Author: Άγνωστος Συγγραφέας

Title: Γενικαὶ Ασκήσεις--

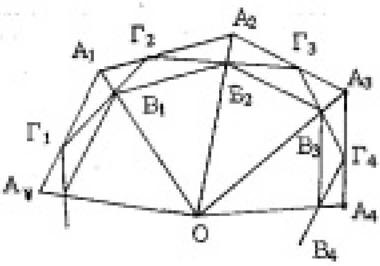
Creator: HDML

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διά τούς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Γ.Α31 Θεωροῦμεν δύο πολύγωνα: $A_1A_2 \cdots A_\nu$ καί $B_1B_2 \cdots B_\nu$, ὁμορρόπως, ὅμοια καί μέ ὁμολόγους πλευράς παραλλήλους. Ἐκ τούτων τό δεύτερον κεῖται ἐντός τοῦ πρώτου. Τρίτον πολύγωνον $\Gamma_1\Gamma_2 \cdots \Gamma_\nu$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τό $A_1A_2 \cdots A_\nu$ καί περιγεγραμμένον εἰς τό $B_1B_2 \cdots B_\nu$.

Ἔστωσαν E_1 τό ἐμβαδόν τοῦ $A_1A_2 \cdots A_\nu$, E_2 τό ἐμβαδόν τοῦ $B_1B_2 \cdots B_\nu$ καί E_3 τό ἐμβαδόν τοῦ $\Gamma_1\Gamma_2 \cdots \Gamma_\nu$, νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\qquad E_3^2 = E_1 \cdot E_2$.



Λύσις. Ἐπειδή τά δύο πολύγωνα $A_1A_2 \cdots A_\nu$ καί $B_1B_2 \cdots B_\nu$ εἶναι ὁμορρόπως ὅμοια καί μέ ὁμολόγους πλευράς παραλλήλους, θά ἔχομεν:

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = \cdots = \frac{\overline{A_\nu A_1}}{\overline{B_\nu B_1}} = \lambda$$

καί θά εἶναι $\lambda > 0$.

Ἐπειδή ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο ὁμοίων πολυγώνων τό $B_1B_2 \cdots B_\nu$ κεῖται ἐντός τοῦ $A_1A_2 A_\nu$, θά εἶναι:

$$E_2 < E_1, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{E_1}{E_2} > 1.$$

Ἐπειδή $\frac{E_1}{E_2} = \lambda^2$ καί $\lambda > 0$ θά εἶναι $\lambda > 1$.

Ἄρα $B_1B_2 < A_1A_2$, $B_2B_3 < A_2A_3, \ldots$ καί $B_\nu B_1 < A_\nu A_1$.

Ἑπομένως, τά τετράπλευρα $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$ κ.τ.λ., εἶναι τραπέζια, αἱ μή παράλληλοι πλευραί αὐτῶν, προεκτεινόμεναι, πρός τό μέρος τῶν μικροτέρων βάσεων τέμνονται.

Ἔστω O τό σημεῖον τομῆς τῶν A_1B_1 καί A_2B_2. Θά ἔχομεν:

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} = \lambda \quad (1).$$

Ἔστω O′ τό σημεῖον τομῆς τῶν A_2B_2 καί A_3B_3. Θά ἔχομεν καί πάλιν:

$$\frac{\overline{O'A_2}}{\overline{O'B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = \frac{\overline{O'A_3}}{\overline{O'B_3}} = \lambda \quad (2).$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{\overline{O'A_2}}{\overline{O'B_2}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}}.$$

Ἄρα τά O καί O′ συμπίπτουν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἕπεται, ὅτι, αἱ εὐθεῖαι A_1B_1, $B_2B_2, \ldots$, καί $A_\nu B_\nu$ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἤτοι διά τοῦ ἀνωτέρω ὁρισθέντος σημείου O, κειμένου, ὡς πρός τάς δύο βάσεις ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω τραπεζίων, πρός τό μέρος τῆς μικροτέρας ἐκ τούτων, ἤτοι ἐντός τοῦ $B_1B_2 \cdots B_\nu$.

Ἤδη, παρατηροῦμεν, ὅτι:

$$(OB_1\Gamma_2B_2) = (OB_1A_2),$$

διότι αἱ A_1A_2 καί B_1B_2 εἶναι παράλληλοι.

Συνεπῶς, ἔχομεν:

$$\frac{(OB_1\Gamma_2B_2)}{(OB_1B_2)} = \frac{(OB_1A_2)}{(OB_1B_2)} = \frac{(OA_2)}{(OB_2)} = \lambda.$$

Ὁμοίως, ἔχομεν:

$$\frac{(OB_2\Gamma_3B_3)}{(OB_2B_3)} = \lambda$$

$$\frac{(OB_3\Gamma_4B_4)}{(OB_3B_4)} = \lambda$$

. . . .

$$\frac{(OB_\nu\Gamma_1B_1)}{(OB_\nu B_1)} = \lambda.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λαμβάνομεν:

$$\frac{(OB_1\Gamma_2B_2)+(OB_2\Gamma_3B_3)+(OB_3\Gamma_4B_4)+\cdots+(OB_\nu\Gamma_1B_1)}{(OB_1B_2)+(OB_2B_3)+(OB_3B_4)+\cdots+(OB_\nu B_1)} = \lambda,$$

ἤτοι: $$\frac{E_3}{E_2} = \lambda \quad (3).$$

Ἀπό τήν (3) εὑρίσκομεν:

$$\frac{E_3^2}{E_2^2} = \lambda^2 \quad (4).$$

Ἀλλά, ἔχομεν καί $\frac{E_1}{E_2} = \lambda^2 \quad (5)$.

Αἱ (4) καί (5) δίδουν: $E_3^2 = E_1 \cdot E_2$.

Γ.Α32 Δίδονται δύο περιφέρειαι κύκλων (K_1, R_1) καί (K_2, R_2) τεμνόμεναι εἰς τά A καί B. Θεωροῦμεν γωνίαν (Ax, Ay) σταθεράν κατά μέγεθος καί προσανατολισμόν, στρεφομένην περί τό A.

Ἔστωσαν Γ τό δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς Ax μετά τῆς (K_1, R_1), Δ τό δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς Ay μετά τῆς (K_2, R_2) καί E τό σημεῖον τομῆς τῶν $K_1\Gamma$ καί $K_2\Delta$.

Ζητεῖται: 1) Νά ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη εἰς τό τρίγωνον ΕΓΔ διέρχεται ἀπό σταθερόν σημεῖον Z.

2) Νά ἀποδειχθῇ, ὅτι, τά τρίγωνα ΖΓΔ καί ZK_1K_2 εἶναι ὁμορρόπως, ὅμοια.

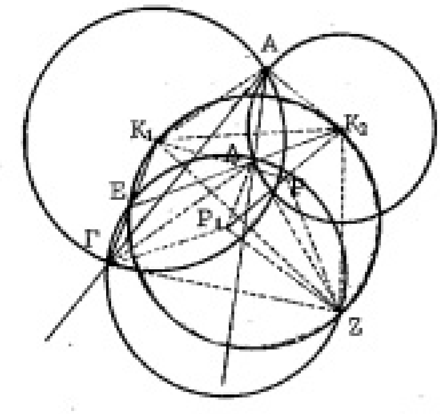
3) Ἐὰν P_1 καὶ P εἶναι δύο σημεῖα ὁμόλογα τῶν ἀνωτέρω ὁμορρόπως, ὁμοίων τριγώνων $ΖΓΔ$ καὶ $ΖK_1K_2$, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ P, ὅταν ἡ γωνία (Ax, Ay) στρέφηται περὶ τὸ A.

Ὡς συμπέρασμα, νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τοῦ ὀρθοκέντρου, τοῦ βαρυκέντρου καὶ τοῦ ἐγκέντρου τοῦ τριγώνου $ΖΓΔ$.

Λύσις. 1) Παρατηροῦμεν, ὅτι, *κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίου πολλαπλασίου τοῦ 2π*, ἰσχύουν αἱ κάτωθι σχέσεις :

$$(\overrightarrow{ΔK_2}, \overrightarrow{ΓK_1}) = (\overrightarrow{ΔK_2}, \overrightarrow{ΓA}) + (\overrightarrow{ΓA}, \overrightarrow{ΓK_1}) =$$

$$= (\overrightarrow{ΔK_2}, \overrightarrow{ΔA}) + (\overrightarrow{ΔA}, \overrightarrow{ΓA}) + (\overrightarrow{ΓA}, \overrightarrow{ΓK_1}) \quad (1).$$



Ἐπειδὴ $K_2A = K_2Δ$ καὶ $K_1Γ = K_1A$, ἔχομεν, ὑπὸ τὴν αὐτὴν προσέγγισιν, ὅτι :

$$(\overrightarrow{ΔK_2}, \overrightarrow{ΔA}) = (\overrightarrow{AΔ}, \overrightarrow{AK_2}) \quad (2)$$

$$(\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AΓ}) = (\overrightarrow{ΓA}, \overrightarrow{ΓK_1}) \quad (3).$$

Ἐκ τῶν (1), (2), (3) λαμβάνομεν, ὑπὸ τὴν αὐτὴν προσέγγισιν 2λπ, ἔνθα λ ἀκέραιος, ὅτι :

$$(\overrightarrow{ΔK_2}, \overrightarrow{ΓK_1}) = (\overrightarrow{AΔ}, \overrightarrow{AK_2}) + (\overrightarrow{ΔA}, \overrightarrow{ΓA}) + (\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AΓ}) \quad (4).$$

Κατὰ τὰ γνωστά, ὑπὸ τὴν αὐτὴν προσέγγισιν, εἶναι :

$$(\overrightarrow{ΔA}, \overrightarrow{ΓA}) = (\overrightarrow{AΔ}, \overrightarrow{AΓ}) = -(\overrightarrow{AΓ}, \overrightarrow{AΔ}) \quad (5).$$

Αἱ (4) καὶ (5), ὑπὸ τὴν αὐτὴν προσέγγισιν, δίδουν :

$$(\overrightarrow{ΔK_2}, \overrightarrow{ΓK_1}) = (\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AΓ}) + (\overrightarrow{AΔ}, \overrightarrow{AK_2}) - (\overrightarrow{AΓ}, \overrightarrow{AΔ}) \quad (6).$$

Ἀπὸ τὴν (6) λαμβάνομεν, κατὰ προσέγγισιν 2λπ, λ ἀκέραιος, ὅτι :

$$(\overrightarrow{ΔK_2}, \overrightarrow{ΓK_1}) = (\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AΓ}) + (\overrightarrow{AΓ}, \overrightarrow{AΔ}) + (\overrightarrow{AΔ}, \overrightarrow{AK_2}) -$$

$$-2(\overrightarrow{AΓ}, \overrightarrow{AΔ}) \quad (7)$$

Ἐξ ἄλλου, ὑπὸ τὴν αὐτὴν προσέγγισιν, ἔχομεν, ὅτι :

$$2(\overrightarrow{AΓ}, \overrightarrow{AΔ}) = 2(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{Ay}) \quad (8)$$

καὶ $(\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AΓ}) + (\overrightarrow{AΓ}, \overrightarrow{AΔ}) + (\overrightarrow{AΔ}, \overrightarrow{AK_2}) = (\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AK_2})$ (9).

Ἐκ τῶν (7), (8), (9) εὑρίσκομεν, ὑπὸ τὴν αὐτὴν προσέγγισιν, ὅτι :

$$(\overrightarrow{ΔK_2}, \overrightarrow{ΓK_1}) = (\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AK_2}) - 2(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{Ay}) \quad (10).$$

Ὑποθέτομεν, ὅτι :

$$(\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AK_2}) - 2(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{Ay}) \neq k\pi,$$

ἔνθα k ἀκέραιος.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ εὐθεῖαι $ΔK_2$ καὶ $ΓK_1$ τέμνονται.

Ἔστωσαν E τὸ σημεῖον τομῆς τούτων καὶ Z τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῶν περιφερειῶν, τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα EK_1K_2 καὶ $EΓΔ$.

Κατὰ προσέγγισιν 2hπ, h ἀκέραιος, θὰ ἔχομεν :

$$(\overrightarrow{ZK_2}, \overrightarrow{ZK_1}) = (\overrightarrow{ΔK_2}, \overrightarrow{ΓK_1}) = (\overrightarrow{AK_1}, \overrightarrow{AK_2}) - 2(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{Ay}) \quad (11).$$

Ἀπὸ τὴν (11), ἕπεται, ὅτι, τὸ τόξον K_1ZK_2 τῆς περὶ τὸ τρίγωνον EK_1K_2 περιγεγραμμένης περιφερείας, εἶναι σταθερὸν καὶ ὡρισμένον.

Κατὰ ταῦτα τὸ Z κεῖται ἐπὶ ὡρισμένου τόξου, χορδῆς K_1K_2.

Παρατηροῦμεν, ἤδη, ὅτι, ὑπὸ τὴν αὐτὴν προσέγγισιν 2λπ, ἔχομεν, ὅτι :

$$(\overrightarrow{K_1E}, \overrightarrow{K_1Z}) = (\overrightarrow{K_2E}, \overrightarrow{K_2Z}) \quad (12)$$

καὶ

$$(\overrightarrow{ΔZ}, \overrightarrow{ΔK_2}) = (\overrightarrow{ΓZ}, \overrightarrow{ΓE}) \quad (13)$$

Ἀπὸ τὰς (12) καὶ (13), ἕπεται, ὅτι, τὰ τρίγωνα $ZK_2Δ$ καὶ $ZK_1Γ$ εἶναι, ὁμορρόπως, ὅμοια.

Συνεπῶς, ἔχομεν, ὅτι :

$$\frac{ZΓ}{ZΔ} = \frac{ZK_1}{ZK_2} \quad (14)$$

καὶ

$$(\overrightarrow{ZΓ}, \overrightarrow{ZK_1}) = (\overrightarrow{ZΔ}, \overrightarrow{ZK_2}) \quad (15)$$

Ἀπὸ τὴν (15) λαμβάνομεν, ὅτι :

$$(\overrightarrow{ZΓ}, \overrightarrow{ZΔ}) = (\overrightarrow{ZK_1}, \overrightarrow{ZK_2}) \quad (16).$$

Ἀπὸ τὰς (14) καὶ (16), ἕπεται, ὅτι, τὰ τρίγωνα $ZΓΔ$ καὶ ZK_1K_2 εἶναι, ὁμορρόπως, ὅμοια.

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα $ZK_2Δ$ καὶ $ZK_1Γ$ εὑρίσκομεν, ὅτι :

$$\frac{ZK_1}{ZK_2} = \frac{K_1Γ}{K_2Δ} = \frac{R_1}{R_2} \quad (17).$$

Ἀπὸ τὴν (17) συμπεραίνομεν, ὅτι, τὸ Z κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς γραφομένης μὲ διάμετρον O_1O_2, ἔνθα O_1 καὶ O_2 τὰ κέντρα ὁμοιότητος (ἐξωτερικὸν καὶ ἐσωτερικὸν) τῶν περιφερειῶν (K_1, R_1) καὶ (K_2, R_2), ἐκ τῶν ὁποίων, ὡς γνωστόν, τὸ O_2 κεῖται μεταξὺ τῶν K_1 καὶ K_2, τὸ δὲ O_1 εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ K_1K_2 πρὸς τὸ μέρος τοῦ K_2, ἐὰν $R_2 < R_1$.

Τὰ O_1, O_2 καὶ ἡ περιφέρεια διαμέτρου O_1O_2, ὡς εὐνόητα, δὲν ἐσημειώθησαν εἰς τὸ σχῆμα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σημεῖον Z εἶναι σταθερόν, ὡς τομὴ τοῦ σταθεροῦ τόξου K_1ZK_2 τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης, περὶ τὸ τρίγωνον EK_1K_2 καὶ τῆς περιφερείας διαμέτρου O_1O_2. Τὸ ἀνωτέρω τόξον καὶ ἡ περιφέρεια διαμέτρου O_1O_2, ἐπειδὴ τὰ ζεύγη τῶν σημείων K_1, K_2 καὶ O_1O_2 χωρίζονται, ἔχουν ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ Z.

Ἐξ ὑποθέσεως τὰ P_1 καὶ P εἶναι δύο ὁμόλογα σημεῖα τῶν ὁμορρόπως, ὁμοίων τριγώνων $ZΓΔ$ καὶ ZK_1K_2-

Ἑπομένως, τά τρίγωνα $ZP_1\Delta$ καί ZPK_2 εἶναι, ὁμορρόπως, ὅμοια.

Ἐκ τούτου, ἕπεται, εὐχερῶς, ὅτι καί τά τρίγωνα ZP_1, P καί $Z\Delta K_2$ εἶναι, ὁμορρόπως, ὅμοια.

Κατά συνέπειαν, εἶναι :

$$\frac{(PP_1)}{(K_2\Delta)} = \frac{(ZP)}{(ZK_2)}.$$

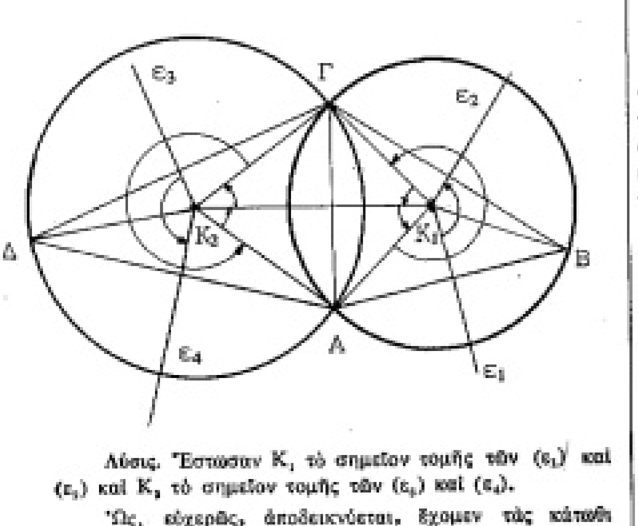
Ἄρα $\quad (PP_1) = (K_2\Delta)\,\dfrac{(ZP)}{(ZK_2)}.$

Ἑπομένως τό PP_1 εἶναι σταθερόν κατά μέγεθος. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ P_1 εἶναι περιφέρεια κύκλου, κέντρου P καί ἀκτῖνος :

$$PP_1 = K_2\Delta\,\frac{ZP}{ZK_2}.$$

Ἐάν τά H, G, O εἶναι τό ὀρθόκεντρον τό βαρύκεντρον καί τό ἔγκεντρον τοῦ τριγώνου ZK_1K_2 καί τά H_1, G_1, O_1 εἶναι τό ὀρθόκεντρον, τό βαρύκεντρον καί τό ἔγκεντρον τοῦ τριγώνου $Z\Gamma\Delta$, συμφώνως, πρός τά ἀνωτέρω, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ H_1 θά εἶναι περιφέρεια κύκλου κέντρου H καί ἀκτῖνος $HH_1 = K_2\Delta\,\dfrac{ZH}{ZK_2}$, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ G_1, ὁμοίως, θά εἶναι περιφέρεια κέντρου G καί ἀκτῖνος $\quad GG_1 = K_2\Delta\,\dfrac{ZG}{ZK_2}$ καί τέλος ὁ γεωμ. τόπος τοῦ O_1 περιφέρεια κέντρου O καί ἀκτῖνος $OO_1 = K_2\Delta\,\dfrac{ZO}{ZK_2}$.

Γ.Α33 Ἐάν αἱ δεδομέναι εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), (ε_3) καί (ε_4) εἶναι αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν AB, BΓ, ΓΔ καί ΔA τετραπλεύρου ABΓΔ, νά κατασκευασθῇ τό τετράπλευρον καί νά διερευνηθῇ τό πρόβλημα.



Λύσις. Ἔστωσαν K_1 τό σημεῖον τομῆς τῶν (ε_1) καί (ε_2) καί K_2 τό σημεῖον τομῆς τῶν (ε_3) καί (ε_4).

Ὡς, εὐχερῶς, ἀποδεικνύεται, ἔχομεν τάς κάτωθι σχέσεις :

$$K_1A = K_1B = K_1\Gamma, \quad K_2\Gamma = K_2\Delta = K_2A$$

$$(K_1A,\ K_1B)+(K_1B,\ K_1\Gamma) = 2(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) \tag{1}$$

$$(K_2\Gamma,\ K_2K_1) = (K_1K_2,\ K_1A) \tag{2}$$

καί $(K_1A,\ K_1B)+(K_1B,\ K_1\Gamma)+(K_1\Gamma,\ K_2\Gamma),\ (K_2\Gamma,\ K_2K_1) +$
$$+\,(K_1K_2,\ K_1A) = 2\pi \tag{3}$$

Ἐκ τῶν (1), (2), (3) λαμβάνομεν ὅτι :

$$(K_1K_2,\ K_1A) = \pi-(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) \tag{4}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν :

$$(K_2A,\ K_2K_1K_1) = \pi-(\varepsilon_3,\ \varepsilon_4) \tag{5}$$

Ἐκ τῶν (4) καί (5) λαμβάνομεν ὅτι :

$$(K_1K_2,\ K_1A)+(K_2A,\ K_2K_1) = 2\pi-[(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)+(\varepsilon_3,\ \varepsilon_4)] \tag{6}$$

Ἐπειδή $0<(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)<\pi$ καί $0<(\varepsilon_3,\ \varepsilon_4)<\pi$, ὅτε :

$$0<(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)+(\varepsilon_3,\ \varepsilon_4)<2\pi$$

τό τρίγωνον K_1K_2A κατασκευάζεται, ἐάν

$$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)+(\varepsilon_3,\ \varepsilon_4)\neq\pi \tag{7}$$

Κατά συνέπειαν, πληρουμένης τῆς σχέσεως (7), τό τρίγωνον K_1K_2A κατασκευάζεται, ἡ κορυφή A ὁρίζεται, ἐν συνεχείᾳ δέ ὁρίζονται αἱ κορυφαί B, Γ καί Δ.

Τό πρόβλημα εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην, ἔχει μίαν λύσιν.

Ἐάν $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)+(\varepsilon_3,\ \varepsilon_4)=\pi$, τότε θά ἔχωμεν καί

$$(B\Gamma,\ BA)+(\Delta A,\ \Delta\Gamma)=\pi.$$

Ἑπομένως, τό ζητούμενον τετράπλευρον ABΓΔ θά εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Συνεπῶς αἱ (ε_1), (ε_2), (ε_3), (ε_4) πρέπει νά διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἐάν ἰσχύῃ καί ὁ ἀνωτέρω ὅρος τό πρόβλημα ἔχει ἀπείρους λύσεις.

Ἐάν $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)+(\varepsilon_3,\ \varepsilon_4)=\pi$, αἱ δέ εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), (ε_3), (ε_4) δέν διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, τό πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Σημειώσεις.

α') Διά τοῦ συμβόλου $(K_1A,\ K_1B)$ νοοῦμεν τήν θετικήν γωνίαν, κυρτήν ἤ μή κυρτήν, τήν ὁποίαν διαγράφει ἡμιευθεία K_1X, στρεφομένη περί τό K_1, κατά τήν θετικήν φοράν, ἀπό τῆς ἀρχικῆς θέσεως, δηλ. τῆς θέσεως τῆς ἡμιευθείας K_1A, μέχρι τῆς τελικῆς θέσεως, δηλ. τῆς θέσεως τῆς ἡμιευθείας K_1B.

β') Διά τοῦ συμβόλου $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ νοοῦμεν τήν θετικήν κυρτήν γωνίαν, τήν ὁποίαν θά διαγράψῃ εὐθεῖα (ε), ἡ ὁποία συμπίπτει ἀρχικῶς μετά τῆς (ε_1) καί ἐν συνεχείᾳ στρέφεται, κατά τήν θετικήν φοράν, περί τό σημεῖον τομῆς τῶν (ε_1) καί (ε_2), μέχρις ὅτου συμπέσῃ μετά τῆς (ε_2).

Γ.Α34 Δίδεται γωνία xOy καί σημεῖον P σταθερόν. Διά τοῦ P ἄγεται μεταβλητή εὐθεῖα, τέμνουσα τήν Ox εἰς τό A καί τήν Oy εἰς τό B.

Ἔστωσαν Γ ἡ προβολή τοῦ A ἐπί τήν Oy καί Δ ἡ προβολή τοῦ B ἐπί τήν Ox.

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΓΔ διέρχεται διά τοῦ σταθεροῦ σημείου.

Λύσις. Ἐπειδή ἡ γωνία xOy εἶναι σταθερά τό ὀρθογώνιον τρίγωνον OAΓ παραμένει ὅμοιον πρός ἑαυτό.

Ἑπομένως, ὁ λόγος $\dfrac{OA}{O\Gamma}$ παραμένει σταθερός καί ἔστω ἴσος πρός τόν σταθερόν ἀριθμόν λ.

Κατά ταῦτα, ἔχομεν :

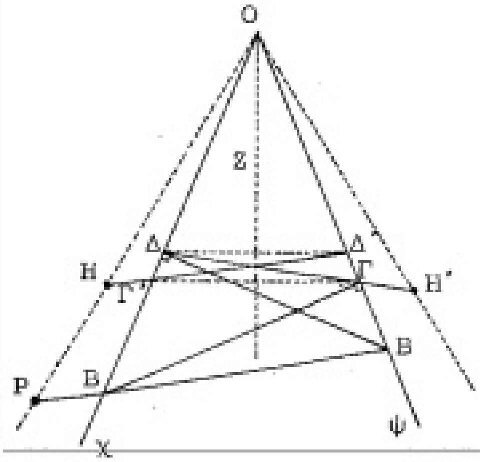
$$\frac{OA}{O\Gamma} = \lambda \quad (1)$$

Ὁμοίως ἔχομεν :

$$\frac{OB}{O\Delta} = \lambda \quad (2)$$

Ἑπομένως, ἔχομεν :

$$\frac{OA}{O\Gamma} = \frac{OB}{O\Delta} = \lambda \quad (3)$$



Ἔστωσαν Oz ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας xOy, Γ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ, ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον Oz καὶ Δ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Δ, ὡς πρὸς τὴν Oz.

Κατὰ τὰ γνωστά, ἔχομεν :

$$O\Gamma' = O\Gamma \quad (4) \qquad \text{καὶ} \qquad O\Delta' = O\Delta \quad (5).$$

Ἐκ τῶν (3), (4) καὶ (5), λαμβάνομεν :

$$\frac{OA}{O\Gamma'} = \frac{OB}{O\Delta'} = \lambda \quad (6)$$

Ἀπὸ τὴν (6) ἕπεται, ὅτι, αἱ AB καὶ Γ'Δ' εἶναι παράλληλοι.

Ἔστω H τὸ σημεῖον τομῆς τῶν OP καὶ Γ'Δ'. Ἐπειδὴ αἱ AB καὶ Γ'Δ', κατὰ τ' ἀνωτέρω, εἶναι παράλληλοι, θὰ ἔχομεν :

$$\frac{OP}{OH} = \frac{OA}{O\Gamma'} = \frac{OB}{O\Delta'} \quad (7).$$

Αἱ (6) καὶ (7) δίδουν :

$$\frac{OP}{OH} = \lambda.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἕπεται, ὅτι, τὸ H εἶναι σημεῖον σταθερὸν τῆς σταθερᾶς εὐθείας OP.

Ἀλλὰ αἱ ΓΔ καὶ Γ'Δ' εἶναι συμμετρικαί, ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον Oz, τῆς γωνίας xOy.

Ἑπομένως, ἡ ΓΔ θὰ διέρχηται ἀπὸ τὸ συμμετρικὸν H' τοῦ H ὡς πρὸς τὴν OZ. Τὸ σημεῖον H' εἶναι σταθερόν, ὡς συμμετρικὸν τοῦ σταθεροῦ H, ὡς πρὸς τὴν σταθερὰν διχοτόμον Oz.

Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ.. ΘΑ ΕΙΝΑΙ Ο ΠΙΣΤΟΣ ΦΙΛΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΑ ΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟΝ ΣΧΟΛΙΚΟΝ ΕΤΟΣ

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΑΣ ΔΙΑΣΚΕΔΑΖΟΥΝ

συνέχεια ἀπό σελ. 7

Μεταξᾶς Ἀπόλλων (Ἔδεσσα) 86, 87
Μαλταδοῦρος Σεραφείμ (Ἀχινὸς—Στυλίς) 86, 87.
Παπαγιάννης Γεώργιος (Ἀλεξανδρούπολις) 87.
Παπαδάτου Ἀφροδίτη (Μαρκόπουλον — Κεφαλληνία) 86.
Σιώγου Μαρία 94, 95.
Τζίμα Τασούλα (Καβάλα) 92.
Φιλίππου Νικόλαος (Ἁγία Μαρίνα—Κάσος) 94.
Χιοκτοὺρ Ἀλέξαντρος (Βόλος) 89.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΑΙ

Ἡ στήλη εὐχαριστεῖ θερμότατα τοὺς ἀγαπητοὺς ἀναγνώστας τοῦ «Εὐκλείδου» διὰ τὴν ἀγάπην μὲ τὴν ὁποίαν τὴν περιέβαλαν καὶ κατὰ τὸ ἔτος αὐτό.

Ἡ ἐπιτυχία της ὀφείλεται κατὰ κύριον λόγον εἰς τὴν ποικιλίαν τῶν προβλημάτων της, τὰ ὁποῖα ἐστάλησαν ἀπὸ ἐκλεκτοὺς Μαθηματικοὺς καὶ ἐπιμελεῖς μαθητάς.

Εἶναι δὲ βέβαιον, ὅτι κατὰ τὴν προσεχῆ περίοδον θὰ αὐξηθῇ ἔτι περισσότερον ὁ ἀριθμὸς τῶν συνεργατῶν της.

Ὅροι συνεργασίας τῆς στήλης

1. *Κάθε προτεινόμενον θέμα θὰ πρέπει νὰ συνοδεύεται ὑπὸ τῆς λύσεώς του.*

2. *Κάθε προτεινόμενον θέμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὕπαρξις ἢ ἡ μὴ ὕπαρξις τῆς λύσεως στηρίζεται εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικά, θὰ πρέπει νὰ συνοδεύεται ἀπαραιτήτως καὶ ὑπὸ τῆς σχετικῆς βιβλιογραφίας.*

3. *Ἡ διεύθυνσις καὶ τὸ τηλέφωνον τοῦ προτείνοντος θὰ διευκολύνῃ πολὺ τὸ ἔργον τοῦ ὑπευθύνου τῆς στήλης.*

4. *Κάθε ἐπιστολὴ πρὸς τὴν στήλην θ' ἀπευθύνεται εἰς τήν : Ἑλληνικὴν Μαθηματικὴν Ἑταιρείαν, Εὐκλείδην - V, Ἐλευθ. Βενιζέλου 34, Ἀθήνας 143.*