Author: Άγνωστος Συγγραφέας

Title: Ασκήσεις δια την γ΄τάξιν-

Creator: HDML

ασκησεις δια την γ΄ ταξιν

ΑΛΓΕΒΡΑ. Γ.36 Δείξατε ὅτι ἐντὸς τοῦ συνόλου F τῶν κλασμάτων τῶν σχετικῶν ἀκεραίων ἡ σχέσις R ἡ ὁριζομένη διά :

$$\frac{x}{y}\,R\,\frac{x'}{y'} \Leftrightarrow xy' = yx',$$

εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Λύσις. (I) Ἡ σχέσις R εἶναι ἀνακλαστική. Ἔστω

$$\frac{x}{y} \in F \ (x \in Z,\ y \in Z^*).$$

Ἔχομεν $xy = yx$, λόγῳ τῆς ἀντιμεταθετικότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐντὸς τοῦ Z.

Αὐτὰ φανερώνουν ὅτι ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή :

$$\frac{x}{y} \in F \Rightarrow \frac{x}{y}\,R\,\frac{x}{y}.$$

Ἄρα ἡ σχέσις R εἶναι ἀνακλαστική.

(II) Ἡ σχέσις R εἶναι συμμετρική. Ἔστω

$$\left(\frac{x}{y}, \frac{x'}{y'}\right) \in F \times F.$$

Ἀληθεύουν οἱ συνεπαγωγές :

$$\frac{x}{y}\,R\,\frac{x'}{y'} \Rightarrow xy' = yx' \Rightarrow yx' = xy'$$

(συμμετρικότης τῆς ἰσότητος)

$$\Rightarrow x'y = y'x$$

(ἀντιμεταθετικότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐν Z)

$$\Rightarrow \frac{x'}{y'}\,R\,\frac{x}{y}.$$

Ἄρα : $\quad \frac{x}{y}\,R\,\frac{x'}{y'} \Rightarrow \frac{x'}{y'}\,R\,\frac{x}{y}.$

Αὐτὸ φανερώνει ὅτι ἡ σχέσις R εἶναι συμμετρική.

(III) Ἡ σχέσις R εἶναι μεταβατική. Ἔστωσαν κλάσματα $\frac{x}{y}, \frac{x'}{y'}, \frac{x''}{y''}$ σχετικῶν ἀκεραίων, τέτοια ὥστε :

$$\frac{x}{y}\,R\,\frac{x'}{y'} \text{ καὶ } \frac{x'}{y'}\,R\,\frac{x''}{y''}.$$

Θὰ ἀληθεύουν οἱ συνεπαγωγές :

$$\left.\begin{matrix} \frac{x}{y}\,R\,\frac{x'}{y'} \\ \text{καὶ} \\ \frac{x'}{y'}\,R\,\frac{x''}{y''} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1)\ xy' = yx' \text{ καὶ } x'y'' = y'x'' \quad (2).$$

Ἐπειδὴ εἶναι $y' \neq 0$ καὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Z^* εἶναι κανονικὰ διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν, ἔχομεν :

$$(xy' = yx') \Leftrightarrow (xy')y'' = (yx')y''$$

$$\Rightarrow (xy'')y' = (x'y'')y$$

(ἀντιμεταθετικότης)

$$\Rightarrow (xy'')y' = (y'x'')y \text{ (λόγῳ τῆς (2))}$$

$$\Rightarrow (xy'')y' = (yx'')y' \text{ (ἀντιμεταθετικότης)}$$

$$\Rightarrow xy'' = yx'' \ (y' \neq 0, \text{ ἄρα κανονικὸν διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν})$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}\,R\,\frac{x''}{y''}.$$

Ἄρα :

$$\left.\begin{matrix} \frac{x}{y}\,R\,\frac{x'}{y'} \\ \text{καὶ} \\ \frac{x'}{y'}\,R\,\frac{x''}{y''} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y}\,R\,\frac{x''}{y''}.$$

Δηλαδὴ ἡ σχέσις R εἶναι μεταβατική.

Μὲ τὸ νὰ εἶναι ὅμως ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατικὴ αὐτὴ ἡ σχέσις, ἕπεται ὅτι εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Γ.38 Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{x-1}{x+\alpha-\beta} = \frac{1-x}{x-\alpha+\beta} + 2 \qquad (1).$$

Λύσις. Ἡ (1) γράφεται :

$$\frac{x-1}{x+\alpha-\beta} = \frac{1-x+2(x-\alpha+\beta)}{x-\alpha+\beta}, \quad \text{δηλ.}$$

$$\frac{x-1}{x+\alpha-\beta} = \frac{x-2\alpha+2\beta+1}{x-\alpha+\beta} \qquad (2),$$

ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι οἱ παρονομασταὶ εἶναι $\neq 0$, δηλ. ὅτι ἰσχύουν :

$$x+\alpha-\beta \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \beta-\alpha \text{ καὶ } x-\alpha+\beta \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \alpha-\beta,$$

ποὺ ἀληθεύουν ἂν καὶ μόνον ἂν εἶναι :

$$x \neq |\alpha-\beta| \qquad (3).$$

Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τῆς (3), ἡ (2), ἄρα καὶ ἡ (1), ἰσοδυναμεῖ μὲ τήν :

$$(x-1)(x-\alpha+\beta) = (x+\alpha-\beta)(x-2\alpha+2\beta+1),$$

ἡ ὁποία μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως διαδοχικῶς ὡς ἑξῆς :

$$(x-1)[x-(\alpha-\beta)] = [x+(\alpha-\beta)][x-(2\alpha-2\beta-1)]$$

$$x^2-(\alpha-\beta)x-x+\alpha-\beta =$$

$$= x^2-(2\alpha-2\beta-1)x+(\alpha-\beta)x-(\alpha-\beta)(2\alpha-2\beta-1)$$

$$x^2-(\alpha-\beta+1)x+(\alpha-\beta) =$$

$$= x^2-(2\alpha-2\beta-1-\alpha+\beta)x-(\alpha-\beta)(2\alpha-2\beta-1)$$

$$-(\alpha-\beta+1)x+\alpha-\beta = -(\alpha-\beta-1)x-(\alpha-\beta)(2\alpha-2\beta-1)$$

$$(\alpha-\beta-1)x-(\alpha-\beta+1)x = -(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)(2\alpha-2\beta-1)$$

$$-2x = -(\alpha-\beta)[1+(2\alpha-2\beta-1)]$$

$$2x = (\alpha-\beta)2(\alpha-\beta)$$

$$x = (\alpha-\beta)^2.$$

Ἔτσι τελικὰ ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν σύζευξιν :

$$\left.\begin{matrix} x = (\alpha-\beta)^2 \quad (4) \\ \text{καὶ} \quad x \neq |\alpha-\beta| \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = (\alpha-\beta)^2 \quad (4) \\ \text{καὶ} \quad (\alpha-\beta)^2 \neq |\alpha-\beta| \quad (5) \end{matrix}$$

Ἀλλὰ ἡ σχέσις $(\alpha-\beta)^2 = |\alpha-\beta|$ ἀληθεύει, ἂν καὶ μόνον ἂν εἶναι :

$$\text{ἢ } \alpha-\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta, \text{ ἢ } |\alpha-\beta| = 1.$$

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ λοιπὸν ἡ (5) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\alpha \neq \beta$ καὶ συνάμα $|\alpha-\beta| \neq 1$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσιν, ἂν καὶ μόνον ἂν εἶναι $\alpha \neq \beta$ καὶ συνάμα $|\alpha-\beta| \neq 1$, ἔχει δὲ τότε μοναδικὴν λύσιν τὴν $x = (\alpha-\beta)^2$.

Γ.39 Ἐάν $x+y+\omega=0$, νά δειχθῇ ὅτι:

$$A \equiv x\frac{y^3-\omega^3}{y-\omega}+y\frac{\omega^3-x^3}{\omega-x}+\omega\frac{x^3-y^3}{x-y}=0,$$

Λύσις. Ἐπειδή:

$$y^3-\omega^3=(y-\omega)(y^2+y\omega+\omega^2),$$
$$\omega^3-x^3=(\omega-x)(\omega^2+\omega x+x^2),$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2),$$ ἡ A γίνεται:

$$A \equiv x(y^2+y\omega+\omega^2)+y(\omega^2+\omega x+x^2)+\omega(x^2+xy+y^2)=$$
$$=(xy^2+yx^2+xy\omega)+(y\omega^2+\omega y^2+xy\omega)+(\omega x^2+x\omega^2+xy\omega)=$$
$$=xy(x+y+\omega)+y\omega(x+y+\omega)+\omega x(x+y+\omega),$$ ἤ
$$A \equiv (x+y+\omega)(xy+y\omega+\omega x).$$

Ἐκ ταύτης, ἐπειδή $x+y+\omega=0$ προκύπτει $A=0$ ὅ.ἔ.δ.

Γ.40 Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:

$$A \equiv \alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta).$$

Λύσις. **Α' τρόπος.** $\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)=$

$$=\underline{\alpha^3\beta}-\underline{\alpha^3\gamma}+\underbrace{\beta^3\gamma}-\beta^3\alpha+\gamma^3\alpha-\underbrace{\gamma^3\beta}=$$
$$=\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta\gamma(\beta^2-\gamma^2)-\alpha(\beta^3-\gamma^3)=$$
$$=\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)-\alpha(\beta-\gamma)(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)=$$
$$=(\beta-\gamma)[\alpha^3+\beta\gamma(\beta+\gamma)-\alpha(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)]=$$
$$=(\beta-\gamma)(\underline{\alpha^3}+\underbrace{\beta^2\gamma}+\beta\gamma^2-\underline{\alpha\beta^2}-\underbrace{\alpha\beta\gamma}-\alpha\gamma^2)=$$
$$=(\beta-\gamma)[\alpha(\alpha^2-\beta^2)-\beta\gamma(\alpha-\beta)-\gamma^2(\alpha-\beta)]=$$
$$=(\beta-\gamma)[\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-\beta\gamma(\alpha-\beta)-\gamma^2(\alpha-\beta)]=$$
$$=(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)[\alpha(\alpha+\beta)-\beta\gamma-\gamma^2]=$$
$$=(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma^2)=$$
$$=(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)[(\alpha^2-\gamma^2)+\beta(\alpha-\gamma)]=$$
$$=(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)[(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)+\beta(\alpha-\gamma)]=$$
$$=(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma).$$

Β' τρόπος. Ἐπειδή ἡ A μηδενίζεται διά $\alpha=\beta$, $\alpha=\gamma$, $\beta=\gamma$, ἕπεται ὅτι θά διαιρεῖται διά $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$ καί συνεπῶς, ὑποτιθεμένου $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ καί διά τοῦ γινομένου αὐτῶν $B=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

Ἐπειδή ἡ A εἶναι 4ου καί ἡ B τρίτου βαθμοῦ καί εἶναι ἀμφότεραι κυκλικῶς συμμετρικαί, τό πηλίκον τῆς διαιρέσεώς των θά εἶναι πολυώνυμον κυκλικῶς συμμετρικόν ὡς πρός α, β, γ καί βαθμοῦ πρώτου, ἤτοι θά εἶναι τῆς μορφῆς $k(\alpha+\beta+\gamma)$, ἔνθα k ἀνεξάρτητος τῶν α, β, γ.

Θά ἔχωμεν συνεπῶς $A=B\cdot k(\alpha+\beta+\gamma)$, ἤτοι:

$$\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)\equiv$$
$$\equiv(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)k(\alpha+\beta+\gamma) \qquad (1).$$

Ἐπειδή ἡ (1) εἶναι ταυτότης, θά ἀληθεύῃ δι' οἱασδήποτε τιμάς τῶν α, β, γ.

Θέτομεν:

$\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=2$, ὁπότε ἡ (1) δίδει:

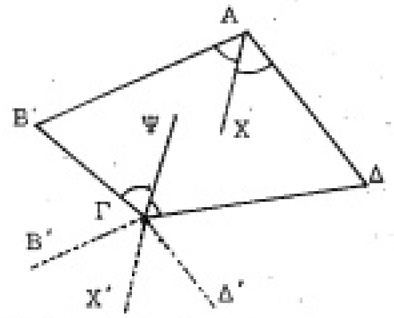
$2-8=(-1)(-1)2\cdot k\cdot 3$, ἤτοι $-6=6k$ καί συνεπῶς:

$$k=-1.$$

Κατόπιν αὐτοῦ ἡ (1) γίνεται:

$$\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)=$$
$$=-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma).$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Γ.41 Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἄν τά ὑποστηρίγματα τῶν διχοτόμων δύο ἀπέναντι γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου, τέμνωνται, μία γωνία αὐτῶν θά εἶναι ἴση μέ τήν ἡμιδιαφοράν τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.



Λύσις. Ἔστω κυρτόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Θεωροῦμεν τάς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του $\widehat{A}$ καί $\widehat{\Gamma}$, τήν ΑΧ καί ΓΨ ἀντιστοίχως.

Ἐπειδή αἱ γωνίες δύο εὐθειῶν διατηροῦν τά μέτρα των ὅταν ἡ μία ἐκ τῶν εὐθειῶν ἀντικατασταθῇ μέ οἱανδήποτε παράλληλον αὐτῆς, ἄν χαραχθῇ ἀπό Γ ἡ ἡμιευθεῖα ΓΧ' παράλληλος καί ὁμόρροπος τῆς ΑΧ, αἱ γωνίες τῶν εὐθειῶν ΑΧ καί ΓΨ ἔχουν τά αὐτά μέτρα μέ τίς γωνίες τῶν εὐθειῶν ΓΧ' καί ΓΨ.

Ἔτσι, μία ἐκ τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν ΑΧ, ΓΨ εἶναι ἡ γωνία (ΓΧ', ΓΨ) τῶν ἡμιευθειῶν ΓΧ', ΓΨ ἡ περιέχουσα τήν ἡμιευθεῖαν ΓΔ.

Ἄν ἀπό Γ χαραχθοῦν ἡ ἡμιευθεῖα ΓΔ' παράλληλος καί ὁμόρροπος τῆς ἡμιευθείας ΑΔ καί ἡ ΓΒ' παράλληλος καί ὁμόρροπος τῆς ἡμιευθείας ΑΒ, θά ἔχομεν ἐντός τοῦ μή κυρτοῦ γωνιακοῦ τομέως $\overset{\smile}{B\Gamma\Delta}$ τήν διάταξιν:

ΓΒ, ΓΒ', ΓΧ', ΓΔ', ΓΔ.

Ἑπομένως: (γων. (ΓΧ', ΓΨ) περιέχουσα τήν ΓΔ)

$$=X'\widehat{\Gamma}\Delta'+\Delta'\widehat{\Gamma}\Delta+\Delta\widehat{\Gamma}\Psi \qquad (1).$$

Ἀλλά:

$$X'\widehat{\Gamma}\Delta'=XA\Delta$$
$$=\frac{A}{2}$$

(κυρτές γωνίες μέ πλευρές μίαν πρός μίαν παραλλήλους καί ὁμορρόπους)

$$\Delta'\widehat{\Gamma}\Delta=\Gamma\widehat{\Delta}A=\widehat{\Delta}$$

(ἐντός ἐναλλάξ παραλλήλων εὐθειῶν ΓΔ', ΑΔ τεμνομένων ὑπό ΓΔ) καί

$$\Delta\widehat{\Gamma}\Psi=\frac{\widehat{\Gamma}}{2} \text{ (ΓΨ διχοτόμος τῆς } B\widehat{\Gamma}\Delta=\widehat{\Gamma}\text{)}.$$

Ἔτσι ἡ (1) γίνεται:

(γωνία (ΓΧ', ΓΨ) περιέχουσα τήν ΓΔ)

$$=\frac{\widehat{A}}{2}+\widehat{\Delta}+\frac{\widehat{\Gamma}}{2}=\frac{\widehat{A}}{2}+\widehat{\Delta}+\frac{\widehat{\Gamma}}{2}+\frac{\widehat{B}}{2}-\frac{\widehat{B}}{2}=$$

$$=\left(\frac{\widehat{A}}{2}+\frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{\Gamma}}{2}+\frac{\widehat{\Delta}}{2}\right)+\frac{\widehat{\Delta}}{2}-\frac{\widehat{B}}{2}=$$

$= 2$ ὀρθ. $+ \dfrac{\widehat{\Delta}}{2} - \dfrac{\widehat{B}}{2}$, διότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 4$ ὀρθ.

Ἄρα: (γων. (ΓΧ', ΓΨ) περιέχουσα τὴν (ΓΔ)

$$= 2 \text{ ὀρθ.} + \frac{\widehat{\Delta}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} \quad (2).$$

Διακρίνομεν τώρα τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

(Ι) $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$. Τότε ἡ (2) δίδει: (γων. (ΓΧ', ΓΨ) περιέχουσα τὴν ΓΔ) $= 2$ ὀρθ. Ἀπὸ αὐτὸ συνάγεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω γωνία εἶναι εὐθεῖα—γωνία καὶ συνεπῶς οἱ ἡμιευθεῖες ΓΧ', ΓΨ εἶναι ἀντίθετες, ἄρα ἔχουν κοινὸν ὑποστήριγμα. Ἔτσι ἡ εὐθεῖα ΓΧ' ἡ παράλληλος τῆς ΑΧ ἀπὸ τὸ Γ συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεῖαν ΓΨ.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ΑΧ $\parallel$ ΓΨ.

Ὥστε, ἂν εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$, ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{\Gamma}$.

(ΙΙ) $\widehat{\Delta} \neq \widehat{B}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τίποτε δὲν ἐμποδίζει νὰ ὀνομάζωμεν Β τὴν μεγαλυτέραν ἐκ τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν. Ἡ (2) δύναται ὁπωσδήποτε νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

(γων.(ΓΧ', ΓΨ) περιέχουσα τὴν ΓΔ)$=2$ ὀρθ.$- \dfrac{\widehat{B} - \widehat{\Delta}}{2}$ (3).

Ἀλλά:

$$(\widehat{B} > \widehat{\Delta}) \Rightarrow \widehat{B} - \widehat{\Delta} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{B} - \widehat{\Delta}}{2} > 0 \Rightarrow 2 \text{ ὀρθ.} - \frac{\widehat{B} - \widehat{\Delta}}{2} < 2 \text{ ὀρθ.} \quad (4).$$

Συνδυάζοντες τὴν (4) μὲ τὴν (3) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω γωνία (ΓΧ', ΓΨ), εἶναι ἡ κυρτὴ γωνία τῶν ἡμιευθειῶν ΓΧ', ΓΨ ἀφοῦ εἶναι <2 ὀρθ.

Διὰ τοῦτο ἔχομεν:

$$X\widehat{\Gamma}\Psi = 2 \text{ ὀρθ.} - \frac{\widehat{B} - \widehat{\Delta}}{2} \quad (5),$$

ἀπὸ ὅπου συνάγεται ὅτι ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς εἶναι ἴση μὲ $\dfrac{\widehat{B} - \widehat{\Delta}}{2}$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι μία ἐκ τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν ΓΧ', ΓΨ εἶναι ἴση μὲ 2 ὀρθ. $- \dfrac{\widehat{B} - \widehat{\Delta}}{2}$ καὶ ἡ ἐφεξῆς αὐτῆς εἶναι ἴση μὲ $\dfrac{\widehat{B} - \widehat{\Delta}}{2}$. Αὐτὴ ἡ τελευταία εἶναι ὀξεῖα γωνία, διότι ἔχομεν:

$$\frac{\widehat{B}}{2} < 1 \text{ ὀρθ.}, \quad \frac{\widehat{\Delta}}{2} < 1 \text{ ὀρθ.},$$

ὡς ἡμίση κυρτῆς γωνίας, ὁπότε, προφανῶς εἶναι καὶ

$$\frac{\widehat{B} - \widehat{\Delta}}{2} < 1 \text{ ὀρθ.}$$

Ἄρα, ὅταν εἶναι $\widehat{B} \neq \widehat{\Delta}$, τότε οἱ εὐθεῖες ΓΧ', ΓΨ εἶναι διαφόρου διευθύνσεως καὶ οἱ γωνίες των εἶναι ἄνισοι ἡ δὲ ὀξεῖα γωνία αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ $\dfrac{\widehat{B} - \widehat{\Delta}}{2}$.

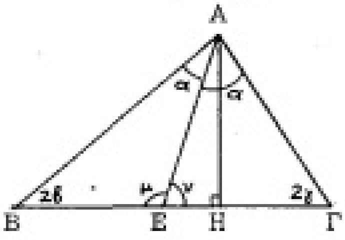
Ἐπειδὴ οἱ γωνίες δύο εὐθειῶν δὲν μεταβάλλουν μέτρα ὅταν ἡ μία ἐκ τῶν εὐθειῶν ἀντικατασταθῇ μὲ παράλληλόν της, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία τῶν εὐθειῶν ΑΧ, ΓΨ, ὅπου ΑΧ $\parallel$ ΓΧ', δηλαδὴ τῶν ὑποστηριγμάτων τῶν διχοτόμων των $\widehat{A}, \widehat{\Gamma}$ εἶναι ἐπίσης ἴση μὲ $\dfrac{B - \Delta}{2}$ ὅ.ἔ.δ.

Γ.42 Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου οἱ γωνίες Α, Β, Γ ἔχουν μέτρα ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς $2\alpha^\circ$, $2\beta^\circ$, $2\gamma^\circ$ ($\beta^\circ < \gamma^\circ$). Ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$ σχηματίζει μὲ τὴν ἀντίστοιχον πλευρὰν ΒΓ γωνίες $B\widehat{E}A = \mu^\circ$, $\Gamma EA = \nu^\circ$. Δείξατε:

1ον) ὅτι $\mu^\circ - \nu^\circ = 2(\gamma^\circ - \beta^\circ)$ (1)

2ον) ὅτι ἂν ἀχθῇ τὸ ὕψος $\widehat{AH}$, θὰ εἶναι:

$$H\widehat{A}E = \frac{\mu^\circ - \nu^\circ}{2} \quad (2).$$



Ἀπόδειξις τοῦ 1ου. Ἡ γωνία $B\widehat{E}A = \mu^\circ$ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία Ε τοῦ τριγώνου ΑΕΓ καὶ ἑπομένως ἔχομεν:

$$\mu^\circ = E\widehat{\Gamma}A + \Gamma\widehat{A}E, \text{ δηλ. } \mu^\circ = 2\gamma^\circ + \alpha^\circ \quad (3).$$

Ἡ γωνία $\Gamma\widehat{E}A$ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία Ε τοῦ τριγώνου ΑΕΒ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι:

$$\nu^\circ = E\widehat{B}A + B\widehat{A}E, \text{ δηλ. } \nu^\circ = 2\beta^\circ + \alpha^\circ \quad (4).$$

Ἀπὸ (3) καὶ (4), διὰ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη, ἔχομεν:

$$\mu^\circ - \nu^\circ = (2\gamma^\circ + \alpha^\circ) - (2\beta^\circ + \alpha^\circ) = 2\gamma^\circ - 2\beta^\circ = 2(\gamma^\circ - \beta^\circ),$$

ἄρα: $\mu^\circ - \nu^\circ = 2(\gamma^\circ - \beta^\circ)$.

Ἀληθεύει λοιπὸν ἡ (1).

Ἀπόδειξις τοῦ 2ου. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι μὲ τὸ νὰ εἶναι $\beta^\circ < \gamma^\circ$, ἕπεται ὅτι $2\beta^\circ < 2\gamma^\circ$, δηλ. $\widehat{B} < \widehat{\Gamma}$, ἀπὸ ὅπου συνάγεται ὅτι εἶναι:

$$A\Gamma < AB \quad (5).$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἂν δύο πλευρὲς τριγώνου εἶναι ἄνισες, τότε ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τοῦ τριγώνου τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῶν, ἀφήνει τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ποὺ ἔχει κοινὴν τὴν ἀρχὴν μὲ αὐτές πρὸς τὸ μέρος τῆς μικροτέρας ἐξ αὐτῶν.

Ἔτσι, κατόπιν τῆς (5), συνάγεται ὅτι τὸ ὕψος ΑΗ ἔχει τὸν πόδα του Η πρὸς τὸ μέρος τῆς ΑΕ, ὅπου καὶ τὸ Γ, δηλαδὴ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (ΕΓ), (εἴτε μεταξὺ Ε καὶ Γ ὅταν ἡ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ὀξεῖα, εἴτε πέραν τοῦ Γ, ὅταν ἡ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἀμβλεῖα, εἴτε ἀκριβῶς εἰς τὸ Γ ἂν ἡ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ὀρθή).

῎Ετσι, ἡ $\widehat{BEA} = \mu^{o}$ εἶναι ἡ ἐξωτερική γωνία Ε τοῦ ὀρθογωνίου εἰς Η τριγώνου ΕΑΗ, ἐνῶ ἡ $\widehat{\Gamma E A} = \nu^{o}$ εἶναι ἡ γωνία Ε τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΑΗ.

Διὰ τοῦτο ἔχομεν :

$$\mu^{o} = \widehat{BEA} = \widehat{EHA} + \widehat{HAE} = 90^{o} + \widehat{HAE}, \quad \text{ἄρα :}$$

$$\mu^{o} = 90^{o} + \widehat{HAE} \Rightarrow \widehat{HAE} = \mu^{o} - 90^{o} \qquad (4)$$

καὶ

$$\widehat{HAE} = 90^{o} - E = 90^{o} - \widehat{\Gamma EA} = 90^{o} - \nu^{o}, \quad \text{ἄρα :}$$

$$\widehat{HAE} = 90^{o} - \nu^{o} \qquad (5).$$

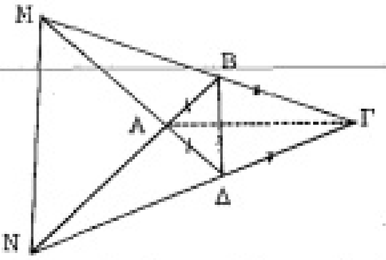
᾿Από (4) καὶ (5) διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, συνάγεται ὅτι $2\widehat{HAE} = \mu^{o} - \nu^{o}$, ἀπὸ ὅπου $\widehat{HAE} = \frac{\mu^{o} - \nu^{o}}{2}$.

᾿Αληθεύει λοιπὸν καὶ ἡ (2).

Γ.43 Εἰς ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = ΑΔ καὶ ΓΒ = ΓΔ, οἱ δὲ ἀπέναντι πλευρὲς συντρέχουν : ἡ ΑΒ καὶ ΓΔ εἰς σημεῖον Ν ἡ δὲ ΒΓ καὶ ΑΔ εἰς σημεῖον Μ.

Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα (ΜΝ) εἶναι παράλληλος τῆς (ΒΔ).

Λύσις. ᾿Από ΑΒ = ΑΔ καὶ ΓΒ = ΓΔ φαίνεται ὅτι τὸ σημεῖον Α καὶ τὸ σημεῖον Γ ἀπέχουν, χωριστὰ τὸ καθένα, ἴσον ἀπὸ Β καὶ Δ.



Διὰ τοῦτο ἀνήκουν εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος [ΒΔ]. ῎Ετσι (ΒΔ) ⊥ (ΑΓ) καὶ ἡ εὐθεῖα (ΑΓ) εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν Β καὶ Δ.

Διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα (ΓΔ) εἶναι συμμετρικὴ τῆς εὐθείας (ΓΒ) καὶ ἡ εὐθεῖα (ΑΔ) εἶναι συμμετρικὴ τῆς εὐθείας (ΑΒ) πρὸς ἄξονα τὴν (ΑΓ).

᾿Εφ' ὅσον ἔχομεν (ΒΔ) ⊥ (ΑΓ), ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι (ΜΝ) ∥ (ΒΔ), ἂν καὶ μόνον ἂν εἶναι καὶ (ΜΝ) ⊥ (ΑΔ), πρᾶγμα ποὺ θὰ ἀληθεύῃ ἂν τὰ Μ, Ν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα (ΑΓ).

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὸ Μ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν (ΒΓ) καὶ (ΑΔ). Διὰ τοῦτο τὸ συμμετρικόν του πρὸς (ΑΓ) θὰ ἀνήκῃ :

α) εἰς τὴν συμμετρικὴν τῆς (ΒΓ) πρὸς (ΑΓ) καὶ τέτοια εἶναι ἡ εὐθεῖα (ΔΓ).

β) εἰς τὴν συμμετρικὴν τῆς (ΑΔ) πρὸς (ΑΓ) καὶ τέτοια εἶναι (ΑΒ).

῎Αρα τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς (ΑΓ) εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν (ΔΓ) καὶ (ΑΒ). Τέτοιο εἶναι ἕνα μόνον, τὸ Ν.

῎Αρα, συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς (ΑΓ) εἶναι τὸ Ν.

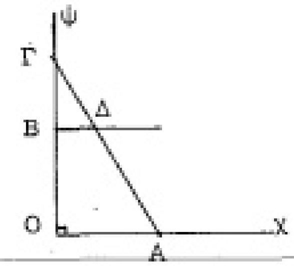
Μὲ τὸ νὰ εἶναι ὅμως τὰ Μ, Ν συμμετρικὰ πρὸς (ΑΓ), ἕπεται ὅτι εἶναι (ΜΝ) ⊥ (ΑΓ). ῎Ετσι οἱ εὐθεῖες (ΜΝ) καὶ (ΒΔ) εἶναι κάθετοι τῆς αὐτῆς εὐθείας (ΑΓ) καὶ συνεπῶς εἶναι παράλληλοι δ.ἔ.δ.

ασκησεις δια την δ΄ ταξιν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Δ 30 ᾿Επὶ τῶν πλευρῶν Ox, Oy ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ ἴσα πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα α. ᾿Επὶ τῆς ἡμιευθείας]O, y) λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ Β παράλληλον τῆς Ox, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{A\Delta^2} + \frac{1}{A\Gamma^2}$$

εἶναι σταθερόν, ὅταν τὸ Γ διατρέχῃ τὴν ἀνοικτὴν ἡμιευθεῖαν]O, y).



᾿Απόδειξις. Μία εἰδικὴ θέσις τοῦ μεταβλητοῦ σημείου Γ εἶναι ἡ θέσις του εἰς τὸ Β. Τότε ἔχομεν :

$$\Delta = B, \; [\Gamma A] = [AB] = [A\Delta].$$

᾿Επομένως :

$$\frac{1}{A\Delta^2} + \frac{1}{A\Gamma^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{2}{AB^2} = \frac{2}{OA^2 + OB^2}$$

ἄρα
$$\frac{1}{A\Delta^2} + \frac{1}{A\Gamma^2} = \frac{2}{\alpha^2 + \alpha^2} = \frac{2}{2\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

῎Αν λοιπὸν τὸ $\frac{1}{A\Delta^2} + \frac{1}{A\Gamma^2}$ μένῃ πράγματι σταθερὸν ὅταν τὸ Γ διατρέχῃ τὴν ἡμιευθεῖαν]O, y), πρέπει καὶ διὰ κάθε Γ ∈]O, y) Γ ≠ Β νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης :

$$\frac{1}{A\Delta^2} + \frac{1}{A\Gamma^2} = \frac{1}{\alpha^2} \qquad (1)$$

῾Η (1) ἰσοδυναμεῖ μὲ τήν :

$$\frac{A\Gamma^2}{A\Delta^2} + 1 = \frac{A\Gamma^2}{\alpha^2} \qquad (2)$$

᾿Αλλὰ διὰ κάθε Γ ∈]O, y) ἔχομεν $A\Gamma^2 = OA^2 + O\Gamma^2$ λόγῳ τοῦ τριγώνου ΟΑΓ ὀρθογωνίου εἰς τὸ Ο, ἄρα :

$$A\Gamma^2 = \alpha^2 + O\Gamma^2,$$

διότι :

$$\frac{A\Gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + O\Gamma^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{O\Gamma^2}{\alpha^2} \qquad (3)$$