Author: Άγνωστος Συγγραφέας

Title: Ασκήσεις δια την στ΄τάξιν-

Creator: HDML

# ασκησεις δια την στ΄ ταξιν

**ΑΛΓΕΒΡΑ. ΣΤ.37** Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι ἀληθὴς ἡ συνεπαγωγή :

$$(|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_\nu| > 0 \wedge |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_\nu|^2 \leq 1) \Rightarrow$$

$$\left|\frac{z_1}{\alpha_1}\right|^2 + \left|\frac{z_2}{\alpha_2}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{z_\nu}{\alpha_\nu}\right|^2 \geq |z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu|^2$$

Ἀπόδειξις. Μὲ τὸ νὰ εἶναι $|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu| > 0$, ἔπεται ὅτι: $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu \neq 0$, ἄρα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \neq 0$ καὶ διὰ τοῦτο οἱ ἐκφράσεις $\frac{z_i}{\alpha_i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ ἔχουν νόημα ἀριθμοῦ.

Ἔπειτα, ἐπειδὴ εἶναι :

$$1 \geq |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_\nu|^2 \text{ (δεδομένον)}$$

πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη της ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν

$$\left|\frac{z_1}{\alpha_1}\right|^2 + \left|\frac{z_2}{\alpha_2}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{z_\nu}{\alpha_\nu}\right|^2,$$

ὁ ὁποῖος εἶναι θετικός, (ὡς ἄθροισμα θετικῶν), ἔχομεν :

$$\left|\frac{z_1}{\alpha_1}\right|^2 + \left|\frac{z_2}{\alpha_2}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{z_\nu}{\alpha_\nu}\right|^2 \geq$$

$$\geq \left(\left|\frac{z_1}{\alpha_1}\right|^2 + \left|\frac{z_2}{\alpha_2}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{z_\nu}{\alpha_\nu}\right|^2\right)(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_\nu|^2) \quad (1)$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοί :

$$\left|\frac{z_1}{\alpha_1}\right|, \left|\frac{z_2}{\alpha_2}\right|, \ldots, \left|\frac{z_\nu}{\alpha_\nu}\right| \text{ καὶ } |\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_\nu|$$

εἶναι πραγματικοί, θὰ ἔχωμεν, σύμφωνα μὲ τὴν ἀνισότητα Cauchy - Schwartz ὅτι :

$$\left(\left|\frac{z_1}{\alpha_1}\right|^2 + \left|\frac{z_2}{\alpha_2}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{z_\nu}{\alpha_\nu}\right|^2\right)(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_\nu|^2) \geq$$

$$\geq \left(\left|\frac{z_1}{\alpha_1}\right||\alpha_1| + \left|\frac{z_2}{\alpha_2}\right||\alpha_2| + \cdots + \left|\frac{z_\nu}{\alpha_\nu}\right||\alpha_\nu|\right)^2, \quad \text{δηλ. :}$$

$$\left(\left|\frac{z_1}{\alpha_1}\right|^2 + \left|\frac{z_2}{\alpha_2}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{z_\nu}{\alpha_\nu}\right|^2\right)(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_\nu|^2) \geq$$

$$\geq (|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_\nu|)^2 \quad (2).$$

Ἀπὸ (1) καὶ (2), ἐπειδὴ ἡ σχέσις «$\geq$» ἐν R εἶναι μεταβατική, ἔχομεν :

$$\left|\frac{z_1}{\alpha_1}\right|^2 + \left|\frac{z_2}{\alpha_2}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{z_\nu}{\alpha_\nu}\right|^2 \geq (|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_\nu|)^2 \quad (3)$$

Ἀλλά, ὡς γνωστόν, ἰσχύει :

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_\nu| \geq |z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu|,$$

ἀπὸ ὅπου, ἐπειδὴ τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ συνεπῶς ἡ ὕψωσις εἰς τὸ τετράγωνον δὲν μεταβάλλει τὴν φορὰν αὐτῆς, ἔχομεν :

$$(|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_\nu|)^2 \geq |z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu|^2 \quad (4).$$

Ἀπὸ (3) καὶ (4), λόγῳ τῆς μεταβατικότητος τῆς σχέσεως «$\geq$» ἐν R, ἔχομεν :

$$\left|\frac{z_1}{\alpha_1}\right|^2 + \left|\frac{z_2}{\alpha_2}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{z_\nu}{\alpha_\nu}\right|^2 \geq |z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu|^2 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$



**ΣΤ.38** Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(1+x)^\alpha < 1+\alpha x \quad (1),$$

ὅπου $0<\alpha<1$, διὰ $x > 0$ ἢ $-1<x<0$.

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι μὲ τὸ νὰ εἶναι $x>0$ ἢ $-1<x<0$, ἔπεται ὅτι $1+x>0$. Διὰ τοῦτο ἡ συνάρτησις $f(x) = (1+x)^\alpha$ εἶναι ὡρισμένη διὰ κάθε $x>0$ καθὼς καὶ διὰ κάθε $x \in ]-1, 0[$.

Ἔπειτα ἡ ἀνίσωσις (1) ἀνάγεται εἰς τὴν

$$(1+x)^\alpha - 1 < \alpha x \quad (2).$$

Ἀλλὰ $1 = f(0)$ καὶ ἡ (2) γράφεται :

$$f(x) > -f(0) < \alpha x \quad (3).$$

Διακρίνομεν τώρα δύο περιπτώσεις, σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα.

(I) $x>0$. Τότε ἡ (3) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $\frac{f(x)-f(0)\alpha}{x}<\alpha$ ἡ ὁποία γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} < \alpha \quad (4).$$

Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ εἶναι ἡ μέση τιμὴ τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως $f(x)$ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τοῦ τέλους τοῦ τμήματος $[0, x]$, διὰ κάθε $x>0$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐν λόγῳ συνάρτησις εἶναι : 1) ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ τμήματος $[0, x]$ καὶ συνεχής 2) παραγωγίσιμος ἐπὶ τοῦ διαστήματος $(0, x)$, ἔπεται, ὡς γνωστόν, ὅτι ὑπάρχει τιμὴ $\xi \in (0, x)$, τέτοια ὥστε ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον $x = \xi$ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν μέσην τιμὴν τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τοῦ τέλους τοῦ τμήματος $[0, x]$.

Δηλαδὴ θὰ εἶναι $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ καὶ ἔτσι ἡ (4) ἀνάγεται εἰς τὴν $f'(\xi) < \alpha$, δηλαδή :

$$\alpha(1+\xi)^{\alpha-1} < \alpha \Leftrightarrow (1+\xi)^{\alpha-1} < 1 \quad (5)$$

(ἀφοῦ εἶναι $\alpha > 0$), διὰ κάθε $x > 0$.

Ἀληθεύει ὅμως ἡ συνεπαγωγή :

$$\xi \in (0, x) \Leftrightarrow 0 < \xi < x \Rightarrow 1 < 1+\xi.$$

Καὶ ἐπειδή, ἀπὸ δύο δυνάμεις ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀνωτέρου ἀπὸ τὸν 1, μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη ποὺ ἔχει μεγαλύτερον ἐκθέτην, δεδομένου ὅτι εἶναι $\alpha<1$, ἄρα $\alpha-1<0$, ἔπεται ὅτι :

$$(1+\xi)^{\alpha-1} < (1+\xi)^0, \quad \text{δηλ.} \quad (1+\xi)^{\alpha-1} < 1.$$

Ἀληθεύει λοιπὸν ἡ (5), ἄρα καὶ ἡ (4), συνεπῶς καὶ ἡ (1), διὰ κάθε $x > 0$.

(II) $-1<x<0$. Τότε ἡ (3) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $\frac{f(x)-f(0)}{x} > \alpha$, ἡ ὁποία μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως εἰς τήν :

$$\frac{f(0)-f(x)}{-x} > \alpha, \quad \text{ἢ} \quad \frac{f(0)-f(x)}{0-x} > \alpha \quad (6).$$

Τὸ κλάσμα $\frac{f(0)-f(x)}{0-x}$ εἶναι ἡ μέση τιμὴ τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως $f(x)$ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τοῦ τέλους τοῦ τμήματος $[x, 0]$.

Ἀλλὰ ἡ συνάρτησις $f(x)$ εἶναι ἐπίσης : 1) ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ τμήματος $[x, 0]$ καὶ συνεχὴς 2) παραγωγίσιμος ἐπὶ τοῦ διαστήματος $(x, 0)$, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει τιμὴ $\gamma \in (x, 0)$, τέτοια ὥστε ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον $x = \gamma$ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν μέσην τιμὴν τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τοῦ τέλους τοῦ τμήματος $[x, 0]$.

Δηλαδὴ θὰ εἶναι $f'(\gamma) = \dfrac{f(0)-f(x)}{0-x}$ καὶ ἔτσι ἡ (6) ἀνάγεται εἰς τήν :

$$f'(\gamma) > \alpha, \text{ δηλ. } \alpha(1+\gamma)^{\alpha-1} > \alpha \iff (1+\gamma)^{\alpha-1} > 1 \quad (7)$$

(ἀφοῦ $\alpha > 0$).

Ἀληθεύει ὅμως ἡ συνεπαγωγή :

$$(\gamma \in (x, 0) \text{ καὶ } x \in ]-1, 0[ \Rightarrow -1 < \gamma < 0 \Rightarrow 0 < 1+\gamma < 1.$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἀπὸ δύο δυνάμεις θετικοῦ ἀριθμοῦ καὶ κατωτέρου ἀπὸ 1, μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη ποὺ ἔχει μικρότερον ἐκθέτην. Ἑπομένως, δεδομένου ὅτι εἶναι $\alpha < 1$, ἄρα $\alpha - 1 < 0$, ἕπεται ὅτι :

$$(1+\gamma)^{\alpha-1} > (1+\gamma)^0, \quad \text{δηλ.} \quad (1+\gamma)^{\alpha-1} > 1.$$

Ἀληθεύει λοιπὸν ἡ (7), ἄρα καὶ ἡ (6), διὰ κάθε :

$$x \in ]-1, 0[.$$

Διὰ τοῦτο ἀληθεύει διὰ κάθε $x \in ]-1, 0[$ καὶ ἡ (3), ἰσοδύναμος τῆς (6), ἄρα καὶ ἡ (1). δ.ἔ.δ.

**ΣΤ.39 Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις :**

$$x+1+\ln(1+x^2) = 0 \quad (1)$$

**ἔχει μίαν μόνον πραγματικὴν ρίζαν.**

*Ἀπόδειξις.* Θέτομεν :

$$f(x) = x+1+\ln(1+x^2) \quad (2).$$

Ἡ ἀριθμητικὴ συνάρτησις $f$ ἡ ὁριζομένη διὰ τῆς σχέσεως (2) εἶναι συνεχὴς ἐντὸς τοῦ διαστήματος $]-\infty, +\infty[$ (ἄθροισμα δύο συνεχῶν συναρτήσεων : $f_1(x) = x+1$ καὶ $f_2(x) = 1+x^2$) καὶ παραγωγίσιμος.

Ἔχομεν :

$$f'(x) = 1+\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x^2+2x+1}{1+x^2}, \quad \text{δηλ.} \quad f'(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2},$$

ἀπὸ ὅπου φαίνεται ὅτι εἶναι $f'(x) > 0$ διὰ $x \neq -1$ καὶ μένει θετικὴ καὶ μετὰ τὸν μηδενισμόν της.

Ἀπὸ αὐτὸ συνάγεται ὅτι ἡ ἐν λόγῳ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα ἐντὸς τοῦ διαστήματος $]-\infty, +\infty[$.

Ἐξετάζοντες τὰ ὅρια τῆς συναρτήσεως αὐτῆς, ὅταν $x \to +\infty \vee -\infty$, παρατηροῦμεν ὅτι λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\infty - \infty$, ὅταν $x \to -\infty$, διότι : $(x+1) \to -\infty$, ἐνῷ $\ln(1+x^2) \to +\infty$ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν.

Δύναται ὅμως νὰ γραφῇ ἡ συνάρτησις ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x) = x\left[1+\frac{1+\ln(1+x^2)}{x}\right] = x\left[1-\frac{1+\ln(1+x^2)}{-x}\right] \quad (3).$$

Τώρα ὁ ὅρος $\dfrac{1+\ln(1+x^2)}{-x}$ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης λαμβάνει τὴν μορφὴν $\dfrac{\infty}{\infty}$ ὅταν $x \to -\infty$ καὶ συνεπῶς τὸ ὅριον αὐτοῦ, σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα τοῦ De L' Hospital εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὅριον τοῦ κλάσματος :

$$\frac{[\ln(1+x^2)]'}{(-x)'} = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{-1} = -\frac{2x}{1+x^2} = \frac{-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} \to 0,$$

ὅταν $x \to -\infty$.

Ἄρα, $\dfrac{1+\ln(1+x^2)}{-x} \to 0$, ὅταν $x \to -\infty$ καὶ ἑπομένως

$$1-\frac{1+\ln(1+x^2)}{-x} \to 1-0 = 1, \text{ ὅταν } x \to -\infty.$$

Ἔτσι, τὸ γινόμενον (3), ὅταν $x \to -\infty$ εἶναι γινόμενον δύο παραγόντων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας, ὁ $x$, τείνει πρὸς τὸ $-\infty$ καὶ ὁ ἄλλος, ὁ $1-\dfrac{1+\ln(1+x^2)}{-x}$ τείνει πρὸς ἕνα θετικὸν ἀριθμόν, τὸν 1. Ἄρα $f(x) \to -\infty$, ὅταν $x \to -\infty$.

Ὅταν $x \to +\infty$, τότε $x+1 \to +\infty$ καὶ $\ln(1+x^2) \to +\infty$, ἄρα $x+1+\ln(1+x^2) \to +\infty$, δηλ. $f(x) \to +\infty$, ὅταν $x \to +\infty$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἡ συνάρτησις :

$$f(x) = x+1+\ln(1+x^2),$$

εἶναι μία συνεχὴς συνάρτησις καὶ μονότονος ἐντὸς τοῦ διαστήματος $]-\infty, +\infty[$ καὶ διὰ τοῦτο λαμβάνει μίαν καὶ μόνον μίαν φορὰν κάθε τιμὴν ἐντὸς τοῦ διαστήματος :

$$]f(-\infty), f(+\infty)[.$$

Μία τέτοια τιμὴ εἶναι καὶ ἡ μηδενική, ἀφοῦ ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ὡς ἐδείχθη.

Ὑπάρχει λοιπὸν μία καὶ μόνον μία τιμὴ $x = x_0$, τέτοια ὥστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει μίαν καὶ μόνον πραγματικὴν ρίζαν.

**ΣΤ.40 Ἐὰν $\binom{\nu}{k}$ εἶναι οἱ συνδυασμοὶ ν ἀντικειμένων ἀνὰ k, τότε νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :**

$$2\cdot\binom{\nu}{0}+\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\binom{\nu}{1}+\frac{1}{3}\cdot 2^3\cdot\binom{\nu}{2}+ \cdots +\frac{1}{\nu+1}\cdot 2^{\nu+1}\cdot\binom{\nu}{\nu} = \frac{3^{\nu+1}-1}{\nu+1}.$$

*Ἀπόδειξις.* Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f(x) = (1+x)^\nu$, τότε :

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (1+x)^\nu dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}x+\cdots+\binom{\nu}{\nu}x^\nu\right)dx =$$

$$= \left[\binom{\nu}{0}x+\frac{1}{2}\cdot\binom{\nu}{1}\cdot x^2+\frac{1}{3}\cdot\binom{\nu}{2}\cdot x^3+\cdots \right.$$

$$\left. \cdots+\frac{1}{\nu+1}\cdot\binom{\nu}{\nu}\cdot x^{\nu+1}\right]_0^2 =$$

$$= 2\cdot\binom{\nu}{0}+\frac{1}{2}\cdot 2^2\binom{\nu}{1}+\frac{1}{3}\cdot 2^3\cdot\binom{\nu}{2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{\nu+1}\cdot 2^{\nu+1}\cdot\binom{\nu}{\nu}.$$

Ἀλλὰ $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (1+x)^\nu dx = \int_0^2 (1+x)^\nu d(1+x) =$

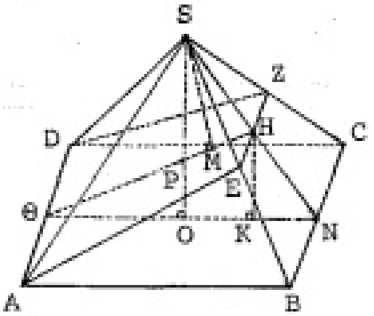
$$= \frac{(1+x)^{\nu+1}}{\nu+1}\Big|_0^2 = \frac{(1+2)^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{(1+0)^{\nu+1}}{\nu+1} = \frac{3^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+1}.$$

Συνεπῶς :

$$2\cdot\binom{\nu}{0} + \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\binom{\nu}{1} + \frac{1}{3}\cdot 2^3\cdot\binom{\nu}{2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{\nu+1}\cdot 2^{\nu+1}\cdot\binom{\nu}{\nu} = \frac{3^{\nu+1}-1}{\nu+1}.$$

**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. ΣΤ.41** **Δίδεται κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς S.ABCD ὕψους υ καὶ πλευρᾶς βάσεως α. Ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον διὰ μιᾶς πλευρᾶς τῆς βάσεως διχοτομεῖ μίαν πλευρικὴν ἀκμὴν τῆς πυραμίδος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος.**




Λύσις. Τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς πλευρᾶς AD τῆς βάσεως ABCD καὶ διὰ τοῦ μέσου E τῆς πλευρικῆς ἀκμῆς SB, εἶναι ἕνα ἐπίπεδον (Π) τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ τὰ δύο ἐπίπεδα (ADE) καὶ (SBC) τέμνονται καὶ διέρχονται διὰ δύο παραλλήλων εὐθειῶν AD καὶ BC, θὰ τέμνωνται κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον τῶν AD, BC.

Ἔτσι, δεδομένου ὅτι τὸ E εἶναι ἕνα κοινὸν σημεῖον αὐτῶν τῶν δύο ἐπιπέδων, ἡ τομή των θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα EZ ἡ παράλληλος τῆς BC ἀπὸ τὸ E.

Διὰ τὸν ἐντοπισμὸν τοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς S τῆς πυραμίδος ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον (ADE), πρέπει νὰ ἐντοπισθῇ τὸ ἐπίπεδον (Σ) τὸ κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (ADE) ἀπὸ S καὶ ἀκολούθως ἡ κάθετος ἀπὸ S πρὸς τὴν τομὴν αὐτῶν τῶν δύο καθέτων ἐπιπέδων.

Λόγῳ τῆς κανονικότητος τῆς πυραμίδος, τὸ ἐπίπεδον Σ τὸ κάθετον πρὸς τὴν AD, μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, εἶναι τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τῆς πλευρᾶς AD. Διὰ τοῦτο, τὸ ἐν λόγῳ ἐπίπεδον περιέχει τὴν διάμεσον ΘN τὴν ἀντίστοιχον τῶν πλευρῶν AD καὶ BC. Εἶναι δηλαδὴ ἐπίπεδον Σ τὸ ἐπίπεδον (SΘN), ὅπου Θ καὶ N τὰ μέσα τῶν AD καὶ BC.

Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα SN αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου, ἐπειδὴ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου SBC ἀπὸ S, περιέχει τὰ μέσα ὅλων τῶν εὐθ. τμημάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι παράλληλα τῆς BC καὶ ἔχουν τὰ ἄκρα των ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν SB, SC αὐτοῦ τοῦ τριγώνου. Ἄρα περιέχει ἡ SN τὸ μέσον H τοῦ EZ. Ἔτσι, τομὴ τῶν ἐπιπέδων (Σ) καὶ (ADE) εἶναι ἡ εὐθεῖα ΘH.

Κάθετος λοιπὸν πρὸς τὸ ἐπίπεδον (ADE), ἀπὸ τὸ σημεῖον S, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς ἐπίπεδον Σ κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (ADE) εἶναι ἡ κάθετος SM ἀπὸ S πρὸς τὴν τομὴν ΘH τῶν δύο ἀνωτέρω καθέτων ἐπιπέδων καὶ συνεπῶς ἀπόστασις τοῦ S ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον (ADE) εἶναι τὸ μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος SM (M ἐπὶ τῆς ΘH).

Ἡ εὐθεῖα ΘN τοῦ ἐπιπέδου (Σ) = (SΘN), μία διάμεσος τῆς τετραγωνικῆς βάσεως ABCD περιέχει τὸ κέντρον O τῆς βάσεως καὶ ἔτσι τὸ ἐπίπεδον (Σ) περιέχει τὸ ὕψος SO τῆς πυραμίδος. Αὐτό, συνεπίπεδον τῆς ΘH καὶ διαφόρου διευθύνσεως ἀπὸ αὐτήν, τὴν τέμνει εἰς σημεῖον P.

Ἔτσι τὰ τρίγωνα $\left.\begin{matrix}\text{SMP}\\ \text{ΘOP}\end{matrix}\right\}$ ὀρθογώνια εἰς M καὶ O καὶ μὲ ἴσες τὶς γωνίες των P, εἶναι ὅμοια.

Διὰ τοῦτο ἔχομεν :

$$\frac{SM}{\Theta O} = \frac{SP}{\Theta P}, \text{ ἀπὸ ὅπου } SM = \Theta O\cdot\frac{SP}{\Theta P} \quad (1).$$

Ἀλλὰ

$$\Theta O = \frac{1}{2}\Theta N = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\alpha, \quad \text{ἄρα} \quad \Theta O = \frac{1}{2}\alpha \quad (2).$$

Παρατηροῦμεν ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ὅτι τὸ σημεῖον H, κοινὸν σημεῖον τῆς SN καὶ τῆς EZ παραλλήλου πρὸς τὴν BC, ὑποστήριγμα τῆς πλευρᾶς BN τοῦ τριγώνου SBN ἀπὸ ἀπὸ τὸ μέσον E δευτέρας πλευρᾶς SB αὐτοῦ, θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς SN.

Ἂν λοιπὸν χαραχθῇ ἀπὸ τὸ H ἡ παράλληλος τῆς SO, τὸ σημεῖον K εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ON θὰ εἶναι, διὰ λόγον τὸν αὐτὸν ὡς ἀνωτέρω, τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ON τοῦ τριγώνου SON.

Ἄρα :

$$OK = \frac{1}{2}ON = \frac{1}{4}\Theta N, \text{ δηλ. } OK = \frac{1}{4}\alpha \quad (3),$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ HK συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν SN, ON τοῦ τριγώνου SON, θὰ εἶναι :

$$HK = \frac{1}{2}SO, \quad \text{δηλ.} \quad HK = \frac{1}{2}\upsilon \quad (4).$$

Ἡ (4) ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογισθῇ τώρα τὸ μῆκος OP καὶ ἀκολούθως τὸ SP, διότι λόγῳ τῶν παραλλήλων OP καὶ HK τὰ τρίγωνα $\left.\begin{matrix}\text{ΘOP}\\ \text{ΘKH}\end{matrix}\right\}$ εἶναι ὅμοια καὶ συνάγεται ὅτι :

$$\frac{OP}{KH} = \frac{\Theta O}{\Theta K} = \frac{\Theta O}{\Theta O + OK} = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\frac{3}{4}\alpha},$$

$$\text{δηλ. } \frac{OP}{KH} = \frac{2}{3}, \text{ ἀπὸ ὅπου } OP = \frac{2}{3}KH = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\upsilon$$

δηλ.

$$OP = \frac{1}{3}\upsilon \quad (5),$$

ὁπότε

$$SP = SO - OP = \upsilon - \frac{1}{3}\upsilon, \text{ ἄρα :}$$

$$SP = \frac{2}{3}\upsilon \quad (6).$$

Τέλος, τὸ τρίγωνον ΘOP, ὀρθογώνιον εἰς τὸ O, δίδει

$$\Theta P^2 = \Theta O^2 + OP^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\upsilon^2}{9} \text{ (λόγῳ τῶν (2) καὶ (5)), δηλ.}$$

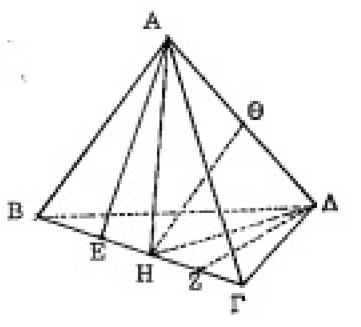
$$\Theta P^2 = \frac{9\alpha^2+4\upsilon^2}{36}, \text{ ἀπὸ ὅπου } \Theta P = \frac{1}{6}\sqrt{9\alpha^2+4\upsilon^2} \quad (7).$$

Κατόπιν τῶν (2), (6) καὶ (7), ἡ (1) δίδει :

$$SM = \frac{1}{2}\alpha\cdot\frac{2}{3}\upsilon\cdot\frac{6}{\sqrt{9\alpha^2+4\upsilon^2}}, \text{ δηλ.}$$

$$SM = \frac{2\alpha\upsilon}{\sqrt{9\alpha^2+4\upsilon^2}} \text{ (ἀπόστασις ζητουμένη).}$$

**ΣΤ.42 Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἂν ἕνα τετράεδρον εἶναι ἰσοεδρικόν, τὰ ὕψη του θὰ εἶναι ἴσα. Καὶ ἀντιστρόφως.**




**Ἀπόδειξις.** Θεωροῦμεν τετράεδρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν εἶναι ἰσοεδρικόν, καὶ ὀνομάζομεν $υ_1, υ_2, υ_3, υ_4$ τὰ ἀπὸ Α, Β, Γ, Δ ὕψη του ἀντιστοίχως.

Ἐπειδὴ τὰ ὕψη ἑνὸς τετραέδρου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀντιστοίχων βάσεων, θὰ ἔχωμεν :

$$(ΒΓΔ)υ_1 = (ΓΔΑ)υ_2 = (ΔΑΒ)υ_3 = (ΑΒΓ)υ_4 \quad (1).$$

Καὶ ἀφοῦ τὸ τετράεδρον εἶναι ἰσοεδρικόν, τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν του θὰ εἶναι ἴσα καὶ διὰ τοῦτο ἔχομεν :

$$(ΒΓΔ) = (ΓΔΑ) = (ΔΑΒ) = (ΑΒΓ) \quad (2).$$

Ἀπὸ (1) καὶ (2), διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη, συνάγεται ὅτι θὰ εἶναι :

$$\frac{(ΒΓΔ)υ_1}{(ΒΓΔ)} = \frac{(ΓΔΑ)υ_2}{(ΓΔΑ)} = \frac{(ΔΑΒ)υ_3}{(ΔΑΒ)} = \frac{(ΑΒΓ)υ_4}{(ΑΒΓ)}, \quad δηλ.$$

$$υ_1 = υ_2 = υ_3 = υ_4.$$

Ἄρα, ἂν ἕνα τετράεδρον εἶναι ἰσοεδρικόν, τὰ ὕψη του εἶναι ἴσα.

**Ἀντιστρόφως.** Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ ἔχει τὰ ὕψη του ἴσα, δηλ. ὅτι $υ_1 = υ_2 = υ_3 = υ_4$. Τότε ἀπὸ τὴν (1), ἡ ὁποία ἰσχύει εἰς κάθε τετράεδρον, συνάγεται ὅτι θὰ εἶναι (ΒΓΔ) = (ΓΔΑ) = (ΔΑΒ) = (ΑΒΓ).

Θεωροῦμεν δύο ὁποιεσδήποτε ἕδρες τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ, π. χ. τὶς ἕδρες ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ. Ἐπειδὴ ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ (ὡς ἐδείχθη) καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὴν ΒΓ, θὰ ἔχουν ἴσα τὰ ὕψη των ΑΕ, ΔΖ τὰ ἀντίστοιχα τῆς κοινῆς βάσεως ΒΓ.

Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, οἱ εὐθεῖες ΑΕ, ΔΖ, ἀσύμβατοι εὐθεῖες κάθετοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΓ, εἶναι παράλληλοι πρὸς οἱονδήποτε ἐπίπεδον Π κάθετον τῆς ΒΓ. Ἂν λοιπὸν ἀπὸ τὸ μέσον Θ τῆς ἀκμῆς ΑΔ χαραχθῇ ἡ κάθετος τῆς ΒΓ, ἡ ΘΗ (Η ἐπὶ τῆς ΒΓ), τότε οἱ τρεῖς εὐθεῖες ΑΕ, ΘΗ, ΔΖ εἶναι τρεῖς εὐθεῖες, οἱ ὁποῖες εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π καὶ τέμνουν δύο ἀσυμβάτους εὐθεῖες ΑΔ, ΒΓ. Διὰ τοῦτο τὰ τμήματα, ποὺ ὁρίζονται ἐπὶ τῆς ΑΔ θὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχά των ἐπὶ τῆς ΒΓ. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$\frac{ΕΗ}{ΗΖ} = \frac{ΑΘ}{ΘΔ} = 1 \text{ (ἀφοῦ Θ τὸ μέσον τοῦ ΑΔ)},$$

ἀπὸ ὅπου ΕΗ = ΗΖ.

Ἔτσι τὰ τρίγωνα ΑΕΗ, ΔΖΗ ὀρθογώνια εἰς Ε καὶ Ζ ἔχουν ἴσες μίαν πρὸς μίαν τὶς πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας. Συνεπῶς ἔχουν καὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην, δηλ. εἶναι ΗΑ = ΗΔ.

Μὲ τοῦτο ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΗΔ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ κορυφὴν Η καὶ συνεπῶς ἡ ΗΘ, διάμεσος τῆς βάσεως ΑΔ αὐτοῦ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, θὰ εἶναι κάθετος τῆς ΑΔ.

Ἄρα ἡ κάθετος τῆς ΒΓ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΑΔ εἶναι κοινὴ κάθετος τῶν ΒΓ καὶ ΑΔ ἀκριβέστερον δὲ ἡ μοναδικὴ κοινὴ κάθετος τῶν ἀσυμβάτων ΒΓ καὶ ΑΔ. Εἶναι λοιπὸν ἀληθὴς ἡ ἑξῆς πρότασις :

«Ἂν δύο ἕδρες τετραέδρου ἔχουν ἴσα ἐμβαδά, ἡ κάθετος πρὸς τὴν κοινὴν πλευρὰν αὐτῶν ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς τοῦ τετραέδρου, εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος τῆς κοινῆς πλευρᾶς τῶν δύο ἀνωτέρω ἑδρῶν καὶ τῆς ἀπέναντι αὐτῆς ἀκμῆς τοῦ τετραέδρου».

Σύμφωνα μὲ τὴν πρότασιν αὐτήν, ἐπειδὴ καὶ οἱ ἕδρες ΒΑΔ καὶ ΓΑΔ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ ἔχουν (ὡς ἐδείχθη) ἴσα ἐμβαδά, ἕπεται ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τῆς ΑΔ (κοινῆς πλευρᾶς αὐτῶν τῶν ἑδρῶν) καὶ τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς ΒΓ τοῦ τετραέδρου, εἶναι ἡ κάθετος τῆς ΑΔ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ἀλλὰ ἡ μοναδικὴ κοινὴ κάθετος τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἡ ΘΗ, ὡς ἐδείχθη.

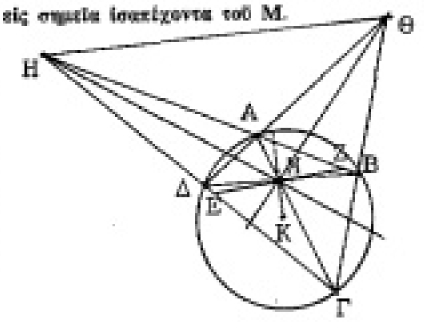
Ἄρα κάθετος τῆς ΑΔ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΒΓ εἶναι ἡ ΘΗ (Η ἐπὶ τῆς ΒΓ) καὶ ἀπὸ αὐτὸ συνάγεται ὅτι τὸ Η τῆς ΒΓ εἶναι τὸ μέσον αὐτῆς.

Ἔτσι ἡ ΗΘ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ [ΑΔ] καθὼς καὶ τοῦ [ΒΓ], δηλαδὴ ἄξων συμμετρίας τῶν (Α, Δ) καθὼς καὶ τῶν (Β, Γ).

Ἀλλὰ εὐθύγραμμα τμήματα συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα εἶναι ἴσα. Διὰ τοῦτο θὰ εἶναι ΑΒ = ΔΓ καὶ ΑΓ = ΔΒ. Ἔτσι, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ ἔχουν τὶς πλευρές των ἴσες μίαν πρὸς μίαν. Ἄρα εἶναι ἴσα.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἂν ἕνα τετράεδρον ἔχῃ τὰ ὕψη του ἴσα, τότε δύο ὁποιεσδήποτε ἕδρες του εἶναι ἴσες, ἄρα ὅλες οἱ ἕδρες του εἶναι ἴσες. Δηλαδὴ τὸ τετράεδρον εἶναι τότε ἰσοεδρικόν.

**ΣΤ.43 Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν k εἶναι τὸ περίκεντρον ἐγγραψίμου κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του, τότε ἡ εἰς τὸ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΜ, τέμνει τοὺς φορεῖς δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου εἰς σημεῖα ἰσαπέχοντα τοῦ Μ.**




**Ἀπόδειξις.** Αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι δύο τέμνουσαι τοῦ περικύκλου (Κ) αὐτοῦ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου διερχόμεναι διὰ τοῦ Μ. Διὰ τοῦτο, ὡς γνωστόν, ἡ πολικὴ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Κ) εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία περιέχει τὸ κοινὸν σημεῖον Η τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Θ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΗΘ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ σημείου Μ ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Κ) καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν, κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν περιέχουσαν τὸ κέντρον Κ καὶ τὸ Μ, δηλ. πρὸς τὴν ΚΜ εἰς σημεῖον Ṗ ὁριζόμενον διὰ τῆς ἀλγεβρικῆς ἰσότητος :

$\overline{KP}\cdot\overline{KM}=R^2$ (ὅπου R τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου (Κ)).

Ὁμοίως, ἐπειδὴ οἱ εὐθεῖες ΑΔ, ΒΓ εἶναι τέμνουσαι τοῦ κύκλου (Κ) διερχόμεναι διὰ τοῦ Θ, ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΜ ἡ περιέχουσα τὸ κοινὸν σημεῖον Η τῶν ΑΒ, ΔΓ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Μ τῶν ΑΓ, ΔΒ, εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ Θ ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Κ).

Διὰ τοῦτο ἡ δέσμη (ΗΜ, ΗΘ, ΗΑ, ΗΔ) εἶναι ἁρμονική. Ἂν ἡ κάθετος τῆς ΚΜ κατὰ τὸ Μ τέμνη εἰς Ε καὶ Ζ τὰ ὑποστηρίγματα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τότε ἡ ΕΖ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν ἀκτῖνα τῆς ἀνωτέρω δέσμης, τὴν ΗΘ, ἀπὸ σημεῖον Μ τῆς ὁμολόγου ἀκτῖνος ΗΜ τέμνουσα τὸ ἄλλο ζεῦγος (ΗΑ, ΗΔ) ὁμολόγων ἀκτίνων, εἰς σημεῖα Ε, Ζ. Διὰ τοῦτο, ὡς γνωστόν, τὰ Ε καὶ Ζ θὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Μ. Ἄρα θὰ εἶναι ΕΜ = ΜΖ. δ.ἔ.δ.

**ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. ΣΤ.44** **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :**

$$\text{ημ}\,x=\text{εφ}\,\alpha\;\text{ημ}(y+\alpha)\qquad(1)$$

$$\text{ημ}(\alpha-x)=2\text{ημ}^2\frac{v}{2}+\text{σον}(y+2\alpha)\quad(2).$$

Λύσις: Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $y=\text{εφ}x$ εἶναι ὡρισμένη μόνον ἐὰν εἶναι $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ εἶναι $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$.

Καὶ τότε εἶναι $\text{εφ}\,\alpha=\frac{\text{ημα}}{\text{συνα}}$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται : $\text{ημ}x=\frac{\text{ημα}}{\text{συνα}}\text{ημ}(y+\alpha)$ μετασχηματιζομένη διαδοχικῶς καὶ ἰσοδυνάμως εἰς :

$$\text{ημ}x\;\text{συνα}=\text{ημα}\;\text{ημ}(y+\alpha),\quad 2\text{ημ}x\;\text{συνα}=2\text{ημα}\;\text{ημ}(y+\alpha),$$

$$\text{ημ}(x+\alpha)+\text{ημ}(x-\alpha)=\text{συν}y-\text{συν}(y+2\alpha)\qquad(3).$$

Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἡ (2) μετασχηματίζεται ἰσοδυνάμως διαδοχικῶς εἰς :

$$\text{ημ}(\alpha-x)=1-\text{συν}y+\text{συν}(y+2\alpha),\quad \text{συν}y-\text{συν}(y+2\alpha)=$$
$$=1-\text{ημ}(\alpha-x),$$

$$\text{συν}y-\text{συν}(y+2\alpha)=1+\text{ημ}(x-\alpha)\qquad(4).$$

Ἔτσι, τὸ δοθὲν σύστημα ἀνάγεται εἰς τό :

$$\left.\begin{array}{l}\text{ημ}(x+\alpha)+\text{ημ}(x-\alpha)=\text{συν}y-\text{συν}(y+2\alpha)\\ \text{συν}y-\text{συν}(y+2\alpha)=1+\text{ημ}(x-\alpha)\end{array}\right\},$$

αὐτὸ δὲ ἀνάγεται λόγῳ τῆς δευτέρας ἐξισώσεώς του, εἰς τό:

$$\begin{array}{l}\text{ημ}(x+\alpha)+\text{ημ}(x-\alpha)=1+\text{ημ}(x-\alpha)\\ \text{συν}y-\text{συν}(y+2\alpha)=1+\text{ημ}(x-\alpha)\end{array}$$

καὶ τελικὰ εἰς τό :

$$(3')\qquad \text{ημ}(x+\alpha)=1$$

$$(4')\qquad 2\text{ημα}\,\text{ημ}(y+\alpha)=1+\text{ημ}(x-\alpha).$$

Ἡ (3') ἀληθεύει ἂν καὶ μόνον ἂν εἶναι :

$$x+\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in Z),\ \text{ἀπὸ ὅπου :}$$

$$x=\frac{\pi}{\alpha}-\alpha+2k\pi\ (k\in Z).$$

Τότε ἔχομεν $x-\alpha=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$, ἀπὸ ὅπου συνάγεται ὅτι $\text{ημ}(x-\alpha)=\text{συν}2\alpha$ καὶ ἡ (4') γίνεται :

$$2\text{ημα}\;\text{ημ}(y+\alpha)=1+\text{συν}2\alpha,\quad\text{δηλ.}$$

$$2\text{ημα}\;\text{ημ}(y+\alpha)=2\text{συν}^2\alpha\iff\text{ημα}\;\text{ημ}(y+\alpha)=\text{συν}^2\alpha\qquad(5).$$

Ἡ (5) δὲν ἀληθεύει ὅταν εἶναι $\text{ημα}=0$, διότι τότε ἔχομεν $\text{συν}^2\alpha=1$ καὶ ἔτσι γίνεται $1=0$, ἡ ὁποία εἶναι ψευδὴς πρότασις. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι :

$$\text{ημα}\neq0\iff\alpha\neq k\pi\quad(k\in Z),$$

Τότε δύναται νὰ γίνῃ διαίρεσις τῶν μελῶν τῆς (5) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\text{ημα}\neq0$, καὶ ἔτσι ἡ (5) ἀνάγεται εἰς τήν :

$$\text{ημ}(y+\alpha)=\frac{\text{συν}^2\alpha}{\text{ημα}}\qquad(6).$$

Ἡ (6) ἐπιβάλλει νὰ εἶναι :

$$-1\leqslant\frac{\text{συν}^2\alpha}{\text{ημα}}\leqslant1\iff\frac{\text{συν}^2\alpha}{|\text{ημα}|}\leqslant1,\quad\text{δηλ.}$$

$$\frac{1-\text{ημ}^2\alpha}{|\text{ημα}|}\leqslant1\iff\text{ημ}^2\alpha+|\text{ημα}|-1\geqslant0\iff$$

$$\iff|\text{ημα}|^2+|\text{ημα}|-1\geqslant0\qquad(7).$$

Ἂν τεθῇ $|\text{ημα}|=X$, τότε ἡ (7) γράφεται :

$$X^2+X-1\geqslant0\qquad(8).$$

Τὸ τριώνυμον $X^2+X-1$ ἔχει δύο πραγματικὰς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{-1-\sqrt5}{2}$ καὶ $\frac{-1+\sqrt5}{2}$ καὶ ἑπομένως :

$$X^2+X-1=\left(X+\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(X-\frac{-1+\sqrt3}{2}\right),$$

ὁπότε ἡ (8) γράφεται :

$$\left(X+\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(X-\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)\geqslant0,\quad\text{δηλ.}$$

$$\left(|\text{ημα}|+\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(|\text{ημα}|-\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)\geqslant0\iff$$

$$\iff|\text{ημα}|-\frac{-1+\sqrt5}{2}\geqslant0\qquad(9),$$

διότι εἶναι $|\text{ημα}|+\frac{1+\sqrt5}{2}>0$, ἐπειδὴ εἶναι $|\text{ημα}|\geqslant0$.

Ἔτσι ἡ (7) ἀνάγεται εἰς τὴν (9), ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $|\text{ημα}|\geqslant\frac{-1+\sqrt5}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ ὑποτίθεται $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ $|\text{ημα}|<1$, ἕπεται ὅτι ἡ (6) θὰ ἔχῃ λύσιν ἂν καὶ μόνον ἂν εἶναι μὲ $\alpha\neq k\pi$ :

$$\frac{-1+\sqrt5}{2}\leqslant|\text{ημα}|<1\qquad(10).$$

Καὶ τότε, ἂν $\varphi=\text{Τοξ ημ}\frac{\text{συν}^2\alpha}{\text{ημα}}$, ἡ (6) γράφεται :

$$\text{ημ}(y+\alpha)=\text{ημ}\varphi,$$

ἡ ὁποία ἀληθεύει ἂν καὶ μόνον ἂν εἶναι :

$$\text{ἤ}\quad y+\alpha=\varphi+2k\pi\iff y=\varphi-\alpha+2k\pi\ (k\in Z)$$

$$\text{ἤ}\quad y+\alpha=\pi-\varphi+2k\pi\iff y=\pi-(\varphi+\alpha)+2k\pi.$$

Ὥστε τὸ σύστημα ἔχει λύσιν μόνον ἂν εἶναι:

$\alpha \neq k\pi$ $(k \in Z)$ συνάμα δὲ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq |\eta\mu\alpha| < 1$.

Ἔχει δὲ τότε λύσεις:

$$\begin{pmatrix} x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \\ y = \varphi - \alpha + 2k\pi \end{pmatrix} \text{ καθὼς καὶ}$$

$$\begin{pmatrix} x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \\ y = \pi - (\varphi + \alpha) + 2k\pi \end{pmatrix} k \in Z,$$

ὅπου $\qquad \varphi = \text{Τοξ ημ} \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha}$.

**ΣΤ.45** Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\alpha\ \tau\varepsilon\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \beta\ \sigma\tau\varepsilon\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad (1)$$

$$\alpha\ \tau\varepsilon\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \beta\ \sigma\tau\varepsilon\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad (2).$$

**Λύσις.** Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $y = \tau\varepsilon\mu\, x$ εἶναι ὡρισμένη μόνον διὰ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ καὶ ἡ $y = \sigma\tau\varepsilon\mu\, x$ μόνον διὰ $x \neq k\pi$, ὑποτίθεται ὅτι εἶναι:

$$x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{6},$$

$$x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\pi - \frac{\pi}{3},$$

$$x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad \text{καὶ}$$

$$x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{3}.$$

Τότε ἡ (1) καὶ ἡ (2) μετασχηματίζονται ἰσοδυνάμως εἰς:

$$\alpha\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \beta\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\eta\mu\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right) \quad (3)$$

$$\alpha\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \beta\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\eta\mu\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right) \quad (4).$$

Τὸ σύστημα τῶν (3) καὶ (4) ἰσοδυναμεῖ μὲ τό:

$$\alpha\left[\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]+\beta\left[\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\eta\mu\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$\alpha\left[\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]+$$

$$+\beta\left[\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\eta\mu\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\eta\mu\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

δηλαδὴ μὲ τό:

$$2\alpha\ \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + 2\beta\ \sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu 2x\ \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$$

$$2\alpha\ \eta\mu\frac{\pi}{3}\ \sigma\upsilon\nu x + 2\beta\ \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu x =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu\frac{2\pi}{3}\ \sigma\upsilon\nu 2x,$$

τὸ ὁποῖον, ἐπειδὴ εἶναι:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

ἁπλοποιεῖται εἰς:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\ \eta\mu x + \beta\ \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}\eta\mu 2x \\ &\sqrt{3}\ \alpha\ \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\ \beta\ \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu 2x \end{aligned}\right\} \quad (I).$$

Θεωροῦντες τὸ σύστημα (I) ὡς σύστημα μὲ ἀγνώστους α καὶ β, ἔχομεν:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\eta\mu 2x & \sigma\upsilon\nu x \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu 2x & -\sqrt{3}\ \eta\mu x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \\ \sqrt{3}\ \sigma\upsilon\nu x, & -\sqrt{3}\ \eta\mu x \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu x\eta\mu 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu 2x}{-\sqrt{3}\ \eta\mu^2 x - \sqrt{3}\ \sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu x\ \eta\mu 2x)}{-\sqrt{3}\ (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)} =$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu 3x}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 3x$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} \eta\mu x & -\frac{1}{2}\eta\mu 2x \\ \sqrt{3}\ \sigma\upsilon\nu x & \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \\ \sqrt{3}\ \sigma\upsilon\nu x & -\sqrt{3}\ \eta\mu x \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x\ \sigma\upsilon\nu x)}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\eta\mu 3x.$$

Ἄρα $\alpha^2+\beta^2 = \frac{1}{4}(\eta\mu^2 3x + \sigma\upsilon\nu^2 3x) = \frac{1}{4}$.

Ἔτσι, ἡ ἀπαλείφουσα εἶναι: $\alpha^2+\beta^2 = \frac{1}{4}$.