηλ. $x<6{,}4$. Ἄρα :

$$B=\{x \mid x<6{,}4\} \quad (2).$$

Ἄρα : $\quad A\cap B=\{x/5\leqslant x<6{,}4\}$,

δηλ. : $\quad A\cap B=[5,\ 6{,}4[$.

Τὸ σύνολον αὐτὸ καταλαμβάνει ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὅ,τι μένει ἀπὸ αὐτὴν ἂν σημειωθοῦν τὰ σημεῖα, τετμημένων 5 καὶ 6,4 καὶ διαγραφοῦν τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων οἱ τετμημένες δὲν ἀνήκουν εἰς τὰ Α καὶ Β. Ἄρα, γραφικῶς τὸ $A\cap B$ παριστάνεται ὡς ἑξῆς :

Β.36 Ἂν εἶναι : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1).

Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\alpha\beta-\gamma\delta}=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}$ (2).

Λύσις. Μὲ τὸ νὰ ἀληθεύῃ ἡ (1) ἕπεται ὅτι εἶναι $\beta\neq 0$ καὶ $\delta\neq 0$. Ὑποθέτομεν ἀκόμη ὅτι εἶναι :

$$\alpha\neq 0, \quad \alpha\neq\gamma \quad \text{καὶ} \quad \alpha+\gamma\neq 0.$$

Ὑπὸ τοὺς ὅρους αὐτοὺς εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}\neq 0$, ὁπότε, λόγῳ τῆς (1) θὰ εἶναι καὶ $\frac{\gamma}{\delta}\neq 0$. Δύναται λοιπὸν νὰ τεθῇ,

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{k},\ k\neq 0,$$

διότι κάθε ἀριθμὸς $\neq 0$ εἶναι ἀντίστροφος κάποιου ἄλλου ἀριθμοῦ $\neq 0$. Καὶ τότε, λόγῳ τῆς (1) εἶναι καὶ $\frac{\gamma}{\delta}=\frac{1}{k}$.

Ἀπὸ αὐτὰ συνάγεται ὅτι εἶναι $\beta=\alpha k$ καὶ $\delta=k\gamma$.

Ἑπομένως :

$$\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\cdot\alpha k+\gamma\cdot k\gamma=\alpha^2k+\gamma^2k=k(\alpha^2+\gamma^2) \quad (3)$$

καὶ

$$\alpha\beta-\gamma\delta=\alpha\cdot\alpha k-\gamma k\gamma=\alpha^2k-\gamma^2k=k(\alpha^2-\gamma^2) \quad (4).$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha\neq\gamma$ καθὼς καὶ $\alpha+\gamma\neq 0$, δηλ. $\alpha\neq-\gamma$, οἱ ἀριθμοὶ α καὶ γ οὔτε ἴσοι εἶναι οὔτε ἀντίθετοι καὶ συνεπῶς δὲν ἔχουν ἴσα τετράγωνα.

Ἄρα εἶναι $\alpha^2\neq\gamma^2$ καὶ συνεπῶς εἶναι $\alpha^2-\gamma^2\neq 0$, ὁπότε ἐπειδὴ εἶναι καὶ $k\neq 0$, ἕπεται ὅτι $k(\alpha^2-\gamma^2)\neq 0$, δηλαδή, λόγῳ τῆς (4), ὅτι $\alpha\beta-\gamma\delta\neq 0$.

Ἔτσι τὸ σύμβολον $\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\alpha\beta-\gamma\delta}$ ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Λόγῳ δὲ τῶν (3) καὶ (4), εἶναι :

$$\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\alpha\beta-\gamma\delta}=\frac{k(\alpha^2+\gamma^2)}{k(\alpha^2-\gamma^2)},$$

ὁπότε, μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν διὰ k, ἔχομεν :

$$\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\alpha\beta-\gamma\delta}=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}, \text{ ποὺ εἶναι ἀκριβῶς ἡ (2΄΄).}$$

Ἄρα ἀπὸ τὴν (1) συνάγεται ἡ (2), ὅταν εἶναι :

$$\alpha\neq 0, \ \alpha\neq\gamma \quad \text{καὶ} \quad \alpha+\gamma\neq 0.$$

Β.37 Διὰ ποίας τιμὰς τῶν α καὶ β ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{\alpha x-\beta}{3}+\frac{x}{2}=3x-\alpha$$

ἔχει : α) Μίαν λύσιν, β) Οὐδεμίαν λύσιν καὶ καὶ γ) Εἶναι ἀόριστος.

Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς :

$$2(\alpha x-\beta)+3x=6(3x-\alpha) \text{ (ἀπαλοιφὴ παρονομαστῶν)}$$

$$2\alpha x-2\beta+3x=18x-6\alpha$$

$$2\alpha x-15x=2\beta-6\alpha, \quad (2\alpha-15)x=2(\beta-3\alpha) \quad (1).$$

Ἀπὸ τὴν (1) συνάγεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, ὡς ἰσοδύναμος τῆς (1) :

(I) Θὰ ἔχῃ μίαν μόνον λύσιν, ἂν καὶ μόνον ἄν, εἶναι :

$$2\alpha-15\neq 0, \quad \text{δηλ.} \quad \alpha\neq\frac{15}{2}.$$

(II) Οὐδεμίαν λύσιν θὰ ἔχῃ, ἂν καὶ μόνον ἂν εἶναι :

$$2\alpha-15=0, \text{ ἀλλὰ } \beta-3\alpha\neq 0, \quad \text{δηλ. :}$$

$$\alpha=\frac{15}{2} \text{ ἀλλὰ } \beta-3\cdot\frac{15}{2}\neq 0 \Rightarrow \beta\neq\frac{45}{2}.$$

(III) Θὰ εἶναι ἀόριστος, ἂν καὶ μόνον ἂν εἶναι :

$$2\alpha-15=0 \quad \text{καὶ} \quad \beta-3\alpha=0, \quad \text{δηλ. :}$$

$$\alpha=\frac{15}{2} \text{ καὶ } \beta-\frac{45}{2}=0 \Rightarrow \beta=\frac{45}{2}.$$