Author: Άγνωστος Συγγραφέας

Title: Ασκήσεις δια την δ΄τάξιν-

Creator: HDML

Ἔτσι, ἡ $\widehat{BEA} = \mu^\circ$ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία E τοῦ ὀρθογωνίου εἰς H τριγώνου EAH, ἐνῶ ἡ $\widehat{\Gamma EA} = \nu^\circ$ εἶναι ἡ γωνία E τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου EAH.

Διὰ τοῦτο ἔχομεν:

$$\mu^\circ = \widehat{BEA} = \widehat{EHA} + \widehat{HAE} = 90^\circ + \widehat{HAE}, \quad \text{ἄρα:}$$

$$\mu^\circ = 90^\circ + \widehat{HAE} \Rightarrow \widehat{HAE} = \mu^\circ - 90^\circ \qquad (4)$$

καὶ

$$\widehat{HAE} = 90^\circ - E = 90^\circ - \widehat{\Gamma EA} = 90^\circ - \nu^\circ, \quad \text{ἄρα:}$$

$$\widehat{HAE} = 90^\circ - \nu^\circ \qquad (5).$$

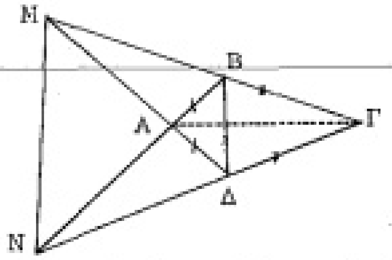
Ἀπὸ (4) καὶ (5) διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, συνάγεται ὅτι $2\widehat{HAE} = \mu^\circ - \nu^\circ$, ἀπὸ ὅπου $\widehat{HAE} = \dfrac{\mu^\circ - \nu^\circ}{2}$.

Ἀληθεύει λοιπὸν καὶ ἡ (2).

Γ.43 Εἰς ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = ΑΔ καὶ ΓΒ = ΓΔ, οἱ δὲ ἀπέναντι πλευρὲς συντρέχουν: ἡ ΑΒ καὶ ΓΔ εἰς σημεῖον Ν ἡ δὲ ΒΓ καὶ ΑΔ εἰς σημεῖον Μ.

Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα (ΜΝ) εἶναι παράλληλος τῆς (ΒΔ).

Λύσις. Ἀπὸ ΑΒ = ΑΔ καὶ ΓΒ = ΓΔ φαίνεται ὅτι τὸ σημεῖον Α καὶ τὸ σημεῖον Γ ἀπέχουν, χωριστὰ τὸ καθένα, ἴσον ἀπὸ Β καὶ Δ.



Διὰ τοῦτο ἀνήκουν εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος [ΒΔ]. Ἔτσι (ΒΔ) ⊥ (ΑΓ) καὶ ἡ εὐθεῖα (ΑΓ) εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν Β καὶ Δ.

Διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα (ΓΔ) εἶναι συμμετρικὴ τῆς εὐθείας (ΓΒ) καὶ ἡ εὐθεῖα (ΑΔ) εἶναι συμμετρικὴ τῆς εὐθείας (ΑΒ) πρὸς ἄξονα τὴν (ΑΓ).

Ἐφ' ὅσον ἔχομεν (ΒΔ) ⊥ (ΑΓ), ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι (ΜΝ) ∥ (ΒΔ), ἂν καὶ μόνον ἂν εἶναι καὶ (ΜΝ) ⊥ (ΑΔ), πρᾶγμα ποὺ θὰ ἀληθεύῃ ἂν τὰ Μ, Ν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα (ΑΓ).

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὸ Μ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν (ΒΓ) καὶ (ΑΔ). Διὰ τοῦτο τὸ συμμετρικόν του πρὸς (ΑΓ) θὰ ἀνήκῃ:

α) εἰς τὴν συμμετρικὴν τῆς (ΒΓ) πρὸς (ΑΓ) καὶ τέτοια εἶναι ἡ εὐθεῖα (ΔΓ).

β) εἰς τὴν συμμετρικὴν τῆς (ΑΔ) πρὸς (ΑΓ) καὶ τέτοια εἶναι (ΑΒ).

Ἄρα τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς (ΑΓ) εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν (ΔΓ) καὶ (ΑΒ). Τέτοιο εἶναι ἕνα μόνον, τὸ Ν.

Ἄρα, συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς (ΑΓ) εἶναι τὸ Ν.

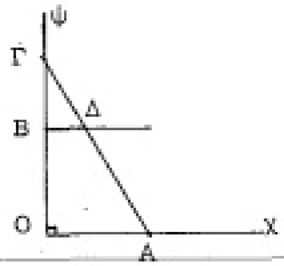
Μὲ τὸ νὰ εἶναι ὅμως τὰ Μ, Ν συμμετρικὰ πρὸς (ΑΓ), ἕπεται ὅτι εἶναι (ΜΝ) ⊥ (ΑΓ). Ἔτσι οἱ εὐθεῖες (ΜΝ) καὶ (ΒΔ) εἶναι κάθετοι τῆς αὐτῆς εὐθείας (ΑΓ) καὶ συνεπῶς εἶναι παράλληλοι ὅ.ἔ.δ.

ασκησεις δια την δ΄ ταξιν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Δ 30 Ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox, Oy ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ ἴσα πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα α. Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας]O, y) λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ Β παράλληλον τῆς Ox, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{A\Delta^2} + \frac{1}{A\Gamma^2}$$

εἶναι σταθερόν, ὅταν τὸ Γ διατρέχῃ τὴν ἀνοικτὴν ἡμιευθεῖαν]O, y).



Ἀπόδειξις. Μία εἰδικὴ θέσις τοῦ μεταβλητοῦ σημείου Γ εἶναι ἡ θέσις του εἰς τὸ Β. Τότε ἔχομεν:

$$\Delta = B, \ [\Gamma A] = [AB] = [A\Delta].$$

Ἐπομένως:

$$\frac{1}{A\Delta^2} + \frac{1}{A\Gamma^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{2}{AB^2} = \frac{2}{OA^2+OB^2}$$

ἄρα $$\frac{1}{A\Delta^2} + \frac{1}{A\Gamma^2} = \frac{2}{\alpha^2+\alpha^2} = \frac{2}{2\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Ἂν λοιπὸν τὸ $\dfrac{1}{A\Delta^2} + \dfrac{1}{A\Gamma^2}$ μένῃ πράγματι σταθερὸν ὅταν τὸ Γ διατρέχῃ τὴν ἡμιευθεῖαν]O, y), πρέπει καὶ διὰ κάθε Γ ∈]O, y) Γ ≠ B νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης:

$$\frac{1}{A\Delta^2} + \frac{1}{A\Gamma^2} = \frac{1}{\alpha^2} \qquad (1)$$

Ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μὲ τήν:

$$\frac{A\Gamma^2}{A\Delta^2} + 1 = \frac{A\Gamma^2}{\alpha^2} \qquad (2)$$

Ἀλλὰ διὰ κάθε Γ ∈]O, y) ἔχομεν $A\Gamma^2 = OA^2 + O\Gamma^2$ λόγῳ τοῦ τριγώνου ΟΑΓ ὀρθογωνίου εἰς τὸ Ο, ἄρα:

$$A\Gamma^2 = \alpha^2 + O\Gamma^2,$$

διότι:

$$\frac{A\Gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + O\Gamma^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{O\Gamma^2}{\alpha^2} \qquad (3)$$

'Από τό άλλο μέρος, έπειδή τά εύθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΑΔ εύρίσκονται έπί μιάς καί τής αύτής εύθείας, θά είναι άνάλογα τών προβολών των έπί μιάς καί τής αύτής εύθείας καί συνεπώς έχομεν :

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{\text{ΟΓ}}{\alpha}, \text{ όπότε } \frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΑΔ}^2} = \frac{\text{ΟΓ}^2}{\alpha^2} \qquad (4)$$

Λόγῳ τών (3) καί (4), ή (1) γράφεται :

$$\frac{\text{ΟΓ}^2}{\alpha^2} + 1 = 1 + \frac{\text{ΟΓ}^2}{\alpha^2},$$

ή όποία είναι άληθής πρότασις.

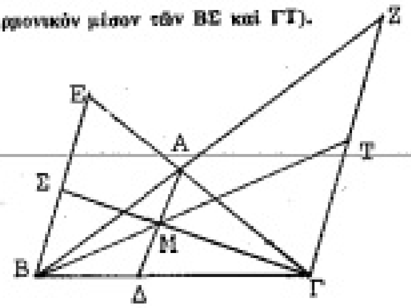
'Αληθεύει λοιπόν ή (2), διά κάθε $\text{Γ} \in]\text{Ο}, y)$ καί διά τοῦτο άληθεύει καί ή ίσοδύναμος αύτής ή (1) ö.έ.δ.

Δ.31 'Εκ τών κορυφών Β καί Γ τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται παράλληλοι εύθείαι τέμνουσαι τάς προεκτάσεις τών ΓΑ καί ΒΑ άντιστοίχως είς Ε καί Ζ. 'Εάν Σ καί Τ είναι τά μέσα τών τμημάτων ΒΕ καί ΓΖ άντιστοίχως, Μ τό σημείον τομής τών ΒΤ καί ΓΣ καί Δ τό σημείον τομής τών ΑΜ καί ΒΓ, νά δειχθοῦν :

α) ότι ΑΜ ∥ ΓΖ, β) ότι ΑΜ = ΜΔ, γ) ότι :

$$\frac{2}{\text{ΑΔ}} = \frac{1}{\text{ΒΣ}} + \frac{1}{\text{ΓΤ}}$$

(τό ΑΔ άρμονικόν μέσον τών ΒΣ καί ΓΤ).



'Απόδειξις ότι ΑΜ ∥ ΓΖ. 'Η εύθεία ΑΜ διαιρεί τίς πλευρές ΒΖ, ΒΤ τοῦ τριγώνου ΒΖΤ όμοιοτρόπως (έσωτερικώς καί τίς δύο). 'Επομένως θά είναι ή ΑΜ παράλληλος πρός τό ύποστήριγμα ΓΖ τής τρίτης πλευράς άν, καί μόνον άν διαιρή κατά τόν αύτόν λόγον τά τμήματα ΒΖ, ΒΤ, δηλαδή άν, καί μόνον άν ίσχύη :

$$\frac{\overline{\text{ΑΒ}}}{\overline{\text{ΑΖ}}} = \frac{\overline{\text{ΜΒ}}}{\overline{\text{ΜΤ}}} \qquad (1) \qquad \text{(Θεώρημα Θαλοῦ)}$$

Τό Α είναι κοινόν σημείον τών διαγωνίων τοῦ τραπεζίου ΒΓΖΕ βάσεων ΒΕ, ΓΖ καί διά τοῦτο τά τμήματα είς τά όποία χωρίζονται αί διαγώνιοι ΒΖ, ΓΕ ύπό τοῦ Α είναι άνάλογα τών παρακειμένων βάσεων. "Αρα θά είναι :

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΖ}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΓΖ}} \qquad (2)$$

Τό Μ είναι τό κοινόν σημείον τών διαγωνίων τοῦ τραπεζίου ΒΓΤΣ βάσεων ΓΤ, ΒΣ. 'Επομένως τά τμήματα είς τά όποία χωρίζονται ύπό τοῦ Μ αί διαγώνιοι ΒΤ, ΓΣ θά είναι άνάλογα τών παρακειμένων βάσεων.

"Αρα θά είναι :

$$\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΤ}} = \frac{\text{ΒΣ}}{\text{ΓΤ}} \qquad (3)$$

'Επειδή τά Σ καί Τ είναι τά μέσα τών ΒΕ καί ΓΖ, έπεται ότι :

$$\text{ΒΣ} = \frac{1}{2}\text{ΒΕ} \quad \text{καί} \quad \text{ΓΤ} = \frac{1}{2}\text{ΓΖ}$$

καί συνεπώς :

$$\frac{\text{ΒΣ}}{\text{ΓΤ}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ΒΕ}}{\frac{1}{2}\text{ΓΖ}},$$

άπό όπου :

$$\frac{\text{ΒΣ}}{\text{ΓΤ}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΓΖ}},$$

ή όποία, λόγῳ τών (3) καί (2) γράφεται :

$$\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΤ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΖ}} \qquad (4)$$

'Από τήν (4) φαίνεται ότι οί άλγεβρικοί λόγοι :

$$\frac{\overline{\text{ΑΒ}}}{\overline{\text{ΑΖ}}} \quad \text{καί} \quad \frac{\overline{\text{ΜΒ}}}{\overline{\text{ΜΤ}}}$$

είναι άπολύτως ίσοι. Είναι όμως καί όμόσημοι (άρνητικοί καί οί δύο). "Αρα θά είναι ίσοι. Δηλαδή θά άληθεύη ή (1) καί συνεπώς θά είναι πράγματι ΑΜ ∥ ΓΖ.

'Απόδειξις ότι ΑΜ = ΑΔ. Τά εύθύγραμμα τμήματα ΑΜ καί ΜΔ είναι τά δύο τμήματα είς τά όποία χωρίζεται τό εύθύγραμμον τμήμα ΑΔ ύπό τής διαμέσου ΒΤ τοῦ τριγώνου ΒΓΖ, τό δέ εύθύγραμμον τμήμα ΑΔ είναι παράλληλον πρός τήν πλευράν ΓΖ τοῦ άνωτέρω τριγώνου καί περιέχεται μεταξύ τών δύο άλλων πλευρών ΒΖ, ΒΓ αύτοῦ. Διά τοῦτο θά διχοτομήται ύπό τής διαμέσου τής τρίτης πλευράς αύτοῦ τοῦ τριγώνου.

(Κάθε διάμεσος τριγώνου διχοτομεί τά εύθύγραμμα τμήματα, τά όποία είναι παράλληλα πρός τήν άντίστοιχον τής διαμέσου πλευράν τοῦ τριγώνου καί περιέχονται μεταξύ τών δύο άλλων πλευρών τοῦ τριγώνου). "Αρα θά είναι πράγματι ΑΜ = ΜΔ.

'Απόδειξις ότι :

$$\frac{2}{\text{ΑΔ}} = \frac{1}{\text{ΒΣ}} + \frac{1}{\text{ΓΤ}}.$$

'Η σχέσις αύτή μετασχηματίζεται ίσοδυνάμως διαδοχικώς ώς έξής.

$$2 = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΒΣ}} + \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΓΤ}}, \; 1 = \frac{\text{ΑΔ}}{2\text{ΒΣ}} + \frac{\text{ΑΔ}}{2\text{ΓΤ}}$$

καί τελικά, έπειδή Σ είναι τό μέσον τοῦ ΒΕ καί Τ τό μέσον τοῦ ΓΖ, είς :

$$1 = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΒΕ}} + \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΓΖ}} \qquad (5)$$

'Αναγόμεθα λοιπόν είς τήν άπόδειξιν τής (5)

Λόγῳ τών παραλλήλων ΒΕ, ΑΔ, ΓΖ συνάγεται ότι τά τρίγωνα :

$$\left.\begin{matrix}\text{ΑΔΓ}\\ \text{ΕΒΓ}\end{matrix}\right\}$$

είναι όμοια καθώς άκόμη καί τά τρίγωνα :

$$\left.\begin{matrix}\text{ΑΒΔ}\\ \text{ΖΒΓ}\end{matrix}\right\}$$

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν :

$$\left.\begin{matrix} A\Delta\Gamma \\ EB\Gamma \end{matrix}\right\} \text{ συνάγεται ὅτι } \frac{A\Delta}{EB} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} \qquad (6)$$

καὶ ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν :

$$\left.\begin{matrix} AB\Delta \\ ZB\Gamma \end{matrix}\right\} \text{ συνάγεται ὅτι } \frac{A\Delta}{Z\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma} \qquad (7)$$

Ἀπὸ (6) καὶ (7), διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, συνάγεται ὅτι :

$$\frac{A\Delta}{EB} + \frac{A\Delta}{Z\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} + \frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma + B\Delta}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{B\Gamma} = 1,$$

ἄρα

$$\frac{A\Delta}{EB} + \frac{A\Delta}{Z\Gamma} = 1.$$

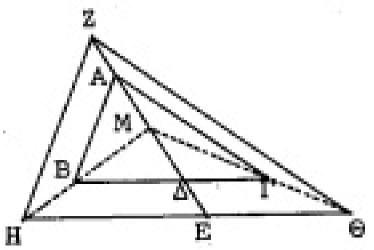
Ἀληθεύει λοιπὸν ἡ (5)

Διὰ τοῦτο ἀληθεύει καὶ ἡ ἰσοδύναμος αὐτῆς :

$$\frac{2}{A\Delta} = \frac{1}{B\Sigma} + \frac{1}{\Gamma T}.$$

Δ 32 Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τυχὸν σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τὸ μέσον Μ τοῦ ΑΔ. Σημειώνομεν τυχὸν σημεῖον Ε ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΜΔ καὶ τὸ συμμετρικὸν Ζ τοῦ Ε πρὸς κέντρον τὸ Μ. Ἀκολούθως κατασκευάζομεν τὴν παράλληλον τῆς ΒΓ ἀπὸ τὸ Ε καὶ τὰς παραλλήλους τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀπὸ τὸ Ζ. Σχηματίζεται τρίγωνον ΖΗΘ, ὅπου ΖΗ ἡ παράλληλος τῆς ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(B\Gamma\Theta H) = (ABHZ) + (A\Gamma\Theta Z) \qquad (1)$$



Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΗ, μετὰ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ πλευρὰν τοῦ τριγώνου ΜΑΒ, θὰ διαιρῇ τὶς ἄλλες δύο πλευρὲς αὐτοῦ τοῦ τριγώνου κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον (Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ).

Ἔτσι, ἐπειδὴ διαιρεῖ ἐξωτερικῶς τὴν πλευρὰν ΜΑ κατὰ λόγον $\frac{ZM}{ZA}$, θὰ διαιρῇ κατὰ ἴσον λόγον ἐξωτερικῶς καὶ τὴν πλευρὰν ΜΒ. Ἡ εὐθεῖα ΗΘ, ὡς παράλληλος τῆς πλευρᾶς ΒΔ τοῦ τριγώνου ΜΒΔ θὰ διαιρῇ τὶς ἄλλες δύο πλευρές του κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἐπομένως ἡ ΗΘ διαιρεῖ ἐξωτερικῶς τὴν πλευρὰν ΜΒ κατὰ λόγον ἴσον μὲ $\frac{EM}{E\Delta}$, ὅσος εἶναι ὁ λόγος, κατὰ τὸν ὁποῖον διαιρεῖ ἐξωτερικῶς καὶ τὴν πλευρὰν ΜΔ. Ἀλλά, ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι κέντρον συμμετρίας τῶν Α, Δ καθὼς καὶ τῶν Ζ, Ε, ἔχομεν :

$$EM = ZM \quad \text{καὶ} \quad E\Delta = ZA, \quad \text{ἄρα}$$

$$\frac{EM}{E\Delta} = \frac{ZM}{ZA}.$$

Δηλαδή, ἡ εὐθεῖα ΖΗ καὶ ἡ ΘΗ διαιροῦν ἐξωτερικῶς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΒ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΒ, διότι, ὡς γνωστόν, ἕνα μόνον σημεῖον ὑπάρχει ποὺ νὰ διαιρῇ ἐξωτερικῶς ἕνα τμῆμα κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἔτσι τὸ κοινὸν σημεῖον Η τῶν ΖΗ καὶ ΘΗ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΒ.

Ὁμοίως, ἡ εὐθεῖα ΖΘ, ὡς παράλληλος τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τριγώνου ΜΑΓ διαιρεῖ ἐξωτερικῶς τὴν πλευρὰν ΜΓ αὐτοῦ κατὰ λόγον ἴσον πρὸς τὸν $\frac{ZM}{ZA}$ κατὰ τὸν ὁποῖον διαιρεῖ καὶ τὴν πλευρὰν ΜΑ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΘΗ, ὡς παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΔ τοῦ τριγώνου ΜΓΔ, θὰ διαιρῇ ἐξωτερικῶς τὴν πλευρὰν ΜΓ κατὰ λόγον ἴσον πρὸς τὸν $\frac{EM}{E\Delta}$, κατὰ τὸν ὁποῖον διαιρεῖ καὶ τὴν πλευρὰν ΜΔ.

Ἀλλὰ εἶναι, ὡς ἐδείχθη :

$$\frac{ZM}{ZA} = \frac{EM}{E\Delta}.$$

Ἐπομένως, ἡ εὐθεῖα ΖΘ καὶ ἡ ΘΗ, διαιροῦν ἐξωτερικῶς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΓ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ διὰ τοῦτο τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΓ καὶ ἔτσι, τὸ κοινὸν σημεῖον Θ τῶν ΖΘ καὶ ΘΗ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΓ.

Ἔχοντες τώρα κατὰ νοῦν ὅτι μία διάμεσος τριγώνου χωρίζει τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα, συμπεραίνομεν ὅτι θὰ εἶναι :

$$(HME) = (HMZ) \quad (2) \qquad (BM\Delta) = (BMA) \quad (3)$$

ἀπὸ ὅπου διὰ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη, ἔχομεν :

$$(HME) - (BM\Delta) = (HMZ) - (BMA), \quad \text{δηλαδή}$$

$$(HB\Delta E) = (AZHB) \quad (4)$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ ΘΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΕΘΖ καὶ ἡ ΓΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΔΓΑ τὸ δὲ Γ ἐπὶ τῆς ΘΜ, ἔχομεν :

$$(\Theta ME) = (\Theta MZ) \quad (5) \text{ καὶ } \quad (\Gamma M\Delta) = (\Gamma MA) \quad (6),$$

ἀπὸ ὅπου διὰ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη, ἔχομεν :

$$(\Theta ME) - (\Theta M\Delta) = (\Theta MZ) - (\Gamma MA), \quad \text{δηλαδή}$$

$$(\Theta\Gamma\Delta E) = (A\Gamma\Theta Z) \quad (7)$$

Ἀπὸ (4) καὶ (7) διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, συνάγεται ὅτι :

$$(HB\Delta E) + (\Theta\Gamma\Delta E) = (AZHB) + (A\Gamma\Theta Z) \quad \text{δηλαδή}$$

$$(B\Gamma\Theta H) = (ABHZ) + (A\Gamma\Theta Z)$$

ποὺ εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἀποδεικτέα (1).

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. Δ.33 Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος :

$$k = \frac{\eta\mu 135^\circ \eta\mu(210^\circ - \alpha)\sigma\upsilon\nu(\alpha - 120^\circ) - \sigma\upsilon\nu 315^\circ \sigma\upsilon\nu(750^\circ - \alpha)\eta\mu(\alpha - 120^\circ)}{\varepsilon\varphi(140^\circ - \beta)\varepsilon\varphi(310^\circ + \beta)}$$

Λύσις. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι ἡ συνάρτησις $y = \varepsilon\varphi x^\circ$ εἶναι ὡρισμένη διὰ κάθε x, τοιοῦτον ὥστε :

$$x \neq k \cdot 180^\circ + 90^\circ \quad (k \in Z).$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι :

$$140^\circ - \beta \neq k\cdot 180^\circ + 90^\circ \iff \beta \neq 50^\circ - k\cdot 180^\circ \quad (k \in Z) \quad \text{καὶ}$$

$$310^\circ + \beta \neq k\cdot 180^\circ + 90^\circ \iff$$

$$\iff \beta \neq k\cdot 180^\circ - 220 = k\cdot 180^\circ - 180^\circ - 40, \quad \text{δηλ.}$$

$$\beta \neq (k-1)180^\circ - 40^\circ.$$

Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι $\beta \neq 50^\circ \bmod 180^\circ$ καθὼς καὶ

$$\beta \neq -40^\circ \bmod 180^\circ.$$

Ἐπὶ πλέον, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος πρέπει νὰ εἶναι $\neq 0$, διὰ τὸ δεδομένον κλάσμα πρέπει νὰ εἶναι :

$$\text{σφ}(140^\circ - \beta) \neq 0 \quad \text{καὶ} \quad \text{σφ}(310^\circ + \beta) \neq 0.$$

Διὰ τοῦτο, ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω περιορισμῶν διὰ τὴν τιμὴν τοῦ β, πρέπει ἀκόμη νὰ εἶναι :

$$140^\circ - \beta \neq k\cdot 180^\circ \iff \beta \neq 140^\circ - k\cdot 180^\circ \quad (k \in Z),$$

$$\text{δηλ.} \quad \beta \neq 140^\circ \bmod 180^\circ \quad \text{καὶ}$$

$$310^\circ - \beta \neq k\cdot 180^\circ \iff \beta \neq 310 - k\cdot 180^\circ \quad (k \in Z),$$

$$\text{δηλ.} \quad \beta \neq 310^\circ \bmod 180^\circ.$$

Ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ -40° καὶ 140° εἶναι ἰσοδύναμοι mod 180°, διότι ἡ διαφορά των εἶναι πολ. $180^\circ (140 - (-40^\circ) = 180^\circ =$ πολ. 180°), καθὼς καὶ οἱ ἀριθμοὶ -50° καὶ 310°, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον :

$$(310^\circ - (-50^\circ) = 360^\circ = 2\cdot 180^\circ = \text{πολ. } 180^\circ).$$

Ἔτσι, τελικὰ πρέπει νὰ εἶναι :

$\beta \neq 40^\circ \bmod 180^\circ$, $\beta \neq 50^\circ \bmod 180^\circ$ καὶ $\beta \neq -50^\circ \bmod 180^\circ$

Ὑπὸ τοὺς ὅρους αὐτοὺς τὸ κλάσμα k ἔχει πραγματικὴν τιμήν.

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν αὐτῆς παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι :

$\text{ημ}\, 135^\circ = \text{ημ}\, 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (παραπληρωματικὰ τόξα)

$\text{ημ}(210^\circ - \alpha) = -\text{ημ}(30^\circ - \alpha)$ (τόξα διαφέροντα κατὰ 180°)

$$\text{συν}(\alpha - 120^\circ) = \text{ημ}[(\alpha - 120^\circ) + 90^\circ] = \text{ημ}(\alpha - 30^\circ) = -\text{ημ}(30^\circ - \alpha)$$

$\text{συν}\, 315^\circ = \text{συν}\, 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (τόξα ἔχοντα ἄθροισμα 360°)

$\text{συν}(750^\circ - \alpha) = \text{συν}(750^\circ - \alpha - 2\cdot 360^\circ) = \text{συν}(30^\circ - \alpha)$

$\text{ημ}(\alpha - 120^\circ) = -\text{συν}[(\alpha - 120^\circ) + 90^\circ] = -\text{συν}(\alpha - 30^\circ)$

$\text{εφ}(140^\circ - \beta) = -\text{εφ}(40^\circ + \beta)$ (παραπληρωματικὰ τόξα)

$\text{εφ}(310^\circ + \beta) = -\text{εφ}(50^\circ - \beta)$ (τόξα ἔχοντα ἄθροισμα 360°)

$= -\text{σφ}(40^\circ + \beta)$ (συμπληρωματικὰ τόξα).

Εἰσάγομεν τὶς τιμὲς αὐτὲς εἰς τὸ δεδομένον κλάσμα, ἔχομεν :

$$k = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \text{ημ}(30^\circ - \alpha)\text{ημ}(30^\circ - \alpha) + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{συν}(30^\circ - \alpha)\text{συν}(30^\circ - \alpha)}{\text{εφ}(40^\circ + \beta)\text{σφ}(40^\circ + \beta)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ημ}^2(30^\circ - \alpha) + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{συν}^2(30^\circ - \alpha)}{1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}[\text{ημ}^2(30^\circ - \alpha) + \text{συν}^2(30^\circ - \alpha)] = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1,$$

ἄρα $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, διὰ κάθε α, ὑπὸ τὸν ὅρον ἡ διαφορὰ τῆς τιμῆς τοῦ β ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 40°, 50°, -50° νὰ μὴ εἶναι πολ. 180°.

Δ.34 Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$p = \frac{\text{σφ}\frac{23\pi}{11}}{1 + \text{σφ}\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)\text{σφ}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} - \frac{\text{ημ}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\text{σφ}\frac{13\pi}{22}}{\text{σφ}(3\pi + \alpha)}.$$

Λύσις. Ἡ παρουσία τῆς «συνεφαπτομένης» ἐπιβάλλει νὰ ἐξασφαλισθῇ ἡ ὕπαρξις τιμῆς δι' αὐτήν, διότι ἡ συνάρτησις $y = \text{σφ}x$ εἶναι ὡρισμένη μόνον διὰ $x \in R$, τοιοῦτον ὥστε νὰ ἰσχύῃ $x \neq k\pi$, $(k \in Z)$. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι :

$$3\pi + \alpha \neq k\pi, \ \text{δηλ.}\ \alpha \neq (k-3)\pi \quad (1).$$

Ὁ $k-3$ ὅμως δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε ἀκεραίαν τιμήν, ὅταν ὁ k διατρέχῃ τὸ σύνολον Z. Δύναται λοιπὸν νὰ τεθῇ $k - 3 = \lambda$ $(\lambda \in Z)$ καὶ ἡ (1) γράφεται :

$$\alpha \neq \lambda\pi \ (\lambda \in Z) \quad (2).$$

Ἐπίσης πρέπει νὰ εἶναι :

$$\frac{7\pi}{2} - \alpha \neq k\pi \iff \alpha \neq (7-2k)\frac{\pi}{2} \iff \alpha \neq [2(3-k)+1]\frac{\pi}{2} \quad (3)$$

καὶ

$$\frac{3\pi}{2} - \alpha \neq k\pi \iff \alpha \neq (3-2k)\frac{\pi}{2} \iff$$

$$\iff \alpha \neq [2(1-k)+1]\frac{\pi}{2} \quad (4).$$

Ἀλλὰ οἱ $3-k$ καὶ $1-k$ δύνανται νὰ λάβουν ὁ καθένας οἱανδήποτε ἀκεραίαν τιμήν, ὅταν ὁ k διατρέχῃ τὸ σύνολον Z καὶ διὰ τοῦτο δύναται νὰ τεθῇ $3 - k = \lambda \in Z$ καθὼς καὶ $1 - k = \lambda \in Z$.

Ἑπομένως ἡ (3) καὶ ἡ (4) δύνανται νὰ συμπτυχθοῦν εἰς :

$$\alpha \neq (2\lambda+1)\frac{\pi}{2} \ (\lambda \in Z) \quad (5).$$

Ἡ (2) μαζὶ μὲ τὴν (5) ἀνάγονται εἰς τήν :

$$\alpha \neq \mu\frac{\pi}{2} \ (\mu \in Z) \quad (6),$$

διότι ἡ (2) περιλαμβάνει ὅλα τὰ ἄρτια πολλαπλάσια τοῦ $\dfrac{\pi}{2}$ καὶ ἡ (5) ὅλα τὰ περιττὰ πολλαπλάσια τοῦ $\dfrac{\pi}{2}$.

Μένει νὰ ἐξετασθῇ ἂν μὲ τὶς τιμὲς (5) τοῦ (α) ἐξασφαλίζεται καὶ ὁ μὴ μηδενισμὸς τοῦ παρονομαστοῦ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἂν εἶναι $\alpha \neq (2\lambda+1)\dfrac{\pi}{2}$, τότε θὰ εἶναι :

$$3\pi + \alpha \neq 3\pi + (2\lambda+1)\frac{\pi}{2}, \ \text{δηλ.}\ 3\pi + \alpha \neq (3+\lambda)\pi + \frac{\pi}{2},$$

ἀπὸ ὅπου συνάγεται ὅτι εἶναι : $\text{σφ}(3\pi + \alpha) \neq \text{σφ}\dfrac{\pi}{2}$, διότι $(3+\lambda)\pi =$ πολ. π, ἄρα $\text{σφ}(3\pi + \alpha) \neq 0$.

Ἔπειτα, ἐπειδὴ $\dfrac{7\pi}{2} - \alpha = 2\pi + \dfrac{3\pi}{2} - \alpha$, ἕπεται ὅτι :

$$\text{σφ}\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \text{σφ}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right), \ \text{ἄρα :}$$

$$1 + \text{σφ}\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)\text{σφ}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = 1 + \text{σφ}^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) \neq 0.$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα παράστασις ἔχει πραγματικὴν τιμὴν ἂν καὶ μόνον ἂν ἰσχύῃ διὰ τὸν α ἡ σχέσις (5).

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς τιμῆς αὐτῆς παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\text{εφ}\,\frac{23\pi}{11} = \text{εφ}\left(2\pi + \frac{\pi}{11}\right) = \text{εφ}\,\frac{\pi}{11}$$

$$\text{σφ}\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \text{σφ}\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{σφ}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{εφ}\,\alpha$$

$$\text{σφ}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \text{σφ}\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{σφ}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{εφα}$$

$$\text{ημ}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \text{ημ}\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{συν}\,\alpha$$

$$\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{ημ}\,\alpha$$

$$\text{σφ}\,\frac{13\pi}{22} = \text{σφ}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{11}\right) = -\text{εφ}\,\frac{\pi}{11}$$

$$\text{σφ}(3\pi + \alpha) = \text{σφα} = \frac{\text{συν}\,\alpha}{\text{ημ}\,\alpha}.$$

Εἰσάγοντες τὶς ἀνωτέρω τιμὲς εἰς τὴν δεδομένην παράστασιν ἔχομεν :

$$p = \frac{\text{εφ}\,\frac{\pi}{11}}{1+\text{εφ}^2\alpha} - \frac{-\text{συν}\,\alpha(-\text{ημα})\left(-\text{εφ}\,\frac{\pi}{11}\right)}{\frac{\text{συν}\,\alpha}{\text{ημ}\,\alpha}} =$$

$$= \frac{\text{εφ}\,\frac{\pi}{11}}{\frac{1}{\text{συν}^2\alpha}} + \frac{\text{ημ}^2\alpha\,\text{εφ}\,\frac{\pi}{11}}{1} = \text{εφ}\,\frac{\pi}{11}\cdot\text{συν}^2\alpha + \text{ημ}^2\alpha\,\text{εφ}\,\frac{\pi}{11} =$$

$$= \text{εφ}\,\frac{\pi}{11}\,(\text{συν}^2\alpha + \text{ημ}^2\alpha) = 1\cdot\text{εφ}\,\frac{\pi}{11}, \quad \text{ἄρα}$$

$$p = \text{εφ}\,\frac{\pi}{11}, \ \text{διὰ κάθε}\ \alpha \neq (2\lambda+1)\frac{\pi}{2}\ (\lambda \in Z).$$

ΑΛΓΕΒΡΑ. Δ.35 Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ παραστατικὰ σημεῖα τοῦ μοναδιαίου μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ἀντιθέτου του, τοῦ καθαροῦ μιγαδικοῦ $\alpha+\beta i$ καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του $(\alpha+\beta i)^{-1}$ εἰς τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον, εἶναι ὁμόκυκλα σημεῖα.

Ἀπόδειξις. Τὰ ἐν λόγῳ σημεῖα εἶναι τὰ σημεῖα :

$$A(1,\ 0)\quad B(-1,\ 0),\quad \Gamma(\alpha,\ \beta)\quad \text{καὶ}\quad \Delta\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},\ \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$$

Τὰ δύο πρῶτα ἀνήκουν εἰς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y.

Τὰ δύο τελευταῖα εἶναι εἰς ἀντίθετα μέρη τοῦ ἄξονος τῶν x, διότι ἡ τεταγμένη β τοῦ ἑνὸς εἶναι ἑτερόσημος τῆς τεταγμένης τοῦ ἄλλου

Ἔτσι τὰ Α, Β, Γ δὲν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ Α, Β, Δ.

Ἑπομένως τὰ Α, Β, Γ ὁρίζουν ἕνα μοναδικὸν κύκλον, τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ Α, Β, Δ.

Θὰ εἶναι ὁμόκυκλα ἄν, καὶ μόνον ἂν ὁ κύκλος (ΑΒΓ) περιέχῃ καὶ τὸ σημεῖον Δ.

Ὁ κύκλος (ΑΒΓ) ἔχει τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ τέτοια εἶναι ὁ ἄξων τῶν y λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν Α καὶ Β ὡς πρὸς τὸν ἄξονα αὐτόν.

Ἑπομένως τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (ΑΒΓ) εἶναι σημεῖον K(0, y) τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, τοιοῦτον ὥστε :

$$KA = K\Gamma \iff KA^2 = K\Gamma^2 \qquad (1)$$

Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{KA}$ ἔχει συντεταγμένας τὸ ζεῦγος $(1-0,\ 0-y)$ δηλαδὴ τὸ ζεῦγος $(1,\ -y)$. Ἑπομένως :

$$KA^2 = 1^2 + y^2 = 1 + y^2.$$

Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{K\Gamma}$ ἔχει συντεταγμένας τὸ ζεῦγος $(\alpha-0,\ \beta-y)$ δηλαδὴ τὸ $(\alpha,\ \beta-y)$. Ἑπομένως :

$$K\Gamma^2 = \alpha^2 + (\beta-y)^2.$$

Ἔτσι ἡ (1) ἀνάγεται εἰς τὴν :

$$1+y^2 = \alpha^2+(\beta-y)^2 \iff 1+y^2 = \alpha^2+\beta^2+y^2-2\beta y \iff$$

$$\iff 2\beta y = \alpha^2+\beta^2-1$$

ἀπὸ ὅπου, ἐπειδὴ εἶναι $\beta \neq 0$, προκύπτει ὅτι :

$$y = \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}$$

Ἑπομένως, κέντρον τοῦ κύκλου (ΑΒΓ) εἶναι τὸ σημεῖον $K\left(0,\ \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)$ καὶ μῆκος ἀκτῖνος του τὸ ΚΑ.

Διὰ νὰ περιέχῃ αὐτὸς ὁ κύκλος καὶ τὸ Δ, δηλαδὴ διὰ νὰ εἶναι ὁμόκυκλα τὰ Α, Β, Γ, Δ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι:

$$KA = K\Delta \iff KA^2 = K\Delta^2 \qquad (2)$$

Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{KA}$ ἔχει συντεταγμένας τὸ ζεῦγος :

$$\left(1-0,\ 0-\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)$$

δηλαδὴ τὸ ζεῦγος :

$$\left(1,\ -\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)$$

Ἑπομένως :

$$KA^2 = 1 + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)^2 \qquad (3)$$

Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{K\Delta}$ ἔχει συντεταγμένας τὸ ζεῦγος :

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},\ \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)$$

Ἑπομένως :

$$K\Delta^2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} + \frac{\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)^2 + \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$= \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)^2 + \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)^2 + \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$= \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)^2,$$

ἄρα $$K\Delta^2 = 1 + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}\right)^2 \quad (4).$$

Ἀπὸ (3) καὶ (4) φαίνεται ὅτι ἀληθεύει ἡ (2).

Ἄρα, τὰ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμόκυκλα.

Δ.36 Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x καὶ y ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν :

$$3x-2y = 5i - xi - 1 - 2yi.$$

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται ἰσοδυνάμως :

$$3x-2y+xi+2yi = -1+5i, \quad \text{ἢ}$$

$$3x-2y+(x+2y)i = -1+5i$$

αὕτη δὲ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y &= -1 \\ x+2y &= 5 \end{aligned}\right\} \quad (I).$$

Τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει μοναδικὴν λύσιν, διότι ἡ ὁρίζουσα αὐτοῦ εἶναι :

$$3\cdot 2 - (-2\cdot 1) = 6+2 = 8 \neq 0.$$

Εἶναι δέ :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & +2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+10}{6+2} = \frac{8}{8} = 1 \quad \text{καὶ}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{15+1}{8} = 2.$$

Ἄρα αἱ ζητούμεναι τιμαὶ εἶναι : $x = 1$, $y = 2$.

Δ.37 Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(6-2\sqrt{5})^{\frac{3}{2}} - (6+2\sqrt{5})^{\frac{3}{2}} = -32.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $6-2\sqrt{5} = (5+1) - 2\sqrt{5} =$

$$= (\sqrt{5})^2 + 1^2 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)^2,$$

ὁμοίως δὲ $\quad 6+2\sqrt{5} = (\sqrt{5}+1)^2$,

τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος, γράφεται :

$$[(\sqrt{5}-1)^2]^{\frac{3}{2}} - [(\sqrt{5}+1)^2]^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{5}-1)^3 - (\sqrt{5}+1)^3.$$

Ἐπειδὴ $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, ἕπεται ὅτι :

$$(\sqrt{5}-1)^3 - (\sqrt{5}+1)^3 = [(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{5}+1)]\cdot$$

$$\cdot[(\sqrt{5}-1)^2 + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) + (\sqrt{5}+1)^2] =$$

$$= -2\cdot(6-2\sqrt{5}+5-1+6+2\sqrt{5}) = -2(6+4+6) = -32.$$

Ἄρα $[(\sqrt{5}-1)^2]^{\frac{3}{2}} - [(\sqrt{5}+1)^2]^{\frac{3}{2}} = -32$ ὅ.ἔ.δ.

ασκησεις δια την ε΄ ταξιν

ΑΛΓΕΒΡΑ. Ε.37 Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\delta}\right) \geqslant 81 \quad (1).$$

Λύσις. Ἡ (1) μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως διαδοχικῶς ὡς ἑξῆς :

$$\frac{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)(\delta-1)}{\alpha\beta\gamma\delta} \geqslant 81,$$

$$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)(\delta-1) \geqslant 81\,\alpha\beta\gamma\delta \quad (\text{διότι } \alpha\beta\gamma\delta > 0),$$

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta) \geqslant 81\,\alpha\beta\gamma\delta \quad (2).$$

Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$ (δεδομένον), ἡ (2) δύναται νὰ γραφῇ :

$$(\beta+\gamma+\delta)(\gamma+\delta+\alpha)(\delta+\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma) \geqslant 81\,\alpha\beta\gamma\delta \quad (3).$$

Ἔτσι ἡ (1) ἀνάγεται εἰς τὴν (3).

Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τριῶν θετικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι κατώτερον ἀπὸ τὸ γεωμετρικὸν μέσον αὐτῶν. Ἐπομένως, ἐπειδὴ οἱ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι θετικοί, ἔχομεν :

$$\frac{\beta+\gamma+\delta}{3} \geqslant \sqrt[3]{\beta\gamma\delta}, \quad \frac{\gamma+\delta+\alpha}{3} \geqslant \sqrt[3]{\gamma\delta\alpha}, \quad \frac{\delta+\alpha+\beta}{3} \geqslant \sqrt[3]{\delta\alpha\beta} \quad \text{καὶ}$$

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geqslant \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}.$$

Ἔχομεν ἀνισότητες τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ τῶν ὁποίων τὰ μέλη εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

Διὰ τοῦτο ὁ πολλαπλασιασμὸς κατὰ μέλη δίδει ἀνισότητα τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ ἔχομεν :

$$\frac{(\beta+\gamma+\delta)(\gamma+\delta+\alpha)(\delta+\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}{81} \geqslant \sqrt[3]{\alpha^3\beta^3\gamma^3\delta^3}, \text{ δηλ.}$$

$$\frac{(\beta+\gamma+\delta)(\gamma+\delta+\alpha)(\delta+\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}{81} \geqslant \alpha\beta\gamma\delta,$$

ἀπὸ ὅπου συνάγεται ὅτι :

$$(\beta+\gamma+\delta)(\gamma+\delta+\alpha)(\delta+\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma) \geqslant 81\,\alpha\beta\gamma\delta,$$

ποὺ εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἀποδεικτέα (3).

Διὰ τοῦτο ἀληθεύει καὶ ἡ ἰσοδύναμος αὐτῆς (1) ὅ.ἔ.δ.

Ε 38 Δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $2^{4\nu+1} - 2^{2\nu} - 1$ $(\nu \in N)$ εἶναι **πολ/σιον τοῦ 9.**

Λύσις. Θέτομεν $f(\nu) = 2^{4\nu+1} - 2^{2\nu} - 1 \quad (\alpha)$

Τότε θὰ εἶναι :

$$f(\nu+1) = 2^{4(\nu+1)+1} - 2^{2(\nu+1)} - 1 = 2^{(4\nu+1)+4} - 2^{2\nu+2} - 1$$

$$= 2^4\cdot 2^{4\nu+1} - 2^2\cdot 2^{2\nu} - 1$$

δηλαδὴ $\quad f(\nu+1) = 16\cdot 2^{4\nu+1} - 4\cdot 2^{2\nu} - 1 \quad (\beta)$