Author: Γ. Στρατής

Title: Για το Ολοκλήρωμα

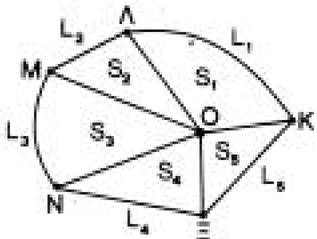
Abstract: Στο άρθρο αυτό αναφέρεται οτι ο Riemann με τη βοήθεια προσεγγιστικής μεθόδου που δεν διαφέρει ουσιαστικά από εκείνη του Αρχιμήδη, προσδιόρισε το εμβαδό ενός χωρίου. Τη διαδικασία της μεθόδου αυτής ο Riemann την ονόμασε ολοκλήρωση και τον αριθμό που προκύπτει ολοκλήρωμα. Στη συνέχεια το άρθρο ασχολείται με ορισμένα θέματα του Ολοκληρώματος Riemann.

ΓΙΑ ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Γ. Στρατής
Μαθηματικός: Αθήνα

Προκαταρκτικά

Είναι γνωστό το μήκος και το εμβαδό κυρτού πολυγώνου. Απ' τα πρώτα βήματα της επιστημονικής σκέψης παρουσιάστηκε το πρόβλημα της εξεύρεσης του μήκους L και του εμβαδού S κυρτού χωρίου του επιπέδου, που το περίγραμμά του δεν αποτελείται μόνο από ευθύγραμμα τμήματα (σχ. 1).



Σχ. 1

Χωρίς να έχουν διατυπώσει αξιώματα για το μήκος γραμμής και το εμβαδό χωρίου οι μαθηματικοί εργάζονταν για τον υπολογισμό τους αποδεχόμενοι ότι:

(i): Κάθε πεπερασμένη γραμμή έχει μήκος

(i): Κάθε χωρίο του επίπεδου με πεπερασμένο περίγραμμα έχει εμβαδό.

(ii): Αν ένα χωρίο του επιπέδου είναι μέρος ενός άλλου, τότε το μήκος του περιγράμματος και το εμβαδό του τμήματος είναι αριθμοί μικρότεροι των αντίστοιχων του αρχικού.

(iii): Αν μια πεπερασμένη γραμμή διαιρεθεί σε τμήματα, τότε το μήκος της είναι το άθροισμα των μηκών των τμημάτων της.
Δηλαδή:
$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$

(iii): Αν ένα χωρίο διαιρεθεί σε επιμέρους τμήματα, τότε το εμβαδό του είναι το άθροισμα των εμβαδών των τμημάτων που το χωρίσαμε.
Δηλαδή:
$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$

Για μεγάλο διάστημα οι προσπάθειες συγκεντρώθηκαν στο να ανάγουν την επίλυση του προβλήματος στην κατασκευή σχήματος ισοδύναμου (με το ίδιο μήκος, με το ίδιο εμβαδό). Έτσι φτάσαμε στα προβλήματα:

- της ευθειοποίησης κύκλου
- του τετραγωνισμού κυκλικού δίσκου.

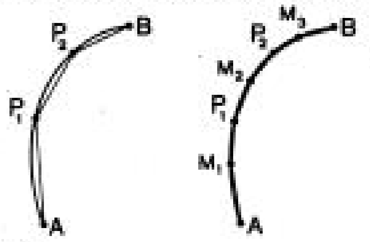
Από δω και μετά δεσπόζει η προσωπικότητα του Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.), που αντικατέστησε την ιδέα της «κατασκευής» (του ισοδύναμου σχήματος) με εκείνη της «μέτρησης». Σ' αυτό βοηθήθηκε απ' τις προσπάθειες, αν και ατελέσφορες, που 'καναν οι Ελεάτες: Αντιφών ο Αθηναίος και Βρύσων ο Ηρακλειώτης (420 π.Χ) για να ε-πιλύσουν τα παραπάνω προβλήματα.

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε μια μέθοδο που ονομάστηκε «εξαντλητική» και οι ι-στορικοί αποδίδουν στον Εύδοξο (407-354 π.Χ) για να υπολογίσει το μήκος κύκλου. Ξεκίνησε εγγράφοντας και περιγράφοντας σ' ένα κύκλο κανονικά εξάγωνα. Κατόπιν έγραψε και περίγραψε στον ίδιο κύκλο κανονικά 12-γωνα, 24-γωνα κ.ο.κ. Έφτασε έ-τσι, μέσω των περιμέτρων εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κανονικών 96-γώνων, να βρει ότι:

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$

Αργότερα στο έργο του: **κύκλου μέτρησης** προχώρησε ακόμα περισσότερο τη διαδι-κασία αυτή και βρήκε: $\pi \cong 3.1416$.

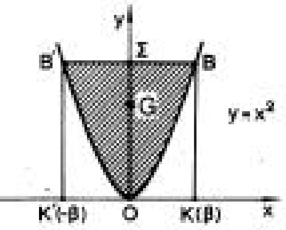
Οι ιδέες του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του μήκους κύκλου μέσα απ' τις δια-δοχικές προσεγγίσεις εγγεγραμμένων πολυγώνων βρήκαν πολλούς αιώνες μετά δικαί-ωση στον υπολογισμό του μήκους τυχαίου καμπυλόγραμμου (λείου) τμήματος (Σχ. 2).



Σχ. 2

Η πολυγωνική γραμμή AP_1P_2B έχει μήκος προφανώς μικρότερο απ' το μήκος L της γραμμής. Αν τώρα πάρουμε και τα σημεία M_1, M_2, M_3 ενδιάμεσα των προηγουμένων, τότε η πολυγωνική γραμμή $AM_1P_1M_2P_2M_3B$ έχει βέβαια μήκος μικρότερο απ' το L, αλλά μεγαλύτερο από το μήκος της προηγούμενης. Το μήκος της λοιπόν είναι πιό κοντά το ζητούμενο αριθμό L.

Στην εργασία του: **τετραγωνισμός παραβολής** ο Αρχιμήδης κατάφερε δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο (με προσεγγίσεις απ' τα «πάνω» και προσεγγίσεις απ' τα «κάτω») να βρει ότι το εμβαδό του χωρίου (γραμμοσκιασμένο τμήμα) είναι τα $\frac{2}{3}$ του ορθογωνίου ΚΒΒ'Κ'. Αργότερα βρήκε με τις ίδιες βασικά ιδέες ότι το κέντρο βάρους της παραβολικής πλάκας (που θεωρούμε ομογενή) είναι το σημείο: $G\left(0, \frac{2\beta}{3}\right)$.



Σχ. 3

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι για τον υπολογισμό του εμβαδού του παραβολικού χωρίου είναι αρκετό να υπολογίσουμε το εμβαδό του τμήματος που περικλείεται απ' τον άξονα των x, την κατακόρυφη ΚΒ και τη γραφική παράσταση της παραβολής για τα x του διαστήματος: [O, β].

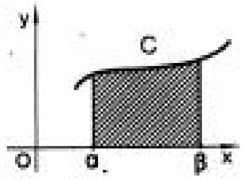
Με τη βοήθεια του μέσου $M\left(\frac{\beta}{2}\right)$ του ευθύγραμμου τμήματος ΟΚ φτανουμε για το εμβαδό S του τμήματος ΟΚΒ: $\frac{\beta^3}{8} < S < \frac{5}{8}\beta^3$.

Παρόμοια με τη βοήθεια των σημείων $N_1\left(\frac{\beta}{3}\right)$, $N_2\left(\frac{2\beta}{3}\right)$, που χωρίζουν το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ σε τρία ίσα τμήματα, βρίσκουμε: $\frac{5}{27}\beta^3 < S < \frac{14}{27}\beta^3$.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία αυτή βρήκε ο Αρχιμήδης ότι: $S = \frac{\beta^3}{3}$.

Και βέβαια τα πράγματα δεν ήταν τότε τόσο απλά. Λείπανε οι συμβολισμοί που απλοποιούν τους υπολογισμούς. Γι' αυτό είναι εκπληκτικά τα αποτελέσματα των εργασιών του Αρχιμήδη. Κι έπρεπε να περάσουν πάνω από 2000 χρόνια για να φτάσουμε στον Cauchy (1789-1857) και στον **Riemann** (1826-1866) όπου οι ιδέες που 'ριξε ο Αρχιμήδης πήραν τη μορφή ολοκληρωμένης και αυστηρής μαθηματικής θεωρίας.

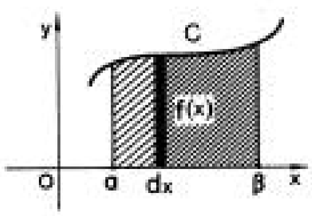
Με τη βοήθεια προσεγγιστικής μεθόδου που δεν διαφέρει ουσιαστικά από εκείνη του Αρχιμήδη, ο **Riemann** προσδιόρισε το εμβαδό χωρίου που περικλείεται απ' τον άξονα των x, τις ευθείες: $x = \alpha$ και $x = \beta$ και τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης. Ο Cauchy διατύπωσε και απέδειξε την ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη του αριθμού αυτού.



Σχ. 4

Τη διαδικασία δια μέσου της οποίας προσδιορίζεται ο αριθμός που δίνει το εμβαδό ο Riemann την ονόμασε **ολοκλήρωση** και τον αριθμό (αν φυσικά υπάρχει) που προκύπτει: **ολοκλήρωμα.** Ο Leibnitz απ' το 1675 είχε χρησιμοποιήσει για τον αριθμό αυτό το σύμβολο: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ που το 'βλεπε ως ενιαίο (αδιαίρετο). Το $\int$ είναι μια «άλλη» γραφή του S (Suma = άθροισμα).

Ο Leibnitz (1646-1717) έφτασε στο σύμβολο αυτό χωρίς να 'χει προσδιορίσει το περιεχόμενό του. Θεώρησε όμως ότι ο αριθμός αυτός είναι το άθροισμα των «απείρων» το πλήθος «απείρως» μικρών εμβαδών ό λ ω ν των λωρίδων — μια αντιπροσωπευτική γραμμοσκιάζεται πιο έντονα στο σχ. 5 με πλάτος: dx «πολύ μικρό» και ύψος f(x) — όταν το ίχνος x μετατοπίζεται απ' το άκρο α στο άκρο β. Αν και ασαφής η παραπάνω διατύπωση βοήθησε να συνειδητοποιηθεί ότι η ολοκλήρωση είναι κατά βάση α θ ρ ο ι σ τ ι κ ή διαδικασία (μη πεπερασμένη).



Σχ. 5

Με τον ορισμό του ολοκληρώματος κατά Reimann υπολογίστηκαν τα μέτρα αρκετών μεγεθών της κλασικής Μηχανικής, όπως για παράδειγμα: το έργο που παράγει μια μεταβλητή δύναμη όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος μιας ορισμένης τροχιάς με συγκεκριμένα άκρα. Όμοια χρησιμεύει στον υπολογισμό κέντρου βάρους επίπεδου ή στερεού σχήματος, της ροπής αδρανείας ως προς άξονα και άλλα.

Το 1902 έγινε η πιο σοβαρή (από άποψη περιεχόμενου) γενίκευση του ολοκληρώματος απ' το Γάλλο μαθηματικό Lebesque. Το ολοκλήρωμα κατά Lebesque διεύρυνε το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και αποτέλεσε το κύριο θεωρητικό εργαλείο της **Θεωρίας Μέτρου.** Από την άποψη των εφαρμογών το ολοκλήρωμα Lebesque είναι απαραίτητο στην κατανόηση της Κβαντικής Μηχανικής και των νέων επιτευγμάτων της θεωρίας των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής.

Στα παρακάτω ασχολούμαστε με ορισμένα θέματα του ολοκληρώματος Riemann.

Η έννοια του Ολοκληρώματος

Ας πάρουμε μια συνάρτηση: $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Ονομάζουμε: διαμέριση του κλειστού διαστήματος $[\alpha, \beta]$ κάθε πεπερασμένο σύνολο: $\delta = \{\alpha, x_1, ..., x_{\nu-1}, \beta\}$ όπου:

$$\alpha < x_1 < ... < x_{\nu-1} < \beta$$

Μια διαμέριση λέγεται: αριθμητική όταν τα στοιχεία του συνόλου δ αποτελούν αριθμητική πρόοδο. Όμοια μια διαμέριση λέγεται: γεωμετρική όταν τα στοιχεία του δ αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

Σε κάθε διαμέριση δ αντιστοιχεί ο αριθμός d που ορίζεται απ' την ισότητα:

$$d = \max\{x_i - x_{i-1} \;/\; i = 1, 2, ..., \nu\}$$

όπου: $x_0 = \alpha$ και $x_\nu = \beta$. (Τον αριθμό d τον λένε λεπτότητα της διαμέρισης δ).

Σε κάθε διαμέριση: $\delta = \{\alpha, x_1, ..., x_{\nu-1}, \beta\}$ αντιστοιχεί το άθροισμα:

$$K_\delta = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \\ + ... + m_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) \qquad (1)$$

όπου: $m_i \;/\; i = 1, 2, ..., \nu$ το μέγιστο κάτω φράγμα του περιορισμού f_i της f στο διάστημα: $[x_{i-1}, x_i]$.

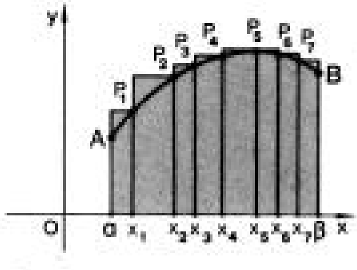
Πιο σύντομα ο τύπος (1) γράφεται:

$$K_\delta = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \Delta x_i \qquad (2)$$

όπου: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \;/\; i = 1, 2, ..., \nu$

Σχ. 6

Για τη διαμέριση $\delta = \{\alpha, x_1, x_2, ..., x_7, \beta\}$ του σχήματος 6 το K_δ είναι το εμβαδό του μαυρισμένου κομματιού.



Σχ. 7

Όμοια σε κάθε διαμέριση: $\delta = \{\alpha, x_1, \ldots, x_{\nu-1}, \beta\}$ αντιστοιχεί το άθροισμα:

$$A_\delta = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \\ + \ldots + M_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) \qquad (3)$$

όπου: $M_i \; / \; i = 1, 2, \ldots, \nu$ το ελάχιστο άνω φράγμα του περιορισμού f_i και f στο διάστημα: $[x_{i-1}, x_i]$.

Πιο σύντομα ο τύπος (3) γράφεται:

$$A_\delta = \sum_{i=1}^{\nu} M_i \Delta x_i \qquad (4)$$

Για τη διαμέριση $\delta = \{\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_7, \beta\}$ του Σχ. 2 το A_δ είναι το εμβαδό του μαυρισμένου κομματιού.

Το K_δ το λέμε κάτω άθροισμα και το A_δ άνω άθροισμα.

Το σύνολο όλων των κάτω αθροισμάτων είναι φραγμένο άνω. Όμοια το σύνολο όλων των άνω αθροισμάτων είναι φραγμένο κάτω. Διότι για κάθε διαμέριση δ του διαστήματος [α, β] έχουμε:

$$m(x_1 - x_0) + m(x_2 - x_1) + \ldots + m(x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq K_\delta \leqq A_\delta \leqq \\ \leqq M(x_1 - x_0) + M(x_2 - x_1) + \ldots + M(x_\nu - x_{\nu-1}) \qquad (4)$$

όπου: m το μέγιστο κάτω φράγμα της f στο διάστημα [α, β] και M το ελάχιστο άνω φράγμα της f. (Υπάρχουν γιατί η $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη).

Πραγματικά: Όπως φαίνεται και από τα σχήματα ισχύουν οι ανισότητες

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}, \quad m \leqq m_i \leqq M_i \leqq M \quad \text{και} \quad x_i - x_{i-1} > 0$$

Έχουμε τώρα:

$$m\left[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_\nu - x_{\nu-1})\right] = m(x_\nu - x_0) = m(b - \alpha) \qquad (5)$$

$$\text{και} \quad M\left[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_\nu - x_{\nu-1})\right] = M(x_\nu - x_0) = M(\beta - \alpha) \qquad (6)$$

Οπότε η (4) γίνεται: $m(\beta - \alpha) \leqq K_\delta \leqq A_\delta \leqq M(\beta - \alpha) \qquad (7)$

1.1. Ονομάζουμε: κάτω ολοκλήρωμα της f στο διάστημα: [α, β] και το συμβολίζουμε: $\underline{J}$ το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου όλων των κάτω αθροισμάτων. Όμοια ονομάζουμε άνω ολοκλήρωμα της f στο διάστημα: [α, β] και το συμβολίζουμε: $\overline{J}$ το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου όλων των άνω αθροισμάτων.

Προφανώς ισχύει: $\underline{J} \leqq \overline{J}$

1.2. Ορισμός: Μια φραγμένη συνάρτηση $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι: ολοκληρώσιμη όταν

$$\underline{J} = \overline{J}$$

Την κοινή αυτή τιμή τη συμβολίζουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ και τη λέμε **ο ρ ι σ μ έ ν ο ο λ ο κ λ ή ρ ω μ α** της f στο διάστημα: [α β].

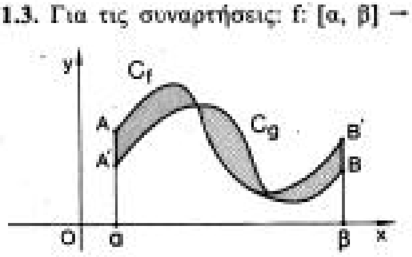
Παρατήρηση: Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε απ' τη σχέση (7) παίρνουμε:

$$m(\beta - \alpha) \leqq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leqq M(\beta - \alpha) \qquad (9)$$

όπου: m το μέγιστο κάτω φράγμα της f και M το ελάχιστο άνω φράγμα της f. (Υπάρχουν γιατί προϋποτίθεται ότι η f είναι φραγμένη).

1.3. Για τις συναρτήσεις: $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ και $g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ που οι γραφικές τους παραστάσεις δίνονται στο σχ. 8 το εμβαδό του μαυρισμένου κομματιού δίνεται απ' το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\,dx$$



Σχ. 8

1.4. Παραδείγματα:

(i): Να δειχτεί ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = k(\beta - \alpha)$ όταν: $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ (σταθ.)

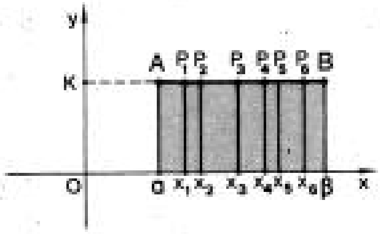
Απάντηση: Ας πάρουμε τυχαία διαμέριση.

$$\delta = \{\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, \beta\}$$

του [α, β].

Τότε: $K_\delta = \sum_{i=1}^{\nu} m_i\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{\nu} k\,\Delta x_i =$

$= k \sum_{i=1}^{\nu} \Delta x_i = k(\beta - \alpha)$ (σταθερός)



Σχ. 9

Κι επομένως: $\underline{J} = k(\beta - \alpha)$.

Σύμφωνα τώρα με τον ορισμό έχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = k(\beta - \alpha)$

(ii): Για τη συνάρτηση: f με $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{όταν x ρητός} \\ 1 & \text{όταν x άρητος} \end{cases}$

Να δειχτεί ότι δεν υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμα στο διάστημα [α, β] (α, β ∈ $\mathbb{R}$ δοσμένοι με α < β).

Απάντηση: Ας πάρουμε τυχαία διαμέριση: $\delta = \{\alpha, x_1, x_2, \dots, x_{\nu-1}, \beta\}$ του $[\alpha, \beta]$.

$$\text{Τότε:} \quad K_\delta = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{\nu} 0 \, \Delta x_i$$

(Αφού σε κάθε διάστημα: $[x_{i-1}, x_i]$ υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι αριθμοί).

$$\text{Και} \quad A_\delta = \sum_{i=1}^{\nu} M_i \, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{\nu} 1 \, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{\nu} \Delta x_i = x_\nu - x_0 = \beta - \alpha \qquad \text{(σταθερός)}$$

Άρα $\underline{J} = 0$ και $\overline{J} = \beta - \alpha$. Οπότε: $\underline{J} < \overline{J}$

Κι επομένως δεν υπάρχει το $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$.

(iii): Να δειχτεί ότι: $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$

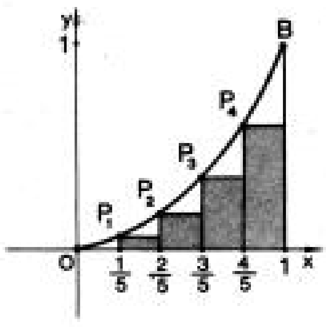
Απάντηση: Η συνάρτηση $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^2$ είναι προφανώς φραγμένη. Ορίζονται συνεπώς: το κάτω ολοκλήρωμα $\underline{J}$ και το άνω ολοκλήρωμα $\overline{J}$. Θα δείξουμε ότι: $\underline{J} = \overline{J} = \frac{1}{3}$.

Πραγματικά: Ας πάρουμε μια ακολουθία (δ_ν) αριθμητικών διαμερίσεων· δηλαδή:

$$\delta_1 = \{0, 1\}, \quad \delta_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \quad \delta_3 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}, \dots, \quad \delta_\nu = \left\{0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \dots, \frac{\nu-1}{\nu}, 1\right\}$$

$/ \ \nu \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Τότε:} \quad K_{\delta_\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(i-1)^2}{\nu^2} \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu^3} \sum_{i=1}^{\nu} (i-1)^2 =$$



$$= \frac{1}{\nu^3} \left[0^2 + 1^2 + \dots + (\nu-1)^2 \right] \qquad (10)$$

Αφού: $\Delta x_i = \frac{1}{\nu}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, \nu$

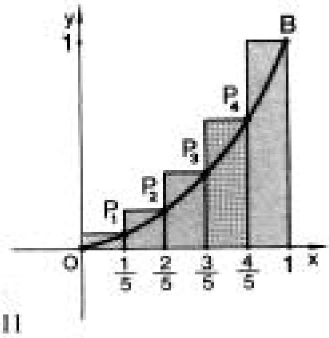
και: $m_i = \left(\frac{i-1}{\nu}\right)^2 \ / \ i = 1, 2, \dots, \nu$

μια και η $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα.

Αλλά: $1^2 + \dots + (\nu-1)^2 = \frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6}$

Σχ. 10

(Εφαρμογή 2 σελ. 110 σχ. βιβλ. Β' τάξης Λυκείου)



Σχ. 11

Οπότε: $K_{\xi_\nu} = \frac{1}{6\nu^2}(\nu - 1)(2\nu - 1)$ (12)

Όμοια: $A_{\xi_\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{i^2}{\nu^2} \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu^3} \sum_{i=1}^{\nu} i^2$

$$= \frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + \nu^2)$$

Κι επειδή:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

συμπεραίνουμε ότι: $A_{\xi_\nu} = \frac{1}{6\nu^2}(\nu + 1)(2\nu + 1)$ (13)

Από (12) και (13) έχουμε: $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{6\nu^2}(\nu - 1)(2\nu - 1) = K_{\xi_\nu} \leq \underline{J} \leq \overline{J} \leq A_{\xi_\nu} =$

$$= \frac{1}{6\nu^2}(\nu + 1)(2\nu + 1) \qquad (14)$$

Κι επειδή: $\lim \left[\frac{1}{6\nu^2}(\nu - 1)(2\nu - 1)\right] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ και

$\lim \left[\frac{1}{6\nu^2}(\nu + 1)(2\nu + 1)\right] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ συμπεραίνουμε απ' τη (14) ότι:

$\frac{1}{3} \leq \underline{J} \leq \overline{J} \leq \frac{1}{3}$ (Δες: «Σύγκλιση της Διάταξης»)

Οπότε: $\underline{J} = \overline{J} = \frac{1}{3}$ Δηλαδή: $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

1.5. Πρόταση: (χωρίς απόδειξη) Αν μια συνάρτηση f: [α, β] → $\mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε είναι ολοκληρώσιμη.

1.6. Παράδειγμα: Να δειχτεί ότι: $\frac{\pi}{100} \leq \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{(3 + 2\text{συν}t)^2} \leq \frac{\pi}{76}$

Απάντηση: Η συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{1}{(3 + 2\text{συν}t)^2}$ είναι συνεχής. Συνεπώς: $\exists\ \xi_1, \xi_2 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ τέτοιοι ώστε: $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $f(\xi_1) \leq f(t) \leq f(\xi_2)$

Έχουμε όμως $f'(t) = \frac{4\text{ημ}t}{(3 + 2\text{συν}t)^3} > 0, \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Συνεπώς: $\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{\pi}{4}$

Επομένως: $m = f(0) = \frac{1}{25}, \quad M = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{(3+\sqrt{2})^2}$.

Σύμφωνα τώρα με τον τύπο (9) έχουμε:

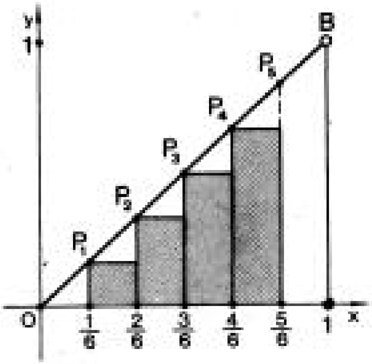
$$\frac{1}{25}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \leq \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{(3 + 2\text{συν}t)^2} \leq \frac{1}{(3+\sqrt{2})^2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$\text{ή} \quad \frac{\pi}{100} \leq \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{(3 + 2\text{συν}t)^2} \leq \frac{1}{11 + 6\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} < \frac{1}{19} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{76}$$

1.7. Παρατήρηση: Μια φραγμένη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μπορεί να 'ναι ολοκληρώσιμη, χωρίς ωστόσο να 'ναι και συνεχής.

1.8. Παράδειγμα: Η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x & \text{όταν } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{όταν } x = 1 \end{cases}$

Είναι προφανώς ασυνεχής στο 1. Ωστόσο είναι ολοκληρώσιμη. Και μάλιστα $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$



Σχ. 12

Απάντηση: Ας πάρουμε την ακολουθία διαμερίσεων (δ_ν), που πήραμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Τότε: $K_{\delta_\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, \Delta x_i = \sum_{i=2}^{\nu-1} \frac{(i-1)}{\nu} \cdot \frac{1}{\nu}$ (15)

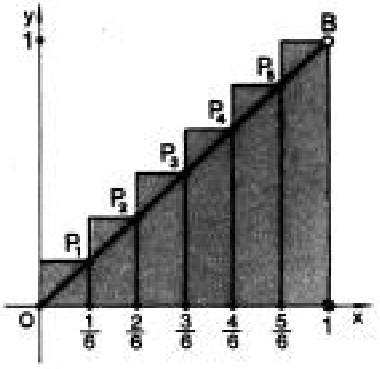
Αφού: $\Delta x_i = \frac{1}{\nu}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$

$m_i = \frac{i-1}{\nu}$ / $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ μια και ο περιορισμός f_1 της f στο διάστημα: $[0, 1]$ είναι συνάρτηση γνήσια αύξουσα.

Στο διάστημα: $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, $m_\nu = 0$ αφού $f(1) = 0$

Απ' τον τύπο (15) έχουμε: $K_{\delta_\nu} = \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^{\nu-1} (i-1)$

ή: $K_{\delta_\nu} = \frac{1}{\nu^2}\left[1 + 2 + \ldots + (\nu - 2)\right] =$



Σχ. 13

$$= \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2\nu^2} \qquad (16)$$

Όμοια: $A_{\delta_\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{i}{\nu}\,\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu} i$

$$= \frac{1}{\nu^2}(1+2+\ldots+\nu) = \frac{(\nu+1)\nu}{2\nu^2} \qquad (17)$$

Απ' τις (15) και (16) παίρνουμε:

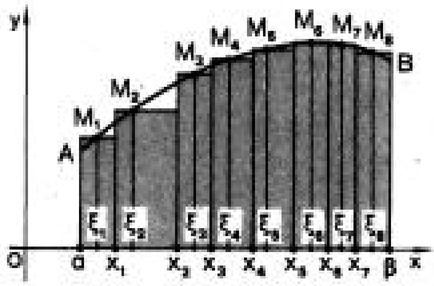
$$\forall \nu \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2\nu^2} = K_{\delta_\nu} \leq \underline{J} \leq \overline{J} = A_{\delta_\nu} = \frac{(\nu+1)\nu}{2\nu^2}$$

Κι επειδή: $\lim = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2\nu^2} = \frac{1}{2} = \lim \frac{(\nu+1)\nu}{2\nu^2}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{1}{2} \leq \underline{J} \leq \overline{J} \leq \frac{1}{2}. \quad \text{Οπότε} \quad \underline{J} = \overline{J} = \frac{1}{2}$$

Κι επομένως: $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$

2. Η έννοια του ενδιάμεσου αθροίσματος



Σχ. 14

Σε κάθε διαμέριση $\delta = [\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, \beta]$ του διαστήματος: $[\alpha, \beta]$, που είναι πεδίο ορισμού μιας φραγμένης συνάρτησης f, αντιστοιχεί το άθροισμα:

$$E_\delta = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})$$

ή πιο σύντομα: $E_\delta = \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (18)$

όπου (ξ_i) $i = 1, 2, \ldots, \nu$ μια **επιλογή ενδιαμέσων σημείων**· δηλαδή σημείων του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ με την ιδιότητα:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}, \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

Προφανώς έχουμε: $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}, \quad m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$

και συνεπώς: $\sum_{i=1}^{\nu} m_i\,\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{\nu} M_i\,\Delta x_i$

Δηλαδή: $K_\delta \leq E_\delta \leq A_\delta$ (19)

Το E_δ ονομάζουμε: ενδιάμεσο άθροισμα.

Σχετικά ισχύει η παρακάτω:

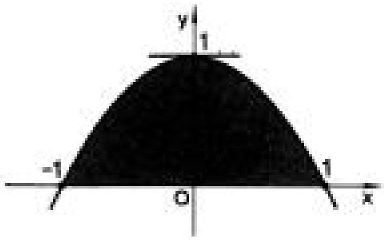
2.1. Πρόταση: Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε κάθε ακολουθία (χωρίς απόδειξη) (E_{δ_ν}) ενδιάμεσων αθροισμάτων ακολουθίας διαμερίσεων (δ_ν) με $\lim d_\nu = 0$ και τυχαίας επιλογής ενδιαμέσων σημείων (ξ_i) $i \in \{1, 2, ..., \nu\}$ **συγκλίνει στο** $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

2.2. Πόρισμα: Αν η συνάρτηση: $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim\left[\frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} f\left(\alpha + i\,\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)\right] \qquad (20)$$

Ο τύπος (20) προκύπτει από ακολουθία αριθμητικών διαμερίσεων με $\Delta x_i = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$ / $i = 1, 2, ..., \nu$, $d_\nu = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu} \to 0$ και επιλογή ενδιαμέσων σημείων τα δεξιά άκρα των διαστημάτων της διαμέρισης.

2.3. Παραδείγματα: (i): Να υπολογιστεί το εμβαδό Ε του μαυρισμένου κομματιού, όταν η συνάρτηση f έχει τύπο: $f(x) = 1 - x^2$.



Σχ. 15

Απάντηση: Η συνάρτηση είναι συνεχής και αρτία. Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y. Έτσι το εμβαδό, που μας ενδιαφέρει, είναι το διπλάσιο του τμήματος στο πρώτο τεταρτημόριο, που δίνεται απ' το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Συνεπώς: $E = 2\int_0^1 (1-x^2)\,dx = = 2\lim\left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left[1-\left(i\,\frac{1}{\nu}\right)^2\right]\right]$

$$= 2\lim\left[\frac{1}{\nu}\left(\nu - \frac{1}{\nu^2}\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}\right)\right]$$

$$= 2\lim\left[1 - \frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^2}\right] = 2\left(1-\frac{2}{6}\right) = 2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

(ii): Να βρεθεί το: $\int_{\alpha}^{\beta} e^x \, dx$

Απάντηση: Η συνάρτηση: $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$ είναι συνεχής. Και συνεπώς ολοκληρώσιμη. Έχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} e^x \, dx = \lim \left[\frac{\beta - \alpha}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} e^{\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{\nu}} \right]$

$$= \lim \left[\frac{\beta - \alpha}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} e^{\alpha} \left(e^{\frac{\beta - \alpha}{\nu}} \right)^i \right]^* =$$

$$= \lim \left[\frac{\beta - \alpha}{\nu} \cdot e^{\alpha} \frac{\left(e^{\frac{\beta - \alpha}{\nu}} \right)^{\nu} \left(e^{\frac{\beta - \alpha}{\nu}} \right) - e^{\frac{\beta - \alpha}{\nu}}}{e^{\frac{\beta - \alpha}{\nu}} - 1} \right]$$

$$\text{ή} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = \lim \left[d_{\nu} \, e^{\alpha} \frac{e^{d_{\nu}} (e^{\beta - \alpha} - 1)}{e^{d_{\nu}} - 1} \right] = (e^{\beta} - e^{\alpha}) \lim \left(e^{d_{\nu}} \cdot \frac{d_{\nu}}{e^{d_{\nu}} - 1} \right)$$

$$= (e^{\beta} - e^{\alpha}) \lim e^{d_{\nu}} \cdot \lim \frac{d_{\nu}}{e^{d_{\nu}} - 1} \quad \text{όπου: } d_{\nu} = \frac{\beta - \alpha}{\nu} \; / \; \nu = 1, 2, \ldots$$

$$\text{Αλλά:} \quad d_{\nu} \to 0 \;\Rightarrow\; \lim e^{d_{\nu}} = e^0 = 1 \quad \text{και} \quad \lim \frac{d_{\nu}}{e^{d_{\nu}} - 1} = \frac{1}{\lim \frac{e^{d_{\nu}} - 1}{d_{\nu}}} = 1$$

$$\text{αφού:} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\text{Συνεπώς:} \quad \int_{\alpha}^{\beta} e^x \, dx = e^{\beta} - e^{\alpha}.$$

(iii) Να υπολογιστεί το $\int_1^2 x^k \, dx$ όταν: $k \in \mathbb{R} \{-1\}$.

Απάντηση: Η συνάρτηση $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^k$ είναι συνεχής. Συνεπώς το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x) \, dx$ είναι ίσο με το όριο μιας ακολουθίας ενδιαμέσων αθροισμάτων $(E\delta_{\nu})$ για τυχαία ακολουθία διαμερίσεων (δ_{ν}) με $d_{\nu} \to 0$ και οποιαδήποτε επιλογή ενδιαμέσων σημείων: (ξ_i) $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Εκλέγουμε μια ακολουθία γεωμετρικών διαμερίσεων: (δ_{ν}) με

---

* Άθροισμα γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $e^{\frac{\beta - \alpha}{\nu}}$ και λόγο τον ίδιο.

$$\delta_\nu = \{ 1 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu = 2 \} \quad \text{και λόγο:} \quad \lambda = 2^{1/\nu}$$

(αφού: $2 = 1 \cdot \lambda^{\nu+1-1}$ ή: $2 = \lambda^\nu$)

Για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = 2^{i/\nu} - 2^{\frac{i-1}{\nu}}$

ή: $\Delta x_i = 2^{\frac{i-1}{\nu}} (2^{1/\nu} - 1)$ / $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Συνεπώς: $d_\nu = \max\{ \Delta x_i \ / \ i = 1, 2, \ldots, \nu \} = (2^{1/\nu} - 1)\left(2^{\frac{\nu-1}{\nu}}\right)$

$$\text{ή:} \quad d_\nu = \left(\sqrt[\nu]{2} - 1\right) \frac{2}{\sqrt[\nu]{2}} \quad \text{οπότε:} \quad \lim d_\nu = 0$$

$\left(\text{αφού:} \quad \lim \sqrt[\nu]{2} = 1\right)$.

Αν τώρα ως επιλογή ενδιαμέσων σημείων πάρουμνε τα αριστερά άκρα των διαστημάτων της διαμέρισης (δ_ν) έχουμε:

$$\int_0^1 x^k \, dx = \lim \left[\sum_{i=1}^{\nu} f(x_{i-1}) \Delta x_i \right] = \lim \left[\sum_{i=1}^{\nu} \left(2^{\frac{i-1}{\nu}}\right) \cdot 2^{\frac{i-1}{\nu}} \cdot (2^{1/\nu} - 1) \right]$$

$$= \lim \left[(2^{1/\nu} - 1) \cdot \sum_{i=1}^{\nu} \left(2^{\frac{k+1}{\nu}}\right)^{i-1} \right] = \lim \left[(2^{1/\nu} - 1) \cdot \frac{\left(2^{\frac{k+1}{\nu}}\right)^{\nu-1} \cdot 2^{\frac{k+1}{\nu}} - 1}{2^{\frac{k+1}{\nu}} - 1} \right]$$

$$= \lim \left[(2^{1/\nu} - 1) \cdot \frac{\left(2^{\frac{k+1}{\nu}}\right)^{\nu} - 1}{2^{\frac{k+1}{\nu}} - 1} \right] = \left(2^{k+1} - 1\right) \lim \frac{2^{1/\nu} - 1}{2^{\frac{k+1}{\nu}} - 1} \qquad \text{(I)}$$

$$\text{Αλλά} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2^{1/x} - 1}{2^{(k+1)\frac{1}{x}} - 1} = \frac{1}{k+1} \quad \text{Άρα:} \quad \lim \frac{2^{1/\nu} - 1}{2^{\frac{k+1}{\nu}} - 1} = \frac{1}{k+1} \qquad \text{(II)}$$

Διότι οι συναρτήσεις: f με $f(x) = 2^{1/x} - 1 \ / \ \mathbb{R}_+^*$ και g με $g(x) = 2^{(k+1)\frac{1}{x}} - 1 \ / \ \mathbb{R}_+^*$ έχουν στο $+\infty$ όριο 0. Εξετάζουμε αν συντρέχουν κι οι άλλες απ' υποθέσεις το Θ. De L'Hospital. Έχουμε:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} 2^{1/x} \ln 2 \quad \text{και} \quad g'(x) = -\frac{k+1}{x^2} \, 2^{\frac{k+1}{x}} \ln 2.$$

Κι επειδή:

$$\lim_{+\infty} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} 2^{1/x} \ln 2}{-\frac{\kappa+1}{x^2} 2^{\frac{k+1}{x}} \ln 2}$$

ή $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1}{k+1} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2^{k/x}} = \dfrac{1}{k+1}$, συμπεραίνουμε ότι: $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f}{g} = \dfrac{1}{k+1}$

Απ΄ τις (I) και (II) παίρνουμε: $\int\limits_1^2 x^k\,dx = \dfrac{2^{k+1}-1}{k+1}$.

3. Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

3.1. Σχετικά με το άθροισμα:

• Αν οι συναρτήσεις: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς τότε η $f+g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη. Και μάλιστα

$$\int\limits_\alpha^\beta \big(f(x)+g(x)\big)(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int\limits_\alpha^\beta g(x)\,dx \qquad (21)$$

Απόδειξη: Ας πάρουμε μια ακολουθία (δ_ν) αριθμητικών διαμερίσεων και (ξ_i) $i = 1, 2, \ldots, \nu$ τυχαία επιλογή ενδιαμέσων σημείων. Η $f+g$ είναι συνεχής. Οπότε:

$$\int\limits_\alpha^\beta (f+g)\,dx = \lim\Big[d_\nu \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (f+g)(\xi_i)\Big] = \lim\Big[d_\nu \cdot \sum_{i=1}^{\nu} \big(f(\xi_i)+g(\xi_i)\big)\Big]$$

$$= \lim\Big[d_\nu \Big(\sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i) + \sum_{i=1}^{\nu} g(\xi_i)\Big)\Big]$$

$$= \lim\Big[d_\nu \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Big] + \lim\Big[d_\nu \sum_{i=1}^{\nu} g(\xi_i)\Big]$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

• Γενίκευση: Αν οι συναρτήσεις: $f_i\,[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ είναι συνεχείς, τότε:

$$\int\limits_\alpha^\beta \Big(\sum_{i=1}^{k} f_i\Big)(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_\alpha^\beta f_i(x)\,dx \qquad (22)$$

(απόδειξη με τη μέθοδο της Τ.Ε.).

3.2. Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\lambda\in\mathbb{R}$ σταθ. Τότε:

$$\int\limits_\alpha^\beta (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx \qquad (23)$$

Απόδειξη: Η λf είναι συνεχής· άρα και ολοκληρώσιμη.

Αν τώρα (δ_ν) είναι μια ακολουθία αριθμητικών διαμερίσεων και (ξ_i) $i = 1, 2, \dots, \nu$ τυχαία επιλογή ενδιαμέσων σημείων, τότε:

$$\int_\alpha^\beta (\lambda f)(x)\,dx = \lim\left[d_\nu \sum_{i=1}^{\nu} (\lambda f)(\xi_i)\right] = \lim\left[d_\nu \sum_{i=1}^{\nu} \lambda f(\xi_i)\right]$$

$$= \lambda \lim\left[d_\nu \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\right] = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

3.3. Αν η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τότε κι οι περιορισμοί: $f_1:[\alpha, \gamma] \to \mathbb{R}$ και $f_2:[\gamma, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς· άρα και ολοκληρώσιμες. Και μάλιστα:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx \qquad \text{(η απόδειξη παραλείπεται)}$$

● Γενίκευση: Αν η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και:

$$\alpha < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k < \beta, \tag{24}$$

τότε: $$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^{\gamma_1} f(x)\,dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} f(x)\,dx + \int_{\gamma_k}^{\beta} f(x)\,dx \tag{25}$$

Συμφωνούμε: $$\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0 \tag{26}$$

Οπότε αντί των συνθηκών (24) μπορούμε να 'χουμε τις συνθήκες:

$$\alpha \leqq \gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \dots \leqq \gamma_k \leqq \beta$$

για να ισχύει η (25).

'Ομοια δεχόμαστε ότι: $$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx \tag{27}$$

3.4. Αν η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κι οι τιμές που παίρνει μη αρνητικές, τότε και το ολοκλήρωμά της παίρνει τιμή μη αρνητική.

Απάντηση: 'Εχουμε $m \geqq 0$. Κι επειδή: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqq m(\beta - \alpha)$

συμπεραίνουμε: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqq 0.$

3.5. Πόρισμα: Αν οι συναρτήσεις $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ και $g:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $f(x) \geqq g(x)$

τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx.$

Απόδειξη: Η συνάρτηση $f - g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής άρα ολοκληρώσιμη.

Κι επειδή: $\forall x \in [\alpha, \beta], \quad (f - g)(x) \geqq 0$

συμπεραίνουμε ότι: $\int_\alpha^\beta (f - g)(x) \geqq 0$ ή $\int_\alpha^\beta \big(f(x) - g(x)\big)dx \geqq 0$

ή: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta g(x)\,dx \geqq 0$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

3.6 Σχετικά με την απόλυτη τιμή.

Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η απόλυτη τιμή $|f|:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη. Και μάλιστα:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \leqq \int_\alpha^\beta |f|(x)\,dx.$$

Απόδειξη: • Η $|f|$ είναι συνεχής.

Διότι: είναι σύνθεση της συνάρτησης φ με $\varphi(x) = |x|$ που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και της $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής. Συνεπώς η f, ως συνεχής είναι ολοκληρώσιμη.

• Έχουμε: $\forall x \in [\alpha, \beta], \quad -|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$

Κι επομένως: $-|f|(x) \leqq f(x) \leqq |f|(x)$

Επομένως: $\int_\alpha^\beta -|f|(x)\,dx \leqq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leqq \int_\alpha^\beta |f|(x)\,dx$ (Πόρισμα: 3.5)

ή: $-\int_\alpha^\beta |f|(x)\,dx \leqq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leqq \int_\alpha^\beta |f|(x)\,dx$

Συνεπώς: $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \leqq \int_\alpha^\beta |f|(x)\,dx$

3.7. Παραδείγματα: (i): Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση:

$$f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$$

είναι: (α): συνεχής, (β): δεν είναι μηδενική και (γ): $\forall x \in [\alpha, \beta], \quad f(x) \geqq 0$. Να δειχτεί ότι: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0.$

Απάντηση: Απ' την υπόθεση (β) συμπεραίνουμε ότι: υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιος ώστε: $f(x_0) \neq 0$. Συνεπώς, λόγω της (γ), $f(x_0) > 0$.

Και επειδή: f: συνεχής υπάρχει διάστημα: $[\gamma, \delta]$ τέτοιο ώστε: $\alpha \leqq \gamma \leqq x_0 \leqq \delta \leqq \beta$ και $\forall x \in [\gamma, \delta]$, $f(x) > 0$.

Έχουμε τώρα: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\delta f(x)\,dx + \int_\delta^\beta f(x)\,dx.$

Κι επειδή: $\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx \geqq 0$, $\int_\delta^\beta f(x)\,dx \geqq 0$ και $\int_\gamma^\delta f(x)\,dx > 0$

(αφού η ελάχιστη τιμή που παίρνει η f στο $[\gamma, \delta]$ είναι θετική) συμπεραίνουμε:
$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0.$

Πόρισμα: Υποθέτουμε για τις συναρτήσεις: $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ και $g:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ότι: είναι συνεχείς, δεν είναι ίσες και $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $f(x) \leqq g(x)$. Να δειχτεί ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx < \int_\alpha^\beta g(x)\,dx.$$

Απάντηση: Εφαρμόζουμε το παραπάνω παράδειγμα (i) για τη συνάρτηση: $h:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = g(x) - f(x)$...

(ii): Να δειχτεί ότι: $\int_0^1 x^2 \text{συν}x\,dx < \frac{1}{3}$.

Απάντηση: Η συνάρτηση f με $f(x) = x^2\text{συν}x$ είναι συνεχής. Κι επειδή: $\forall x \in [0, 1]$, $x^2\text{συν}x \leqq x^2$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{4}$ $\left(\text{αφού: συν}\frac{1}{2} < 1\right)$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_0^1 x^2\text{συν}x\,dx < \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

(μια και η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = x^2$ είναι συνεχής).

(iii): Να δειχτεί ότι η συνάρτηση: $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ είναι γνήσια αύξουσα.

Απάντηση: Ας είναι $0 < x_1 < x_2$, $f(x_2) - f(x_1) = \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} - \int_1^{x_1} \frac{dt}{t}$

$$\text{ή:}\quad f(x_2) - f(x_1) = \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{1} \frac{dt}{t} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t}$$

Κι επειδή: $\forall t \in [x_1, x_2]$, $\frac{1}{t} > 0$, συμπεραίνουμε ότι: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} > 0.$

Κι επομένως: $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ή $f(x_2) > f(x_1)$.

(iv): Να δειχτεί ότι: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu\, \nu x}{x^2+\nu^2}\,dx = 0$.

Απάντηση: Η συνάρτηση: $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\eta\mu\, \nu x}{x^2+\nu^2}$ είναι συνεχής.

Συνεπώς: $\left|\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu\, \nu x}{x^2+\nu^2}\,dx\right| \leq \int_0^{\pi/2}\left|\frac{\eta\mu\, \nu x}{x^2+\nu^2}\right| dx < \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{x^2+\nu^2} < \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\nu^2} = \frac{\pi}{2\nu^2}$

Κι επειδή $\lim \frac{\pi}{2\nu^2} = 0$, συμπεραίνουμε ότι: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu\, \nu x}{x^2+\nu^2}\,dx = 0$.

4. Ολοκλήρωμα και Παράγουσα.

4.1. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ διαμέσου της πρότασης 2.1. δεν είναι πάντα εφικτός.

Στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων βοηθάει το λεγόμενο «Θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού» που συνδέει την Παράγουσα με το ορισμένο Ολοκλήρωμα. Κατ' αρχήν δείχνουμε την παρακάτω:

4.2. Πρόταση*: Αν η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε:

υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιος ώστε: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f(x_0)(\beta - \alpha)$.

Απόδειξη: Καθώς ξέρουμε [Παρατήρηση, τύπος: (9)],

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq M(\beta - \alpha)$$

(η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ως συνεχής).

Συνεπώς: $$m \leq \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq M \qquad (I)$$

Κι επειδή η $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, σύμφωνα με το Θεώρημα: «Μέγιστης και ελάχιστης τιμής» υπάρχουν: $\xi_1 \in [\alpha, \beta]$ και $\xi_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιοι ώστε:

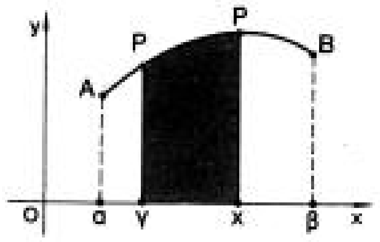
$$m = f(\xi_1) \quad \text{και} \quad M = f(\xi_2).$$

Από την (I) τώρα και το Θεώρημα: «Ενδιαμέσων Τιμών» συμπεραίνουμε ότι: υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιος ώστε: $f(x_0) = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

* Πιο γνωστή ως Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Και συνεπώς: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(x_0)(\beta - \alpha)$.

4.3. Ας πάρουμε μια συνεχή συνάρτηση: $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$.



Σχ. 16

Ο περιορισμός της f στο $[\gamma, x]$ για συγκεκριμένο $\gamma \in [\alpha, \beta]$ και x σταθερό μεν, αλλά αντιπροσωπευτικό του οποιουδήποτε σημείου του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Είναι επίσης συνεχής και συνεπώς ολοκληρώσιμη.

Ορίζεται έτσι η συνάρτηση*: $g:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$

με τύπο: $g(x) = \int_{\gamma}^{x} f(t)dt$ (28)

που γεωμετρικά παριστάνει το εμβαδό του μαυρισμένου κομματιού.

4.4. Πρόταση:** Αν η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η συνάρτηση g «άνω άκρου ολοκλήρωσης», που ορίσαμε στον τύπο (28), είναι παραγωγίσιμη. Και μάλιστα ισχύει: $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $g'(x) = f(x)$ (29)

Απόδειξη: Ας πάρουμε ένα τυχαίο αλλά συγκεκριμένο x_0 του διαστήματος: $[\alpha, \beta]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση κλίσης λ της g στο σημείο x_0. Είναι:

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \; / \; [\alpha, \beta] - \{x_0\}.$$

Παρατηρούμε ότι δεν χαλάει η γενικότητα αν δεχτούμε ότι: $x_0 < x$. Έχουμε τώρα:

$$\lambda(x) = \frac{1}{x - x_0}\left[\int_{\gamma}^{x} f(t)dt - \int_{\gamma}^{x_0} f(t)dt\right] = \frac{1}{x - x_0}\left[\int_{\gamma}^{x} f(t)dt + \int_{x_0}^{\gamma} f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \frac{1}{x - x_0} f(\xi)(x - x_0) = f(\xi)$$

(Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού).

Θα δείξουμε ότι: $\lim_{x_0} \lambda = f(x_0)$ ή $\lim_{x \to x_0} f(\xi) = f(x_0)$ (I)

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ο ξ γράφεται:

$$\xi = (1 - t)x_0 + tx \quad \text{όπου: } 0 \leq t \leq 1$$

Συνεπώς: $\xi - x_0 = t(x - x_0)$.

* Τη λένε «συνάρτηση άνω άκρου ολοκλήρωσης».

** Γνωστή ως «Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού».

Κι επειδή ι: φραγμένη και $\lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \to x_0}(\xi - x_0) = 0 \quad \text{ή:} \quad \lim_{x \to x_0} \xi = x_0$$

$$\text{Συνεπώς:} \quad \lim_{x \to x_0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x_0} f(\xi) = f(x_0)$$

(Μια και η f είναι συνεχής).

4.5. Θεώρημα: Αν η συνάρτηση $F: \Delta \to \mathbb{R}$ (όπου: Δ διάστημα της ευθείας $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών) είναι παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης $f: \Delta \to \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε*: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$ (30)

Απόδειξη: Ο τύπος (30) είναι προφανής για $\alpha = \beta$.

Σύμφωνα τώρα με τον τύπο (27) δεν χαλάει η γενικότητα, αν δεχτούμε ότι: $\alpha < \beta$.

Καθώς είδαμε στην προηγούμενη πρόταση 4.4. η συνάρτηση $g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με τύπο: $g(x) = \int_\gamma^x f(t)\,dt$ είναι παράγουσα της f στο διάστημα: $[\alpha, \beta]$.

Συνεπώς: $\exists\, c \in \mathbb{R} : \forall x \in [\alpha, \beta]$, $\int_\gamma^x f(t)\,dt = F(x) + c$.

(2η συνέπεια Θεωρήματος** Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού).

Έχουμε: $\int_\gamma^\alpha f(t)\,dt = F(\alpha) + c$, $\int_\gamma^\beta f(t)\,dt = F(b) + c$.

Συνεπώς: $\int_\gamma^\beta f(t)\,dt - \int_\gamma^\alpha f(t)\,dt = F(\beta) - F(\alpha)$.

ή: $\int_\gamma^\beta f(t)\,dt + \int_\alpha^\gamma f(t)\,dt = F(\beta) - F(\alpha)$ ή: $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = F(\beta) - F(\alpha)$.

4.6. Παρατηρήσεις: (i): Ο τύπος (30) δείχνει ότι όποια παράγουσα της f κι αν πάρουμε η διαφορά: $F(\beta) - F(\alpha)$ θα δίνει το $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

(ii): Στην πράξη ο τύπος (30) γράφεται:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha).$$

---

* Πιο γνωστός ως τύπος: Leibnitz - Newton.

** Για να ξεχωρίζουμε τα Θεωρήματα Μ.Τ. εκείνο που γνωρίσαμε στο κεφ. των παραγώγων, στο εξής θα το λέμε: «Θ.Μ.Τ. διαφορικού λογισμού».

4.7. Παραδείγματα: (i): Να δειχτεί ότι: $\int_0^\pi \eta\mu x\,dx = 2$.

Στη συνέχεια να βρεθεί το όριο:

$$\lim\left[\frac{1}{\nu}\left(\eta\mu\frac{\pi}{\nu} + \eta\mu\frac{2\pi}{\nu} + \ldots + \eta\mu\frac{\nu-1}{\nu}\pi\right)\right]$$

Απάντηση: Μια παράγουσα της συνάρτησης f με $f(x) = \eta\mu x / \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση F με $F(x) = -\sigma\upsilon\nu x$. Και συνεπώς:

$$\int_0^\pi \eta\mu x\,dx = \Big[-\sigma\upsilon\nu x\Big]_0^\pi = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = = -(-1) + 1 = 2.$$

Θεωρούμε τώρα μια ακολουθία αριθμητικών διαμερίσεων του διαστήματος: $[0, \pi]$. Τότε:

$$\int_0^\pi \eta\mu x\,dx = \lim\left[\frac{\pi}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} \eta\mu\left(i\frac{\pi}{\nu}\right)\right]$$

Οπότε: $$2 = \pi\lim\left[\frac{1}{\nu}\left(\eta\mu\frac{\pi}{\nu} + \eta\mu\frac{2\pi}{\nu} + \ldots + \eta\mu\frac{\nu-1}{\nu}\pi + \eta\mu\frac{\nu\pi}{\nu}\right)\right]$$

Και συνεπώς: $$\lim\left[\frac{1}{\nu}\left(\eta\mu\frac{\pi}{\nu} + \eta\mu\frac{2\pi}{\nu} + \ldots + \eta\mu\frac{\nu-1}{\nu}\pi\right)\right] = \frac{2}{\pi}.$$

(ii): Να δειχτεί ότι: Αν: $0 < \alpha < \beta$ και $k \in \mathbb{R}$ με $k > -1$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta x^k\,dx = \frac{\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}}{k+1}$$

Στη συνέχεια να βρεθεί το: $\lim \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + \nu^k}{\nu^{k+1}}$.

Απάντηση: Μια παράγουσα της συνάρτησης f με $f(x) = x^k \,/\, \mathbb{R}_+^*$ είναι η συνάρτηση F με $\dfrac{x^{k+1}}{k+1}$. Και συνεπώς:

$$\int_\alpha^\beta x^k\,dx = \frac{\beta^{k+1}}{k+1} - \frac{\alpha^{k+1}}{k+1} = \frac{\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}}{k+1}.$$

Ας πάρουμε τώρα μια ακολουθία αριθμητικών διαμερίσεων στο διάστημα: $[0, 1]$.

Τότε: $$\int_0^1 x^k\,dx = \lim\left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{i}{\nu}\right)^k\right]$$

$$\frac{1^{k+1} - 0^{k+1}}{k+1} = \lim\left[\frac{1}{\nu}\left(\frac{1^k}{\nu^k} + \frac{2^k}{\nu^k} + \dots + \frac{\nu^k}{\nu^k}\right)\right]$$

Και συνεπώς: $\lim \dfrac{1^k + 2^k + \dots + \nu^k}{\nu^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$.

(iii): Να δειχτεί ότι: $0 < \alpha < \beta$

τότε: $$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} = \ln\frac{\beta}{\alpha}$$

Στη συνέχεια να βρεθεί το: $\lim\left[\dfrac{1}{\nu+1} + \dfrac{1}{\nu+2} + \dots + \dfrac{1}{\nu+\nu}\right]$.

Απάντηση: Μια παράγουσα της συνάρτησης f με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ / (α, β) είναι η συνάρτηση F με $F(x) = \ln x$ / (α, β).

Συνεπώς: $$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} = \ln\beta - \ln\alpha = \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ας πάρουμε τώρα μια ακολουθία αριθμητικών διαμερίσεων στο διάστημα: [1, 2].

Τότε: $$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \lim\left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{1 + i\frac{1}{\nu}}\right]$$

ή: $$\ln 2 = \lim\left[\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\nu}} + \frac{1}{1+\frac{2}{\nu}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{\nu}{\nu}}\right)\right] =$$

$$= \lim\left[\frac{1}{\nu}\left(\frac{\nu}{\nu+1} + \frac{\nu}{\nu+2} + \dots + \frac{\nu}{\nu+\nu}\right)\right] =$$

Και συνεπώς: $\lim\left(\dfrac{1}{\nu+1} + \dfrac{1}{\nu+2} + \dots + \dfrac{1}{\nu+\nu}\right) = \ln 2$.

(iv): Να υπολογιστεί το: $\displaystyle\int_0^2 \frac{7-x}{(x-3)(x-4)}\,dx$.

Απάντηση: Αναζητούμε πραγματικούς συντελεστές α, β έτσι ώστε:

$$\frac{7-x}{(x-3)(x-4)} = \frac{\alpha}{x-3} + \frac{\beta}{x-4}$$

ή ισοδύναμα: $7 - x = \alpha(x-4) + \beta(x-3)$ ή: $(\alpha+\beta)x - (4\alpha + 3\beta)$

ή: $\left\{\begin{matrix} \alpha + \beta = -1 \\ 4\alpha + 3\beta = -7 \end{matrix}\right\}$ $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1$, $D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 4$,

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -3$

Συνεπώς: $\alpha = \frac{D_1}{D} = -4$ και $\beta = \frac{D_2}{D} = \frac{-3}{-1} = 3$

Έχουμε: $\int_0^2 \frac{7-x}{(x-3)(x-4)}\,dx = \int_0^2 \frac{-4}{x-3}\,dx + \int_0^2 \frac{3}{x-4}\,dx$

$$= -4\Big[\ln|x-3|\Big]_0^2 + 3\Big[\ln|x-4|\Big]_0^2 =$$

$$= -4(\ln 1 - \ln 3) + 3(\ln 2 - \ln 4) = 4\ln 3 - 3\ln 2 = \ln\frac{81}{8}.$$

Δηλαδή $\int_0^2 \frac{7-x}{(x-3)(x-4)}\,dx = \ln\frac{81}{8}.$

(ν): Να υπολογιστεί το: $\int_3^4 \frac{5x^4 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 3}\,dx.$

Απάντηση: Εκτελούμε τη διαίρεση του πολυωνύμου: $P(x) = 5x^4 - 2x + 1$ με το πολυώνυμο: $Q(x) = x^2 + 4x + 3$. Κι έχουμε:

$$5x^4 - 2x + 1 = (x^2 + 4x + 3)(5x^2 - 20x + 65) + (-202x - 194)$$

Συνεπώς: $\frac{5x^4 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 3} = 5x^2 - 20x + 65 + \frac{-202x - 194}{x^2 + 4x + 3}.$

Οπότε: $\int_3^4 \frac{5x^4 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 3}\,dx = \int_3^4 (5x^2 - 20x + 65)\,dx + \int_3^4 \frac{-202x - 194}{x^2 + 4x + 3}\,dx$

$$= \left[5\frac{x^3}{3} - 20\frac{x^2}{2} + 65x\right]_3^4 - \int_3^4 \frac{202x + 194}{x^2 + 4x + 3}\,dx$$

$$= \frac{170}{3} - \int_3^4 \frac{202x + 194}{x^2 + 4x + 3}\,dx.$$

Αναζητούμε πραγματικούς συντελεστές α, β έτσι ώστε:

$$\frac{202x + 194}{x^2 + 4x + 3} = \frac{\alpha}{x + 1} + \frac{\beta}{x + 3}$$

ή ισοδύναμα: $202x + 194 = \alpha(x + 3) + \beta(x + 1)$

ή: $202x + 194 = (\alpha + \beta)x + (3\alpha + \beta)$ ή: $\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 202 \\ 3\alpha + \beta = 194 \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow [\alpha = -4 \quad \text{και} \quad \beta = 206]$

Συνεπώς: $\displaystyle\int_3^4 \frac{202x + 194}{x^2 + 4x + 3} = -4\int_3^4 \frac{dx}{x + 1} + 206\int_3^4 \frac{dx}{x + 3}$

$$= -4\Big[\ln(x + 1)\Big]_3^4 + 206\Big[\ln(x + 3)\Big]_3^4.$$

$$= 206\ln\frac{7}{6} - 4\ln\frac{5}{4}$$

Έτσι έχουμε: $\displaystyle\int_3^4 \frac{5x^4 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 3}\,dx = \frac{170}{3} - 206\,\frac{7}{6} + 4\ln\frac{5}{4}.$

(vi): Αν η συνάρτηση: $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+^*$ έχει συνεχή παράγωγο και $k \in \mathbb{R}$ με $k \neq -1$

Τότε: $\displaystyle\int_\alpha^\beta \big(f(x)\big)^k f'(x)\,dx = \frac{\big(f(\beta)\big)^{k+1} - \big(f(\alpha)\big)^{k+1}}{k + 1}$

Απάντηση:

Έχουμε: $\displaystyle\left(\frac{\big(f(x)\big)^{k+1}}{k + 1}\right)' = \frac{1}{k + 1}(k + 1)\big(f(x)\big)^{k+1-1} f'(x) = \big(f(x)\big)^k f'(x)$

Συνεπώς: $\displaystyle\int_\alpha^\beta \big(f(x)\big)^k f'(x)\,dx = \frac{\big(f(\beta)\big)^{k+1}}{k + 1} - \frac{\big(f(\alpha)\big)^{k+1}}{k + 1} = \frac{\big(f(\beta)\big)^{k+1} - \big(f(\alpha)\big)^{k+1}}{k + 1}.$

(vii): Να υπολογιστεί το: $\displaystyle\int_0^\alpha (kt^\nu + \lambda)^\mu \cdot t^{\nu-1}\,dt$ όταν: α, κ, λ, ν θετικοί και $\mu \in \mathbb{R}$ με $\mu \neq -1$.

Απάντηση: $\displaystyle\int_0^\alpha (kt^\nu + \lambda)^\mu \cdot t^{\nu-1}\,dt = \frac{1}{k\nu}\int_0^\alpha (kt^\nu + \lambda)^\mu (kt^\nu + \lambda)'\,dt.$

Συνεπώς:

$$\int_0^{\alpha}(kt^{\nu}+\lambda)^{\mu}\cdot t^{\nu-1}\,dt=\frac{1}{k\nu}\left[\frac{(kt^{\nu}+\lambda)^{\mu+1}}{\mu+1}\right]_0^{\alpha}=\frac{1}{k\nu(\mu+1)}\left[(k\alpha^{\nu}+\lambda)^{\mu+1}-\lambda^{\mu+1}\right]$$

(viii): Να υπολογιστεί το: $\int_0^{\pi/4}\varepsilon\varphi^2 x\,dx$.

Απάντηση: Έχουμε: $\int_0^{\pi/4}\varepsilon\varphi^2 x\,dx=\int_0^{\pi/4}\left[(1+\varepsilon\varphi^2 x)-1\right]dx.$

Συνεπώς: $\int_0^{\pi/4}\varepsilon\varphi^2 x\,dx=\int_0^{\pi/4}\left[(1+\varepsilon\varphi^2 x)-1\right]dx-\int_0^{\pi/4}dx=\int_0^{\pi/4}(\varepsilon\varphi x)'\,dx-\frac{\pi}{4}$

$$=\left[\varepsilon\varphi x\right]_0^{\pi/4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}.$$

(ix): Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu\sqrt{t}\,dt}{x^3}$.

Απάντηση: Η συνάρτηση f με $f(x)=\int_0^{x^2}\eta\mu\sqrt{t}\,dt\ /\ (0,+\infty)$ είναι σύνθεση της φ με $\varphi(x)=\int_0^{x}\eta\mu\sqrt{t}\,dt\ /\ (0,+\infty)$ και της σ με $\sigma(x)=x^2\ /\ (0,+\infty)$ δηλαδή:

$$\forall x\in(0,+\infty),\quad f(x)=(\varphi\circ\sigma)(x).$$

Η f, ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

Έτσι έχουμε: $\lim\limits_0 f=(\varphi\circ\sigma)(0)=\varphi(\sigma(0))=\varphi(0)=0$

και $\forall x\in(0,+\infty),\quad f'(x)=\varphi'(\sigma(x))\cdot\sigma'(x)=\eta\mu\sqrt{\sigma(x)}\cdot\sigma'(x)=\eta\mu x\cdot 2x$

Η συνάρτηση της οποίας ζητάμε το όριο είναι πηλίκο της f και της g με

$$g(x)=x^3\ /\ (0,+\infty).$$

Κι επειδή: $\lim\limits_0 g=\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$, το όριο που ζητάμε είναι της μορφής: $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Εξετάζουμε αν ισχύουν κι οι άλλες υποθέσεις του Θ. De L'Hospital.

Έχουμε: $\forall x\in(0,+\infty),\quad g'(x)=3x^2.$

Αναζητούμε το: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\,\eta\mu x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=\dfrac{2}{3}$

Συνεπώς: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{2}{3}.$

(x): Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης F με τύπο:

$$F(x) = \int_1^x \frac{\eta\mu t}{t}\, dt \;/\; (0, +\infty).$$

Απάντηση: Η συνάρτηση είναι (παντού) παραγωγίσιμη. Συνεπώς σε κάθε σημείο που παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, θα 'χει, κατά το Θ. Fermat, παράγωγο μηδέν.

Έχουμε: $\quad \forall x \in (0, +\infty), \quad F'(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$

Και συνεπώς: $\quad F'(x) = 0 \iff \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0 \iff \eta\mu x = 0$

$$\iff x = k\pi \;/\; k \in \mathbb{N}^* \qquad (I)$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει στα σημεία που δίνει η (I) τοπικό ακρότατο, αν:

$$F''(k\pi) \neq 0.$$

Έχουμε: $\quad F''(x) = \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$

Και συνεπώς: $\quad F''(k\pi) = \dfrac{k\pi\sigma\upsilon\nu k\pi - \eta\mu k\pi}{(k\pi)^2} = \dfrac{(+1)^k}{k\pi} \neq 0.$

Ειδικότερα: • για: k = άρτιο η F παρουσιάζει στα kπ τοπικό ελάχιστο.
• για: k = περιττό η F παρουσιάζει στα kπ τοπικό μέγιστο.

(xi): Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση f, με το μικρότερο δυνατό βαθμό τέτοια ώστε να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο 5 στο σημείο $x_0 = 0$ και τοπικό ελάχιστο 3 στο σημείο $x_0' = 4$.

Απάντηση: Η πολυωνυμική συνάρτηση είναι (παντού) παραγωγίσιμη και φυσικά συνεχής. Άρα στις θέσεις $x_0 = 0$ και $x_0' = 4$ η παράγωγος μηδενίζεται. Κι επειδή η παράγωγος έχει βαθμό κατά μία μονάδα μικρότερο του βαθμού της πολυωνυμικής, η f΄ είναι δευτεροβάθμια (η μικρότερου δυνατού βαθμού πολυωνυμική με δυο ρίζες).

Συνεπώς: $\quad f'(x) = \alpha x \cdot (x - 4)$. Οπότε: $f(x) = \int_0^x \alpha t(t - 4)\, dt + 5 \qquad (f(0) = 5)$

Επομένως: $\quad f(x) = \alpha\int_0^x (t^2 - 4t)\, dt + 5 = \alpha\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^x - 4\alpha\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^x + 5$

$$= \alpha\left(\frac{x^3}{3} - 0\right) - 4\alpha\left(\frac{x^2}{2} - 0\right) + 5 = \frac{\alpha}{3}x^3 - 2\alpha x^2 + 5$$

Κι επειδή: $f(4) = 3$, παίρνουμε: $3 = \frac{\alpha}{3} \cdot 64 - 2\alpha \cdot 16 + 5$

ή: $9 = 64\alpha - 96\alpha + 15 \Leftrightarrow -32\alpha = -6 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{16}$

Συνεπώς: $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 5.$

5. Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων συχνά ανάγουμε το ζητούμενο σε άλλα «ευκολότερα». Σ' αυτό χρησιμεύουν οι παρακάτω προτάσεις:

5.1. Πρόταση: Αν οι συναρτήσεις: $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ και $g:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ έχουν συνεχείς παραγωγούς, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx$$

(Ολοκλήρωση κατά παράγοντες).

Απόδειξη: Έχουμε: $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$

Συνεπώς: $f(x)g'(x) = \big(f(x)g(x)\big)' - f'(x)g(x).$

Οπότε: $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \big(f(x)g(x)\big)'\,dx - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx.$

Κι επομένως: $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx.$

5.2 Παραδείγματα: (i): Να υπολογιστεί το: $\int_0^\pi x^2 \text{συν}x\,dx.$

Συνεπώς:
$$\int_0^\pi x^2\text{συν}x\,dx = \Big[x^2\text{ημ}x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \text{ημ}x\,(x^2)'\,dx = -2\int_0^\pi x\,\text{ημ}x\,dx$$
$$= -2\int_0^\pi x(-\text{συν}x)'\,dx = -2\left[\Big[x(-\text{συν}x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-\text{συν}x)(x)'\,dx\right]$$
$$= -2\left[\pi(-\text{συν}\pi) + \int_0^\pi \text{συν}x\,dx\right] = 2\pi + \Big[\text{ημ}x\Big]_0^\pi = 2\pi$$

(ii): Να υπολογιστεί το: $\int_\alpha^\beta \ln x\,dx$ όταν: $0 < \alpha < \beta.$

Απάντηση: Έχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} \ln x \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \ln x \cdot (x)' \, dx$.

Συνεπώς: $\int_{\alpha}^{\beta} \ln x \, dx = \left[x \ln x \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} x (\ln x)' \, dx = \beta \ln\beta - \alpha \ln\alpha - \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$= \beta \ln\beta - \alpha \ln\alpha - (\beta - \alpha) = \beta(\ln\beta - 1) - \alpha(\ln\alpha - 1)$.

5.3. Παρατήρηση: Το τέχνασμα που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω δεν εφαρμόζεται γενικά. Εδώ εκμεταλλευτήκαμε το γεγονός ότι παράγωγος της φ με $\varphi(x) = \ln x / (0, +\infty)$ είναι η $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$.

5.4. Πρόταση: Δεχόμαστε ότι η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής κι ότι η συνάρτηση: $\varphi : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο. Αν το σύνολο τιμών της φ είναι υποδιάστημα του διαστήματος: $[\alpha, \beta]$ και $\varphi(\gamma) = \alpha$, $\varphi(\delta) = \beta$. Τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\delta} f\big(\varphi(t)\big) \varphi'(t) dt.$$

5.5. Παραδείγματα: (i): Να υπολογιστεί το: $J = \int_0^{\pi} \frac{\eta\mu 2kx}{\eta\mu x} dx$ $\quad (k \in Z)$.

Απάντηση: Εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$M = \left\{ \begin{array}{l} x = \pi - t \\ x = 0 \Rightarrow t = \pi \\ x = \pi \Rightarrow t = 0 \end{array} \right\}$$

Και συνεπώς: $\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu 2kx}{\eta\mu x} dx = -\int_{\pi}^{0} \frac{\eta\mu 2k(\pi - t)}{\eta\mu(\pi - t)} dt = -\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu 2kt}{\eta\mu t} dt$

Οπότε: $2\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu 2kx}{\eta\mu x} dx = 0$ Κι επομένως: $\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu 2kx}{\eta\mu x} dx = 0$.

(ii): Να δειχτεί ότι: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\eta\mu x}\, dx}{\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}$.

Απάντηση: Εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$M = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - t \\ x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{array} \right\}$$

Συνεπώς έχουμε:

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\eta\mu x}\,dx}{\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}\,dx}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x} + \sqrt{\eta\mu x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}\,dx}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x} + \sqrt{\eta\mu x}}$$

Επομένως: $$2J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\eta\mu x}\,dx}{\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}\,dx}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x} + \sqrt{\eta\mu x}} = \int_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Συνεπώς: $J = \frac{\pi}{4}$.

(iii): Για τη συνεχή συνάρτηση $f:[0,\pi] \to \mathbb{R}$ να δειχτεί η ισότητα:

$$\int_0^{\pi} x f(\eta\mu x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx$$

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το: $\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Απάντηση: Εκτελούμε το μετασχηματισμό: $M = \left\{\begin{array}{l} x = \pi - t \\ x = 0 \Rightarrow t = \pi \\ x = \pi \Rightarrow t = 0 \end{array}\right\}$

Συνεπώς: $$\int_0^{\pi} x f(\eta\mu x)\,dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f(\eta\mu t)\,dt = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\eta\mu t)\,dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\eta\mu t)\,dt - \int_0^{\pi} t f(\eta\mu t)\,dt$$

Επομένως: $2\int_0^{\pi} x f(\eta\mu x)\,dx = \pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu t)\,dt$ ή: $\int_0^{\pi} x f(\eta\mu x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx$

Έχουμε τώρα: $$\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{2-\eta\mu^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{2-\eta\mu^2 x}\,dx$$

Εκτελούμε το μετασχηματισμό: $M = \left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu x = u \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = \pi \Rightarrow u = -1 \end{array}\right\}$

Οπότε: $$\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2}$$

Εκτελούμε τώρα το μετασχηματισμό:

$$M_2 = \begin{pmatrix} u = \varepsilon\varphi\upsilon \\ u = -1 \Rightarrow \upsilon = -\dfrac{\pi}{4} \\ u = 1 \Rightarrow \upsilon = \dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

Και συνεπώς: $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1+\varepsilon\varphi^2\upsilon}{1+\varepsilon\varphi^2\upsilon}\,d\upsilon = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\upsilon = \frac{\pi^2}{4}$

(iv): Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$J_1 = \int_0^{\pi/4} \eta\mu^2 x\,dx, \quad J_2 = \int_0^{\pi/4} \eta\mu^4 x\,dx, \quad J_3 = \int_0^{\pi/4} \eta\mu^6 x\,dx$$

Απάντηση: ΄Εχουμε: $\displaystyle J_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu 2x\,dx$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\Big[\eta\mu 2x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$J_2 = \int_0^{\pi/4} \eta\mu^3 x(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx = \Big[\eta\mu^3 x(-\sigma\upsilon\nu x)\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}(-\sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu^3 x)'\,dx$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\int_0^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu^2 x\,\eta\mu^2 x\,dx = -\frac{1}{4} + 3\int_0^{\pi/4}(1-\eta\mu^2 x)\,\eta\mu^2 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{4} + 3\int_0^{\pi/4} \eta\mu^2 x\,dx - 3\int_0^{\pi/4} \eta\mu^4 x\,dx = -\frac{1}{4} + 3\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) - 3J_2$$

Και συνεπώς: $\displaystyle J_2 = \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}$.

$$J_3 = \int_0^{\pi/4} \eta\mu^5 x(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx = \Big[\eta\mu^5 x(-\sigma\upsilon\nu x)\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}(-\sigma\upsilon\nu x)\,(\eta\mu^5 x)'\,dx =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 5\int_0^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu^2 x\,\eta\mu^4 x\,dx = -\frac{1}{8} + 5\int_0^{\pi/4}(1-\eta\mu^2 x)\,\eta\mu^4 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{8} + 5\int_0^{\pi/4} \eta\mu^4 x\,dx = -\frac{1}{8} + 5\left(\frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}\right) - 5J_3$$

Συνεπώς: $\displaystyle J_3 = -\frac{11}{48} + \frac{5\pi}{64}$.

(vi): Να βρεθεί το: $\int_0^{\pi^2/4} \eta\mu\sqrt{x}\,dx$.

Απάντηση: Εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

Οπότε: $$\int_0^{\pi^2/4} \eta\mu\sqrt{x}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \eta\mu t \cdot t\,dt = 2\int_0^{\pi/2} t(-\sigma\upsilon\nu t)'\,dt$$

$$= 2\left[\left[t(-\sigma\upsilon\nu t)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/2} (-\sigma\upsilon\nu t)(t)'\,dt\right] = 2\int_0^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu t\,dt = 2\left[\eta\mu t\right]_0^{\pi/4} = 2$$

(vii): Να υπολογιστεί το: $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

Απάντηση: Εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$M_1 = \left\{ \begin{array}{l} x = \varepsilon\varphi t \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

Συνεπώς έχουμε: $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\varepsilon\varphi t)}{1+\varepsilon\varphi^2 t} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/4} \ln\frac{\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu t}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln\frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu t}\,dt = \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}\,dt + \int_0^{\pi/4} \ln\left[\sigma\upsilon\nu\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right]dt - \int_0^{\pi/4} \ln(\sigma\upsilon\nu t)\,dt \qquad (I)$$

Στο ολοκλήρωμα: $\int_0^{\pi/4} \ln\left[\sigma\upsilon\nu\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right]dt$ εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$M_2 = \left\{ \begin{array}{l} u = t - \dfrac{\pi}{4} \\ t = 0 \Rightarrow u = -\dfrac{\pi}{4} \\ t = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow u = 0 \end{array} \right\}$$

Οπότε: $$\int_0^{\pi/4} \ln\left[\sigma\upsilon\nu\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right]dt = \int_{-\pi/4}^{0} \ln(\sigma\upsilon\nu u)\left(u + \frac{\pi}{4}\right)'\,du$$

Και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού: $M_3 = \begin{cases} u = -\upsilon \\ u = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \upsilon = \frac{\pi}{4} \\ u = 0 \Rightarrow \upsilon = 0 \end{cases}$

παίρνουμε:

$$\int_0^{\pi/4} \ln\left[\text{συν}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right] dt = \int_{\pi/4}^{0} \ln\left[\text{συν}(-\upsilon)\right](-\upsilon)'\, d\upsilon = -\int_{\pi/4}^{0} \ln(\text{συν}\upsilon)\, d\upsilon = \int_0^{\pi/4} \ln(\text{συν}\upsilon)\, d\upsilon \quad (II)$$

Απ' τις (I) και (II) παίρνουμε: $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$

(viii): Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(\alpha): \lim \frac{\sqrt{\nu+1} + \sqrt{\nu+2} + \ldots + \sqrt{2\nu-1}}{\nu^{3/2}}$$

$$(\beta): \lim \frac{\text{εφ}\frac{\pi}{3\nu} + \text{εφ}\frac{2\pi}{3\nu} + \ldots + \text{εφ}\frac{\nu\pi}{3\nu}}{\nu}$$

Απάντηση: • Για το (α)

Έχουμε:

$$\lim \frac{\sqrt{\nu+1} + \sqrt{\nu+2} + \ldots + \sqrt{2\nu-1}}{\nu^{3/2}} = \lim \frac{\sqrt{\nu+1} + \ldots + \sqrt{2\nu-1}}{\nu\sqrt{\nu}}$$

$$= \lim \left[\frac{1}{\nu}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\nu}} + \sqrt{1+\frac{2}{\nu}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{\nu-1}{\nu}}\right)\right] =$$

$$= \lim \left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{1+\frac{i}{\nu}}\right] \quad (I) \quad \left(\text{αφού: } \lim \frac{1}{\nu}\sqrt{2} = 0\right)$$

Η συνάρτηση: $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \sqrt{1+x}$ είναι συνεχής.

Συνεπώς: $\lim \left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{1+\frac{i}{\nu}}\right] = \int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx = \left[\frac{(1+x)^{1/2+1}}{1/2+1}\right]_0^1 = \frac{2^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{3/2}$

Δηλαδή: $\lim \left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{1+\frac{i}{\nu}}\right] = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$ (το ζητούμενο όριο).

• Για το (β)

Έχουμε: $$\lim \frac{\text{εφ}\frac{\pi}{3\nu} + \text{εφ}\frac{2\pi}{3\nu} + \ldots + \text{εφ}\frac{\nu\pi}{3\nu}}{\nu} =$$

$$= \lim\left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} \text{εφ}\frac{i\pi}{3\nu}\right] = \frac{3}{\pi}\lim\left[\frac{\pi}{3\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\text{εφ}\frac{i\pi}{3\nu}\right] \qquad \text{(II)}$$

Η συνάρτηση: $f:\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \text{εφ}x$ είναι συνεχής.

Συνεπώς: $$\lim\left[\frac{\pi}{3\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\text{εφ}\frac{i\pi}{3\nu}\right] = \int_0^{\pi/3}\text{εφ}x\,dx = -\int_0^{\pi/3}\frac{1}{\text{συν}x}(\text{συν}x)'dx$$

Εκτελούμε το μετασχηματισμό: $\text{συν}x = u$ $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\end{array}\right\}$

Συνεπώς: $$-\int_0^{\pi/3}\frac{1}{\text{συν}x}(\text{συν}x)'dx = -\int_1^{1/2}\frac{1}{u}\cdot 1du = \int_{1/2}^{1}\frac{du}{u} = \Big[\ln u\Big]_{1/2}^{1}$$

$$= \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2 \qquad \text{(III)}$$

Απ' τις (II) και (III) παίρνουμε: $$\frac{\text{εφ}\frac{\pi}{3\nu} + \text{εφ}\frac{2\pi}{3\nu} + \ldots + \text{εφ}\frac{\nu\pi}{3\nu}}{\nu} = \frac{3}{\pi}\ln 2.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Στο γράψιμο του άρθρου πήραμε υπόψη κατά βάση τα παρακάτω:

1. Tom M. Apostol: «Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός», μετάφραση Δ. Γκιόκα. Εκδόσεις Μ. Πεχλιβανίδης και Σια.
2. Ν. Βαρουχάκη - Σ. Φωτόπουλου: «Μαθηματικά Ι. Ανάλυση». Εκδόσεις ΟΕΔΒ.
3. T.M. Flett: "Mathematical Analysis" NcGraw - Hill Book Co.
4. R.R. Goldberg: "Methods of real Analysis". Xerox College Publishing.
5. Δ.Α. Κάππου: «Μαθήματα Αναλύσεως - Απειροστικός Λογισμός», τεύχος Α, έκδοση 3, Αθήνα 1962.
6. H. Loria: «Ιστορία των Μαθηματικών». Τόμος 1, Έκδοση Ε.Μ.Ε.

7. I.A. Maron: "Problems in Calculus of one Variable" Trans from the Russian by Levant. Mir Publishers Moscow.
8. W. Rudin: "Principles of Mathematical Analysis" Second Edition Int. Stud. Ed.
9. Ε. Σταμάτη: «Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών» Αθήνα 1976.
10. M.S. Spiegel: "Advanced Calculus" Schaum's Outline Series McGraw-Hill Book Co.
11. A.E. Taylor - W.R. Mann "Advanced Calculus". Second Edition Xerox College Publishing.

ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ ΤΗΣ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ, ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΑΠΟΦΑΣΗ ΣΥΝΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΒΑΘΜΩΝ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ Α.Ε.Ι. ΚΑΙ Τ.Ε.Ι.

Μπόρα - Σέντα Ε., Μωυσιάδης Χ., Χατζηπαντελής Θ.

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Τμήμα Μαθηματικών

Τομέας Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας

Στην εργασία αυτή μελετώνται οι παράγοντες που επηρεάζουν την αύξηση της βαθμολογίας των μαθητών στα Λύκεια. Συγκεκριμένα, οι παράγοντες που εξετάζονται είναι η «περιοχή» (δηλ. η κοινωνική προέλευση του μαθητή), ο «καθηγητής» (δηλ. η αλλαγή των κριτηρίων αξιολόγησης), το «σύστημα» (δηλ. η θεσμική αλλαγή του 1979), η «κλάση» (δηλ. η ηλικία).

1. Εισαγωγή

Το έτος 1979 με το διάταγμα 298/14.3.80 άλλαξε στη χώρα μας ο τρόπος εισαγωγής των μαθητών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Έτσι από τη χρονιά αυτή και μετά, οι μαθητές έδιναν πανελλήνιες εξετάσεις στη Β΄ και Γ΄ Λυκείου, στα βασικά μαθήματα της κατεύθυνσης που επέλεξαν. Η εξέταση στη Β΄ Λυκείου εφαρμόστηκε μόνο για τρία χρόνια, δηλ. από το σχολικό έτος 1981-82 οι υποψήφιοι δίνουν πανελλήνιες